Sociedade Brasileira de Matemática

I COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE

28/02 a 04/03 de 2011

Departamento de Matemática - Universidade Federal de Sergipe

Curvas e Superfícies Implícitas:

Noções de Geometrias Diferencial e Discreta.

Maria Andrade[1],

Allyson Cabral[1],

Vinícius Mello[2], Adelailson Peixoto[3] e Thomas Lewiner[1]

[1] Departamento de Matemática, PUC-Rio,

[2] Instituto de Matemática, UFBA,

[3] Instituto de Matemática, UFAL.

Revisão

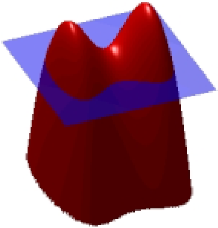


Figura: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = a\}$

Revisão

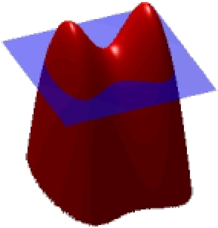
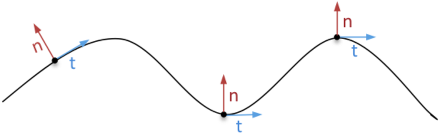


Figura: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = a\}$



Revisão

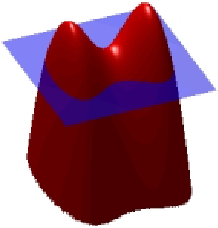
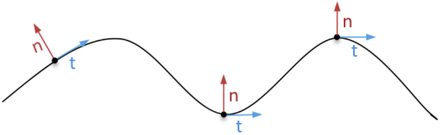
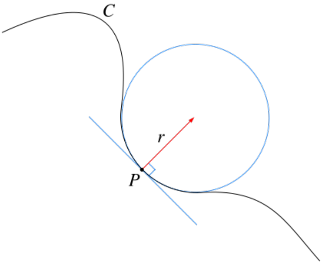
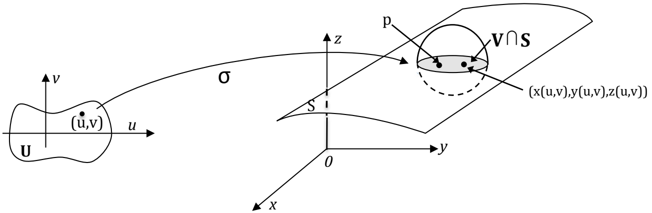


Figura: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = a\}$

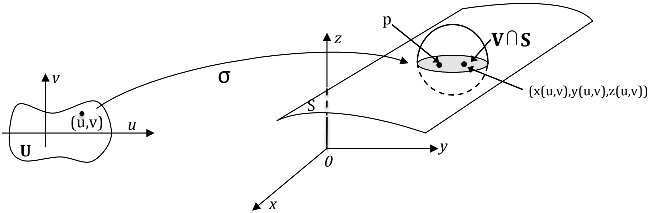


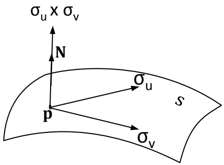


Revisão

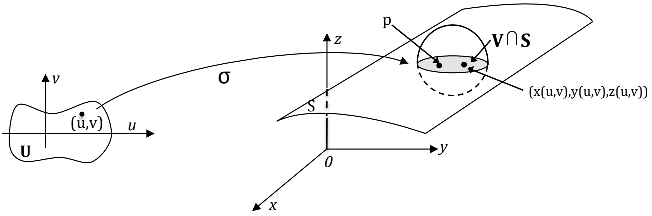


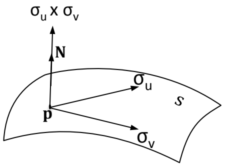
Revisão

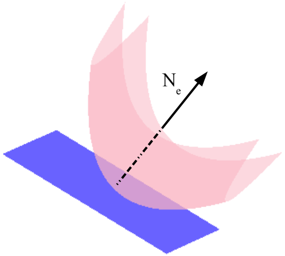




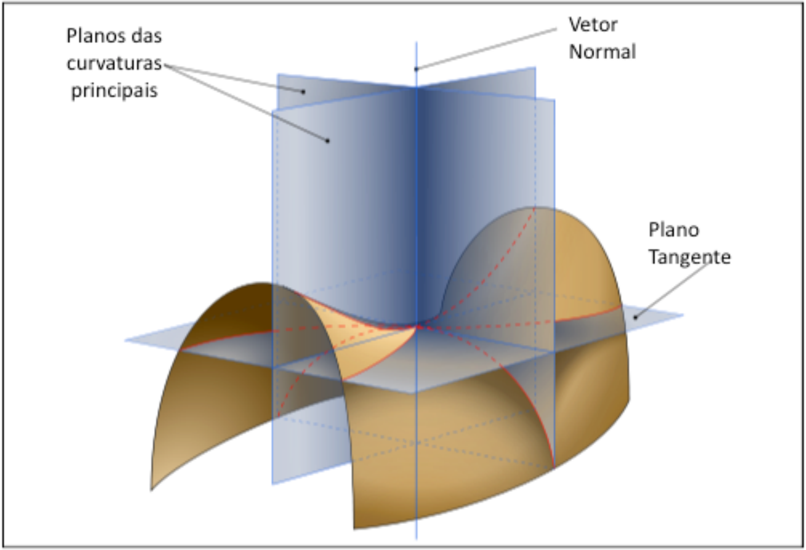
Revisão


p
V∩S
z
σ
v
(u,v)
u
U
S
(x(u,v),y(u,v),z(u,v))
y
0
x

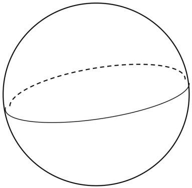

$\sigma_u \times \sigma_v$
N
σ_u
p
S
σ_v

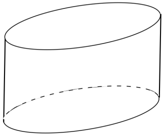

N_e

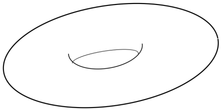
Revisão

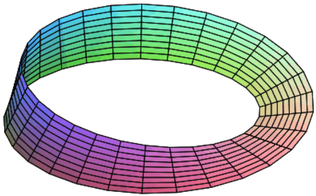

Planos das curvaturas principais
Vetor Normal
Plano Tangente

Parte II: Superfícies Implícitas e Noção de Topologia









Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}$ aplicação diferenciável e seja $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um valor regular de f se, para cada $p \in U$ com $f(p) = a$, temos $\nabla f(p) \neq 0$.

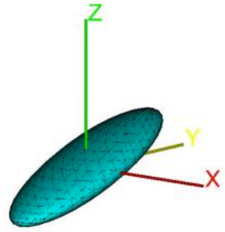
Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}$ aplicação diferenciável e seja $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um valor regular de f se, para cada $p \in U$ com $f(p) = a$, temos $\nabla f(p) \neq 0$.

Proposição

Seja $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma função diferenciável, onde U é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. Se $S = f^{-1}(a)$ é um conjunto não-vazio, então S é uma superfície.

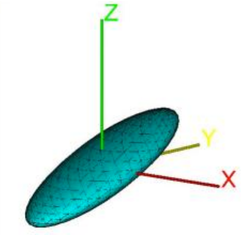
Exemplo

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície regular.



Exemplo

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície regular.



De fato, é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

0 é um valor regular da função f, pois,

$$(f_x, f_y, f_z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = \mathbf{0},$$

mas $\mathbf{0} \notin f^{-1}(0)$.

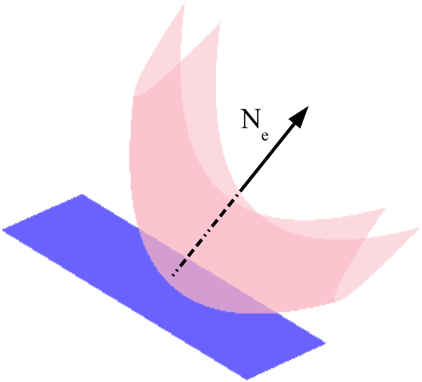
Plano tangente

$$S = f^{-1}(a), a \ valor \ regular \ de \ f$$

$$\Downarrow$$

$$T_pS = ker((df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}), \forall p \in S.$$

Vetor Normal



$\nabla f(p)$ é ortogonal a T_pS.

Superfície Implícita

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, $p \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$

Superfície Implícita

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0\},\ p \in S \text{ tal que } \nabla f(p) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_z(p) \neq 0, s.p.g.$$

Superfície Implícita

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, $p \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$f_z(p) \neq 0, s.p.g.$$

$$\Downarrow$$

Localmente a superfície pode ser vista como um gráfico

$$\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y))/(x, y) \in U\}.$$

Primeira Forma Fundamental; Normal Euclidiano

Considere a parametrização $X(x, y) = (x, y, g(x, y))$,

$$\Downarrow$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \frac{{f_z}^2 + {f_x}^2}{{f_z}^2}, \qquad F = \frac{f_x f_y}{{f_z}^2}, \qquad G = \frac{{f_z}^2 + {f_y}^2}{{f_z}^2}.$$

Primeira Forma Fundamental; Normal Euclidiano

Considere a parametrização $X(x, y) = (x, y, g(x, y))$,

$$\Downarrow$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \frac{{f_z}^2 + {f_x}^2}{{f_z}^2}, \qquad F = \frac{f_x f_y}{{f_z}^2}, \qquad G = \frac{{f_z}^2 + {f_y}^2}{{f_z}^2}. \tag{1}$$

O vetor normal é

$$\mathbf{N} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} = \left({f_z}^2 + {f_x}^2 + {f_y}^2\right)^{-1/2} (f_x, f_y, f_z) \ . \tag{2}$$

Segunda Forma Fundamental

Os coeficientes da segunda forma fundamental $e,\ f$ e g são

$$\begin{aligned} e &= \langle N,(0,0,g_{xx})\rangle = -\frac{f_{xx}{f_z}^2-2\,f_{xz}f_xf_z+f_{zz}{f_x}^2}{{f_z}^2\sqrt{{f_z}^2+{f_x}^2+{f_y}^2}}, \\ f &= \langle N,(0,0,g_{xy})\rangle = -\frac{f_{xy}{f_z}^2-f_zf_{yz}f_x-f_zf_yf_{xz}+f_yf_{zz}f_x}{{f_z}^2\sqrt{{f_z}^2+{f_x}^2+{f_y}^2}}, \\ g &= \langle N,(0,0,g_{yy})\rangle = -\frac{f_{yy}{f_z}^2-2\,f_{yz}f_yf_z+f_{zz}{f_y}^2}{{f_z}^2\sqrt{{f_z}^2+{f_x}^2+{f_y}^2}}. \end{aligned}$$

Curvatura Gaussiana

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{\left(f_{zz} f_{yy} - f_{yz}^2\right) f_x^2 + \left(-2 f_{xy} f_{zz} + 2 f_{xz} f_{yz}\right) f_y f_x}{\left(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2\right)^2} \\
&+ \frac{2 \left(-f_{xz} f_{yy} + f_{xy} f_{yz}\right) f_x f_z + \left(f_{xx} f_{zz} - {f_{xz}}^2\right) {f_y}^2}{\left(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2\right)^2} \\
&+ \frac{-2 \left(-f_{xz} f_{xy} + f_{xx} f_{yz}\right) f_y f_z + \left(f_{xx} f_{yy} - {f_{xy}}^2\right) {f_z}^2}{\left(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: esfera

Considere a espera $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Neste caso,

$$E = \frac{{f_z}^2 + {f_x}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \; F = \frac{f_x f_y}{{f_z}^2} = \frac{xy}{z^2}, \; G = \frac{{f_z}^2 + {f_y}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

Exemplo: esfera

Considere a espera $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Neste caso,

$$E = \frac{{f_z}^2 + {f_x}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \ F = \frac{f_x f_y}{{f_z}^2} = \frac{xy}{z^2}, \ G = \frac{{f_z}^2 + {f_y}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2}, \ f = -\frac{xy}{z^2 r^2}, \ g = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2},$$

Exemplo: esfera

Considere a espera $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Neste caso,

$$E = \frac{{f_z}^2 + {f_x}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{x^2}{z^2}, \ F = \frac{f_x f_y}{{f_z}^2} = \frac{xy}{z^2}, \ G = \frac{{f_z}^2 + {f_y}^2}{{f_z}^2} = 1 + \frac{y^2}{z^2}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2}, \ f = -\frac{xy}{z^2 r^2}, \ g = -\frac{x^2 + z^2}{z^2 r^2},$$

$$\Downarrow$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Curvatura Média

Utilizando os cálculos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} H \quad = \quad & \frac{(f_y^2+f_z^2)f_{xx} + (f_x^2+f_z^2)f_{yy} + (f_x^2+f_y^2)f_{zz}}{2|\nabla f|^3} \\ & - \frac{(f_x f_y f_{xy} + f_x f_z f_{xz} + f_y f_z f_{yz})}{|\nabla f|^3} \ . \end{aligned}$$

Curvatura Média

Utilizando os cálculos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} H \quad = \quad & \frac{(f_y^2+f_z^2)f_{xx} + (f_x^2+f_z^2)f_{yy} + (f_x^2+f_y^2)f_{zz}}{2|\nabla f|^3} \\ & -\frac{(f_x f_y f_{xy}+f_x f_z f_{xz}+f_y f_z f_{yz})}{|\nabla f|^3} \ . \end{aligned}$$

Em particular a curvatura média da esfera é r^{-1}

Exemplo: Superfície não orientável

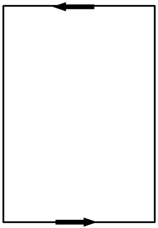


Figura: Faixa de Möbius.

Exemplo: Superfície não orientável

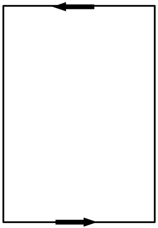
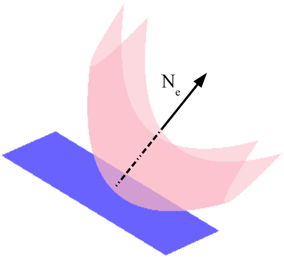


Figura: Faixa de Möbius.

Orientação de Superfícies

Exemplo: As superfícies implícitas são orientáveis, pois o campo $\mathbf{N}(p) = \frac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||}$ é uma orientação de $f^{-1}(a)$.



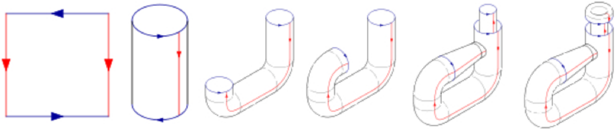


Figura: Construção da garrafa de Klein.

Superfícies Topologicamente Equivalentes

Definição: Dizemos que duas superfícies M e N são topologicamente equivalentes se existe $h : M \to N$ homeomorfismo.

Superfícies Topologicamente Equivalentes

Definição: Dizemos que duas superfícies M e N são topologicamente equivalentes se existe $h : M \to N$ homeomorfismo.

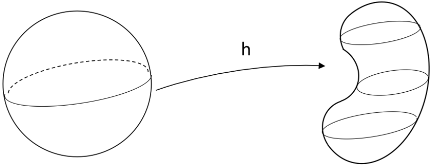


Figura: Superfícies topologicamente equivalentes.

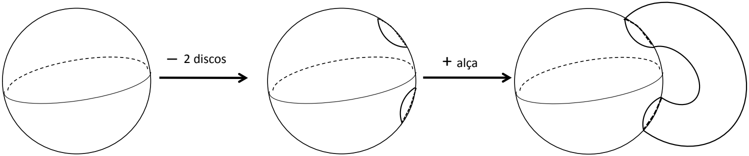


Figura: Esfera com uma alça.

Superfícies Topologicamente Equivalentes

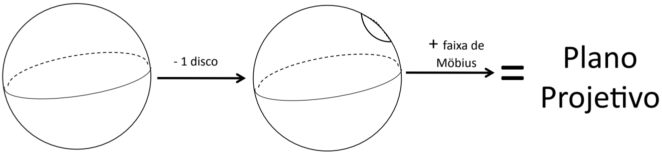


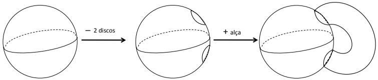
Figura: Construção plano projetivo.

Teorema da Classificação de Superfícies

Teorema

Qualquer superfície limitada, sem bordo e conexa é homeomorfa a:

- *Esfera.*
- *Esfera com um número finito g de alças.*
- *Esfera com um número finito g de discos removidos e substituídos por g faixas de Möbius.*



Característica de Euler

Definição: A característica de Euler χ para superfícies limitadas, sem bordo e conexas é definida por

- $\chi = 2$, se a superfície é uma esfera.
- $\chi = 2 - 2g$, se a superfície é uma esfera com um número finito g de alças.
- $\chi = 2 - g$, se a superfície é uma esfera com um número finito g de discos removidos e substituídos por g faixas de Möbius.

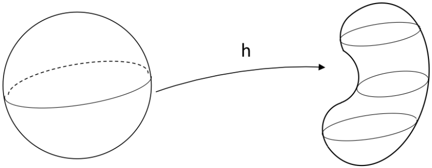


Figura: Superfícies topologicamente equivalentes.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO.