



Sociedade Brasileira de Matemática

# I COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE

28/02 a 04/03 de 2011

Departamento de Matemática - Universidade Federal de Sergipe

## Curvas e Superfícies Implícitas:

Noções de Geometrias Diferencial e Discreta.

**Maria Andrade<sup>1</sup>,**

Allyson Cabral<sup>1</sup>,

Vinícius Mello<sup>2</sup>, Adailson Peixoto<sup>3</sup> e Thomas Lewiner<sup>1</sup>

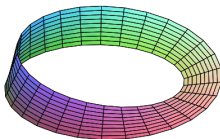
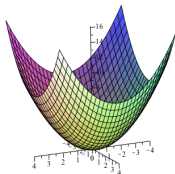
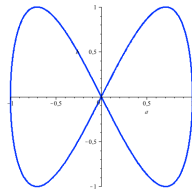
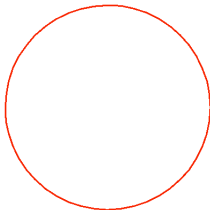
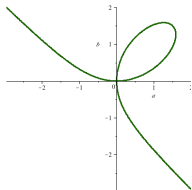
<sup>1</sup> Departamento de Matemática, PUC-Rio,

<sup>2</sup> Instituto de Matemática, UFBA,

<sup>3</sup> Instituto de Matemática, UFAL.

# Parte I: Curvas Implícitas e Superfícies Paramétricas

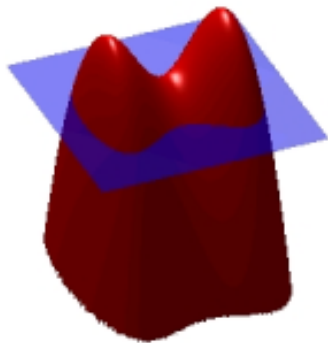
Entender matematicamente como podemos definir curvas e superfícies.



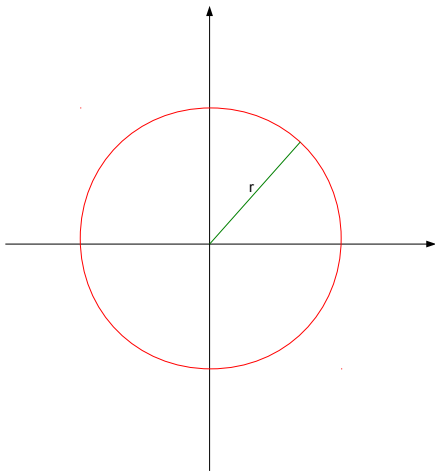
# Curvas Implícitas

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma **curva implícita** é o conjunto de pontos

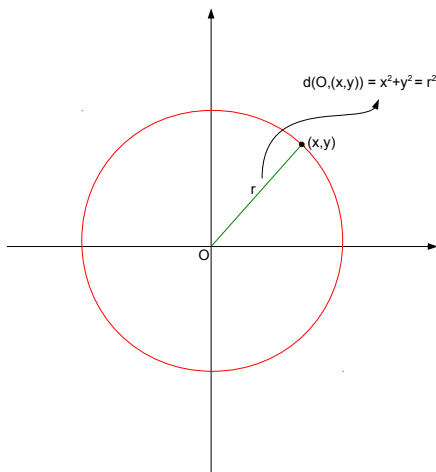
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = a\}$$



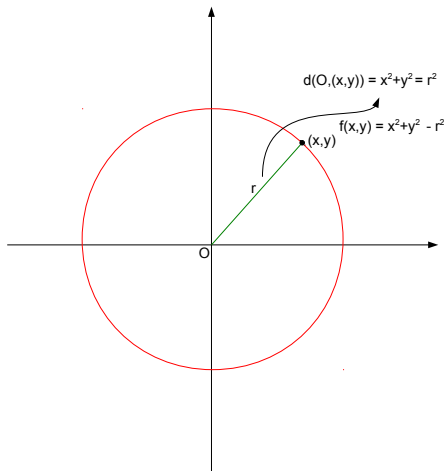
## Curvas Implícitas: Exemplo



# Curvas Implícitas: Exemplo



# Curvas Implícitas: Exemplo



# Curvas Implícitas

Suponhamos que  $\nabla f = (f_x, f_y)$  é não-nulo, s.p.g.,  $f_y \neq 0$ ,

# Curvas Implícitas

Suponhamos que  $\nabla f = (f_x, f_y)$  é não-nulo, s.p.g.,  $f_y \neq 0$ ,



A curva localmente é dada como um gráfico  $\{(x, g(x)); x \in J\}$ .



# Curvas Implícitas

Suponhamos que  $\nabla f = (f_x, f_y)$  é não-nulo, s.p.g.,  $f_y \neq 0$ ,



A curva localmente é dada como um gráfico  $\{(x, g(x)); x \in J\}$ .



$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (1 + g_x^2)^{-1/2}(1, g_x), \\ \mathbf{n} &= (1 + g_x^2)^{-1/2}(-g_x, 1), \\ \kappa &= \frac{g_{xx}}{(1 + g_x^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

# Curvas Implícitas

Devemos buscar informações das derivadas da  $g$  com as da  $f$ .



$$\begin{aligned}g_x &= -\frac{f_x}{f_y}, \\g_{xx} &= \frac{-f_{xx}}{f_y} + \frac{2f_{xy}f_x}{f_y^2} - \frac{f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.\end{aligned}$$

# Curvas Implícitas

Devemos buscar informações das derivadas da  $g$  com as da  $f$ .



$$\begin{aligned}g_x &= -\frac{f_x}{f_y}, \\g_{xx} &= \frac{-f_{xx}}{f_y} + \frac{2f_{xy}f_x}{f_y^2} - \frac{f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}(f_y, -f_x), \\ \mathbf{n} &= (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}(f_x, f_y), \\ \kappa &= -\frac{f_{xx}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

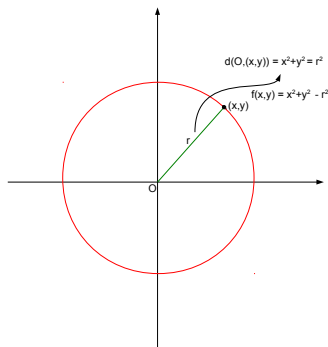
## Exemplo

Considere o círculo de raio  $r$  dado pela seguinte função

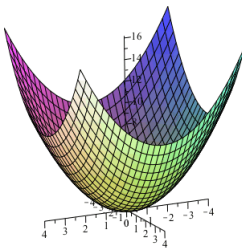
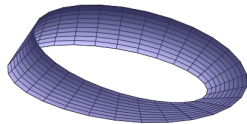
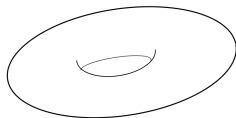
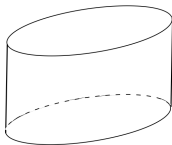
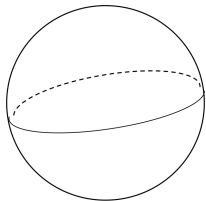
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2.$$

Temos

$$\mathbf{t} = r^{-1}(y, -x), \quad \mathbf{n} = r^{-1}(x, y), \quad \kappa = r^{-1}.$$



# Superfícies regulares



# Superfícies Regulares

**Definição:** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma **superfície regular** se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\sigma : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S$  tal que:

- $\sigma$  é diferenciável.
- $\sigma$  é um homeomorfismo.
- Para todo  $p \in U$  a diferencial  $d\sigma_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

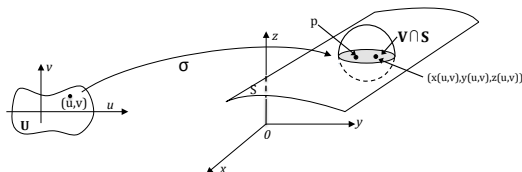
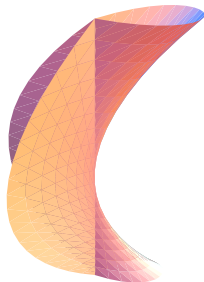
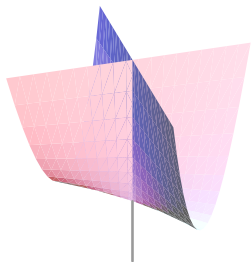


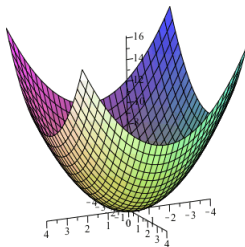
Figura: Definição de Superfície.



# Exemplos

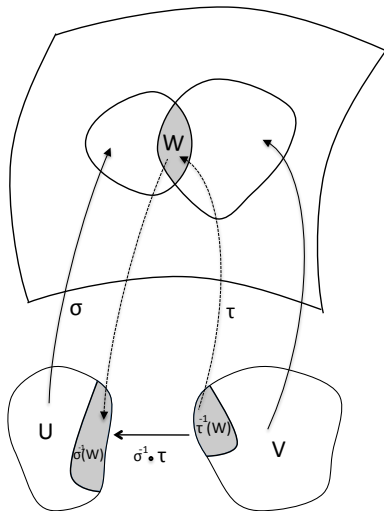
- Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  aplicação diferenciável. O gráfico de  $f$  é o seguinte conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

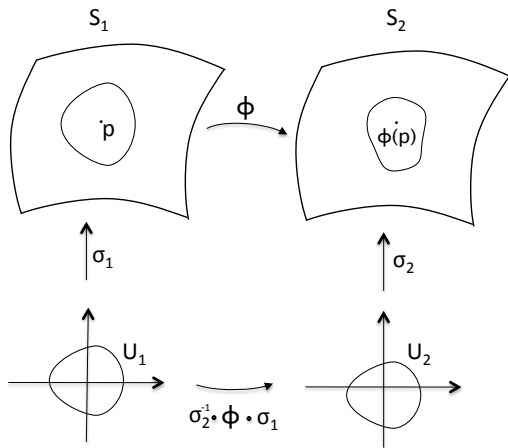




# Mudança de Parâmetros



# Aplicação diferenciável entre duas superfícies



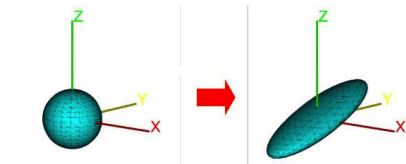
## Exemplo: aplicação diferenciável entre duas superfícies

**Exemplo:** Seja  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\phi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$ , onde  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Temos que  $\phi$  é diferenciável e que a restrição  $\phi|_{S^2}$  é uma aplicação da esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sobre o elipsoide

$$E^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$



# Plano Tangente



**Figura:** Parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e o plano tangente  $z = 2x + 2y - 2$  calculado em  $p = (1, 1, 2)$ .

# Curvas parametrizadas

**Definição:** Fixado  $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , as curvas

$$\alpha(t) = \sigma(u(t), v_0),$$

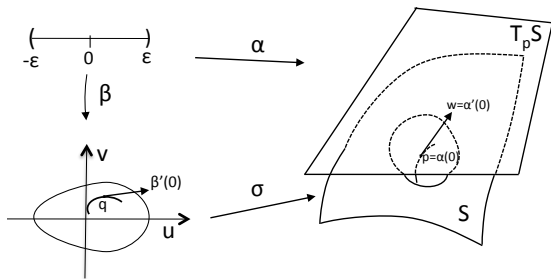
$$\beta(t) = \sigma(u_0, v(t)),$$

são chamadas as curvas coordenadas de  $\sigma$  em  $(u_0, v_0) \in U$ .

# Plano Tangente

## Proposição

Seja  $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,  $d\sigma_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  coincide com o conjunto de vetores tangentes a curvas desenhadas sobre  $S$  passando em  $p$ .



O plano tangente de  $S$  em  $p$  pode também ser visto como

$$T_p(S) = \{v, v \text{ é tangente a } S \text{ em } p\}.$$

# Primeira Forma Fundamental

**Definição:** A forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_p(w) = \|w\|^2$  é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

# Primeira Forma Fundamental

**Definição:** A forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_p(w) = \|w\|^2$  é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

Em coordenadas  $I_p$  é dada por

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v', \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v' \rangle_p \\ &= \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle_p u'^2 + 2 \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle_p u' v' + \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle_p v'^2 \\ &= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2, \end{aligned}$$



# Exemplos

- **Plano** Seja  $P \subset \mathbb{R}^3$  um plano passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1$  e  $w_2$ . Então uma parametrização para  $P$  é

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2.$$

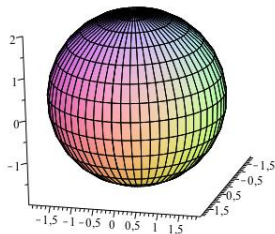
Os coeficientes da primeira forma fundamental são, para esse plano:  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ .

# Exemplos

- **Esfera** Considere a parametrização da esfera

$$\sigma(\theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta),$$

$$0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi.$$

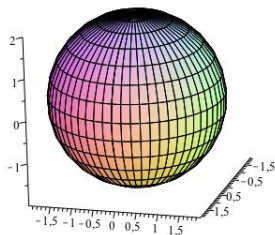


# Exemplos

- **Esfera** Considere a parametrização da esfera

$$\sigma(\theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta),$$

$$0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi.$$



Logo,

$$E = \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle = r^2,$$

$$F = \langle \sigma_\theta, \sigma_\phi \rangle = 0,$$

$$G = \langle \sigma_\phi, \sigma_\phi \rangle = r^2 \sin^2 \theta.$$

# Comprimento de curva sobre uma superfície

Seja  $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  curva parametrizada

# Comprimento de curva sobre uma superfície

Seja  $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  curva parametrizada

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\xi))} d\xi.$$

Se  $\alpha(t) = \sigma(u(t), v(t))$  está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $\sigma(u, v)$ ,

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} d\xi$$

# Área de uma região em uma superfície

**Definição:** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular contida na imagem da parametrização  $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Então a **área de  $R$**  é dada por

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| du dv \\ &= \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

# Aplicação de Gauss

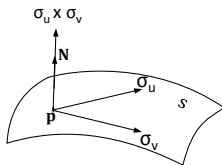


Figura: Vetor Normal.

# Aplicação de Gauss

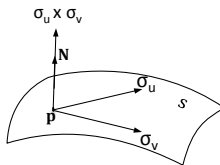
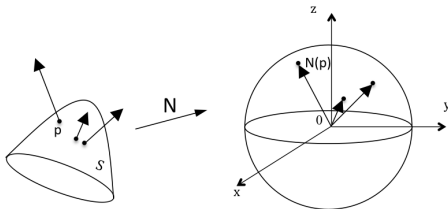


Figura: Vetor Normal.

A aplicação  $N : \sigma(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$  é chamada **aplicação normal de Gauss**.





# Derivada da Aplicação de Gauss

A derivada  $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$  é uma aplicação linear.

# Derivada da Aplicação de Gauss

A derivada  $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$  é uma aplicação linear.

**Exemplo:** Seja  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz + d = 0\}$  um plano. O vetor normal em  $p \in P$  é dado por

$$\mathbf{N} = (a, b, c) / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e é constante, logo  $d\mathbf{N}_p = 0$ .

# Aplicação de Gauss

**Definição:** Seja  $p \in S$  e seja  $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado **curvatura Gaussiana**  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado de **curvatura média**  $H$  de  $S$  em  $p$ .

# Aplicação de Gauss

**Definição:** Seja  $p \in S$  e seja  $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado **curvatura Gaussiana**  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado de **curvatura média**  $H$  de  $S$  em  $p$ .

**Definição:** A forma quadrática  $\mathcal{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em  $T_p S$  por  $\mathcal{I}_p(v) = -\langle d\mathbf{N}_p(v), v \rangle$  é chamada **segunda forma fundamental** de  $S$  em  $p$ .

# Coeficientes Segunda Forma Fundamental

$$\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) = -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle$$

## Coeficientes Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) &= -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v' \rangle\end{aligned}$$

## Coeficientes Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) &= -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v' \rangle \\ &= eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2,\end{aligned}$$

onde  $e = -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle$ ,  $f = -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle$  e  $g = -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle$  são chamados coeficientes da segunda forma fundamental.

# Interpretação da Segunda Forma Fundamental

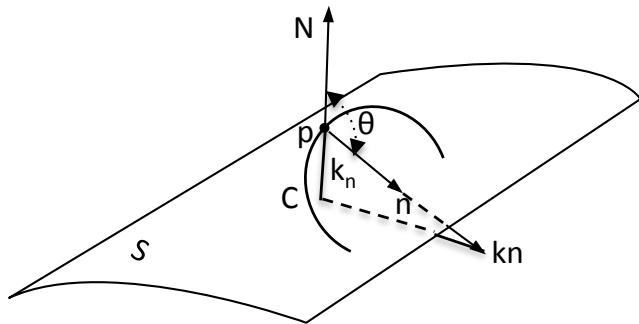


Figura: Curvatura normal.

$$\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) = \kappa_n(p).$$



## Curvaturas Principais

Como  $d\mathbf{N}_p$  é uma aplicação auto-adjunta sabemos pelo teorema espectral que existe uma base  $\{e_1, e_2\}$  ortonormal de  $T_p S$  tal que

$$d\mathbf{N}_p(e_1) = -k_1 e_1 \text{ e } d\mathbf{N}_p(e_2) = -k_2 e_2.$$



# Cálculo das Curvaturas

Vimos que  $d_p \mathbf{N} : T_p S \rightarrow T_p S \Rightarrow \exists (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$  tais que

$$\mathbf{N}_u = a_{11}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{12}\sigma_{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{N}_v = a_{21}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{22}\sigma_{\mathbf{v}}.$$

# Cálculo das Curvaturas

Vimos que  $d_p \mathbf{N} : T_p S \rightarrow T_p S \Rightarrow \exists (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$  tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= a_{11}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{12}\sigma_{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{N}_v &= a_{21}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{22}\sigma_{\mathbf{v}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Tomando o produto interno de cada uma das igualdades da expressão (1) por  $\sigma_{\mathbf{u}}$  e  $\sigma_{\mathbf{v}}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_u \rangle &= a_{11}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{12}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_v \rangle &= a_{21}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{22}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_v \rangle &= a_{21}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{22}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_u \rangle &= a_{11}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{12}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

# Cálculo das Curvaturas

Como  $\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N} \rangle = 0 = \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N} \rangle$ , temos

$$\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_u \rangle = -\langle \sigma_{uu}, \mathbf{N} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_u \rangle = -\langle \sigma_{uv}, \mathbf{N} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle \sigma_{vv}, \mathbf{N} \rangle.$$

# Cálculo das Curvaturas

Como  $\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N} \rangle = 0 = \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N} \rangle$ , temos

$$\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_u \rangle = -\langle \sigma_{uu}, \mathbf{N} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_u \rangle = -\langle \sigma_{uv}, \mathbf{N} \rangle,$$

$$\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle \sigma_{vv}, \mathbf{N} \rangle.$$

Assim,

$$e = -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{uu} \rangle,$$

$$f = -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{vu} \rangle,$$

$$g = -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{vv} \rangle.$$

# Cálculo das Curvaturas

Usando as equações (2), segue que

$$-f = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_v \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G,$$

$$-f = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_u \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{22} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = a_{21}E + a_{22}F,$$

$$-e = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_u \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F,$$

$$-g = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_v \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{22} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{21}F + a_{22}G,$$

onde  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$ ,  $F = \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle$  e  $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$  são os coeficientes da primeira forma fundamental.

# Cálculo das Curvaturas

Usando as equações (2), segue que

$$-f = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_v \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G,$$

$$-f = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_u \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{22} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = a_{21}E + a_{22}F,$$

$$-e = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_u \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F,$$

$$-g = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_v \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{22} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{21}F + a_{22}G,$$

onde  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$ ,  $F = \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle$  e  $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$  são os coeficientes da primeira forma fundamental. Em termos de matrizes

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$



# Cálculo das Curvaturas

Usando as equações (2), segue que

$$-f = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_v \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G,$$

$$-f = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_u \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{22} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = a_{21}E + a_{22}F,$$

$$-e = \langle \mathbf{N}_u, \sigma_u \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F,$$

$$-g = \langle \mathbf{N}_v, \sigma_v \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{22} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{21}F + a_{22}G,$$

onde  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$ ,  $F = \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle$  e  $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$  são os coeficientes da primeira forma fundamental. Em termos de matrizes

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Em particular temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

# Cálculo das Curvaturas

$$K(p) = \det(a_{i,j}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(\mathcal{I}_p)}{\det(I_p)}.$$

# Cálculo das Curvaturas

$$K(p) = \det(a_{i,j}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(\mathcal{I}_p)}{\det(I_p)}.$$

As **curvaturas principais**  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem à equação

$$d\mathbf{N}(v) = -k(v) = -kI(v), \text{ para algum } v \in T_pS - \{0\},$$

onde  $I : T_pS \rightarrow T_pS$  é a aplicação identidade.

# Cálculo das Curvaturas

$$K(p) = \det(a_{i,j}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(\mathcal{I}_p)}{\det(I_p)}.$$

As **curvaturas principais**  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem à equação

$$d\mathbf{N}(v) = -k(v) = -kI(v), \text{ para algum } v \in T_pS - \{0\},$$

onde  $I : T_pS \rightarrow T_pS$  é a aplicação identidade. Por definição de autovalores temos que a aplicação linear  $d\mathbf{N} + kI$  não é invertível.

# Cálculo das Curvaturas

Logo,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0.$$

# Cálculo das Curvaturas

Logo,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0.$$

Isto é equivalente a:

$$k^2 + k \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{tr(A)} + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{det(A)} = 0,$$

aqui  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ , obtemos

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2}tr(A) = -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

# Exemplos

- ▶ **Plano** Vimos anteriormente que  $d\mathbf{N} = 0$ . Logo,  $K = H = 0$ .

# Exemplos

- ▶ **Plano** Vimos anteriormente que  $d\mathbf{N} = 0$ . Logo,  $K = H = 0$ .
- ▶ **Esfera** Considere a parametrização da esfera

$$\sigma(\theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta),$$

$$0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$e = -r$ ,  $f = 0$  e  $g = -r \sin^2(\theta)$ . Logo, as curvaturas

Gaussiana e média, respectivamente, são  $K = r^{-2}$  e  $H = r^{-1}$ .



Fim da parte I

## Parte II: Superfícies Implícitas

**Definição:** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto e seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  aplicação diferenciável e seja  $a \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $a$  é um valor regular de  $f$  se, para cada  $p \in U$  com  $f(p) = a$ , temos  $\nabla f(p) \neq 0$ .

## Parte II: Superfícies Implícitas

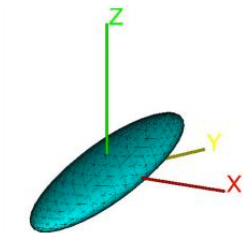
**Definição:** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto e seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  aplicação diferenciável e seja  $a \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $a$  é um valor regular de  $f$  se, para cada  $p \in U$  com  $f(p) = a$ , temos  $\nabla f(p) \neq 0$ .

### Proposição

*Seja  $a \in \mathbb{R}$  um valor regular de uma função diferenciável, onde  $U$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Se  $S = f^{-1}(a)$  é um conjunto não-vazio, então  $S$  é uma superfície.*

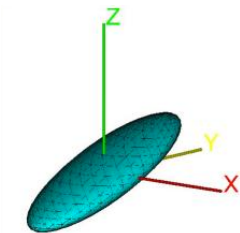
## Exemplo

O elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  é uma superfície regular.



## Exemplo

O elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  é uma superfície regular.



De fato, é o conjunto  $f^{-1}(0)$ , onde

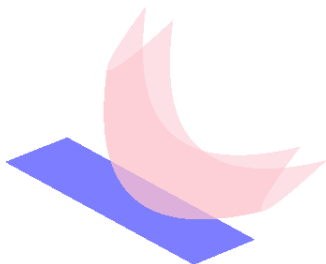
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

0 é um valor regular da função  $f$ , pois,

$$(f_x, f_y, f_z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = \mathbf{0},$$

mas  $\mathbf{0} \notin f^{-1}(0)$ .

# Plano tangente

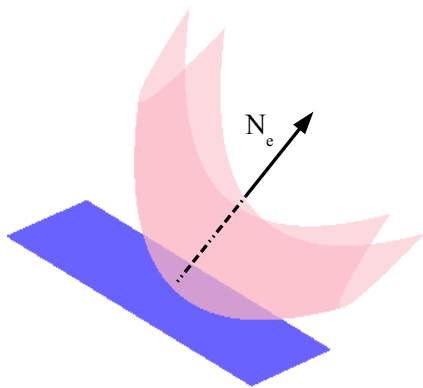


$$S = f^{-1}(a), a \text{ valor regular de } f$$



$$T_p S = \ker((df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}), \forall p \in S.$$

# Vetor Normal



$\nabla f(p)$  é ortogonal a  $T_p S$ .

# Superfície Implícita

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}, p \in S \text{ tal que } \nabla f(p) \neq 0$$



$$f_z(p) \neq 0, s.p.g.$$



Localmente a superfície pode ser vista como um gráfico

$$\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}.$$



# Primeira Forma Fundamental; Normal Euclidiano

Considere a parametrização  $X(x, y) = (x, y, g(x, y))$ ,



Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2}, \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2}.$$

# Primeira Forma Fundamental; Normal Euclidiano

Considere a parametrização  $X(x, y) = (x, y, g(x, y))$ ,



Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2}, \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2}. \quad (3)$$

O vetor normal é

$$\mathbf{N} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} = (f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^{-1/2} (f_x, f_y, f_z). \quad (4)$$

## Segunda Forma Fundamental

Os coeficientes da segunda forma fundamental  $e$ ,  $f$  e  $g$  são

$$\begin{aligned}e &= \langle N, (0, 0, g_{xx}) \rangle = -\frac{f_{xx}f_z^2 - 2f_{xz}f_xf_z + f_{zz}f_x^2}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}}, \\f &= \langle N, (0, 0, g_{xy}) \rangle = -\frac{f_{xy}f_z^2 - f_zf_{yz}f_x - f_zf_yf_{xz} + f_yf_{zz}f_x}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}}, \\g &= \langle N, (0, 0, g_{yy}) \rangle = -\frac{f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_yf_z + f_{zz}f_y^2}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}}.\end{aligned}$$

# Curvatura Gaussiana

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{(f_{zz}f_{yy} - f_{yz}^2)f_x^2 + (-2f_{xy}f_{zz} + 2f_{xz}f_{yz})f_yf_x}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\ &\quad + \frac{2(-f_{xz}f_{yy} + f_{xy}f_{yz})f_xf_z + (f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2)f_y^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\ &\quad + \frac{-2(-f_{xz}f_{xy} + f_{xx}f_{yz})f_yf_z + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)f_z^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \end{aligned}$$

## Exemplo: esfera

Considere a esfera  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ . Neste caso,

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2} = \frac{xy}{z^2}, \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

## Exemplo: esfera

Considere a esfera  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ . Neste caso,

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2} = \frac{xy}{z^2}, \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2}, \quad f = -\frac{xy}{z^2 r^2}, \quad g = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2},$$

## Exemplo: esfera

Considere a esfera  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ . Neste caso,

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2} = \frac{xy}{z^2}, \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2}, \quad f = -\frac{xy}{z^2 r^2}, \quad g = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2},$$

$\Downarrow$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}.$$

# Curvatura Média

Utilizando os cálculos anteriores, obtemos

$$H = \frac{(f_y^2 + f_z^2)f_{xx} + (f_x^2 + f_z^2)f_{yy} + (f_x^2 + f_y^2)f_{zz}}{2|\nabla f|^3} - \frac{(f_x f_y f_{xy} + f_x f_z f_{xz} + f_y f_z f_{yz})}{|\nabla f|^3}.$$



# Curvatura Média

Utilizando os cálculos anteriores, obtemos

$$H = \frac{(f_y^2 + f_z^2)f_{xx} + (f_x^2 + f_z^2)f_{yy} + (f_x^2 + f_y^2)f_{zz}}{2|\nabla f|^3} - \frac{(f_x f_y f_{xy} + f_x f_z f_{xz} + f_y f_z f_{yz})}{|\nabla f|^3}.$$

Em particular a curvatura média da esfera é  $r^{-1}$

## Exemplo: Superfície não orientável

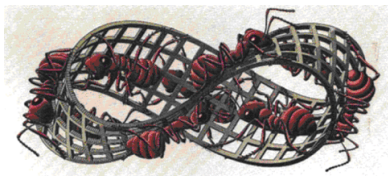


Figura: Faixa de Möbius.

## Exemplo: Superfície não orientável

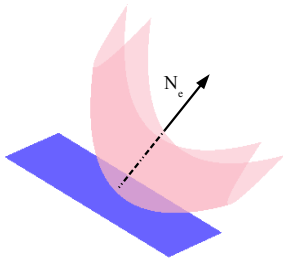


Figura: Faixa de Möbius.



# Orientação de Superfícies

**Exemplo:** As superfícies implícitas são orientáveis, pois o campo  $\mathbf{N}(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$  é uma orientação de  $f^{-1}(a)$ .



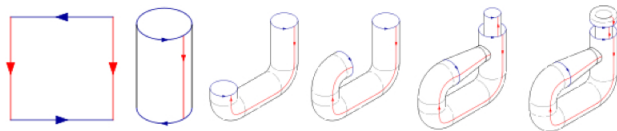


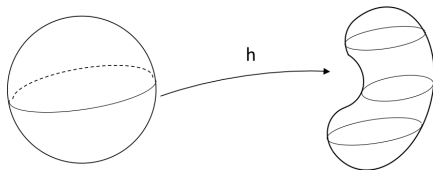
Figura: Construcao da garrafa de Klein.

# Superfícies Topologicamente Equivalentes

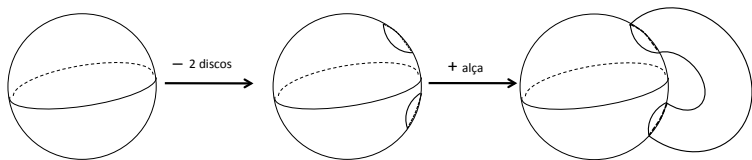
**Definição:** Dizemos que duas superfícies  $M$  e  $N$  são **topologicamente equivalentes** se existe  $h : M \rightarrow N$  homeomorfismo.

# Superfícies Topologicamente Equivalentes

**Definição:** Dizemos que duas superfícies  $M$  e  $N$  são **topologicamente equivalentes** se existe  $h : M \rightarrow N$  homeomorfismo.



**Figura:** Superfícies topologicamente equivalentes.



**Figura:** Esfera com uma alça.



# Superfícies Topologicamente Equivalentes

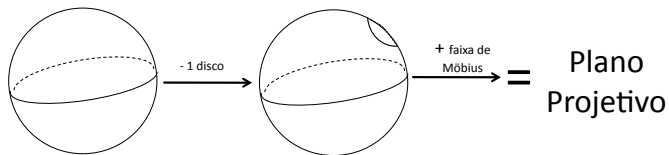


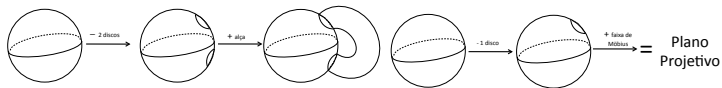
Figura: Construção plano projetivo.

# Teorema da Classificação de Superfícies

## Teorema

*Qualquer superfície limitada, sem bordo e conexa é homeomorfa a:*

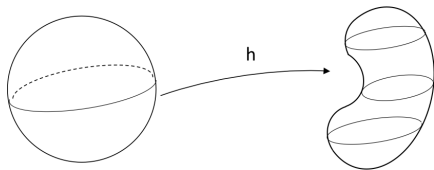
- Esfera.
- Esfera com um número finito  $g$  de alças.
- Esfera com um número finito  $g$  de discos removidos e substituídos por  $g$  faixas de Möbius.



# Característica de Euler

**Definição:** A característica de Euler  $\chi$  para superfícies limitadas, sem bordo e conexas é definida por

- $\chi = 2$ , se a superfície é uma esfera.
- $\chi = 2 - 2g$ , se a superfície é uma esfera com um número finito  $g$  de alças.
- $\chi = 2 - g$ , se a superfície é uma esfera com um número finito  $g$  de discos removidos e substituídos por  $g$  faixas de Möbius.



**Figura:** Superfícies topologicamente equivalentes.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO.