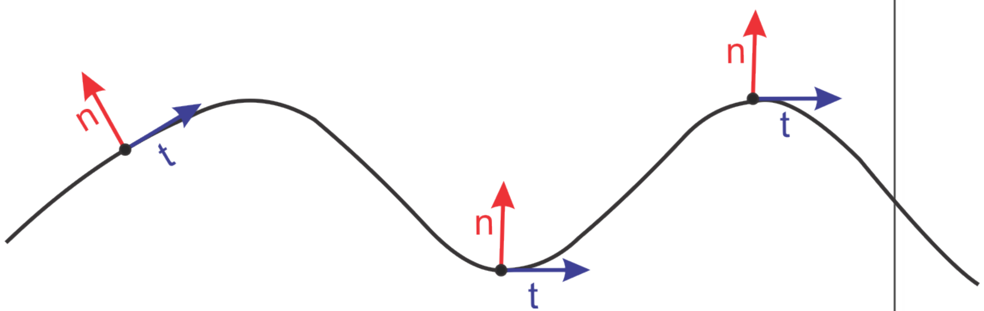
Curvas e Superfícies Implícitas:
Noções de Geometrias Diferencial e Discreta

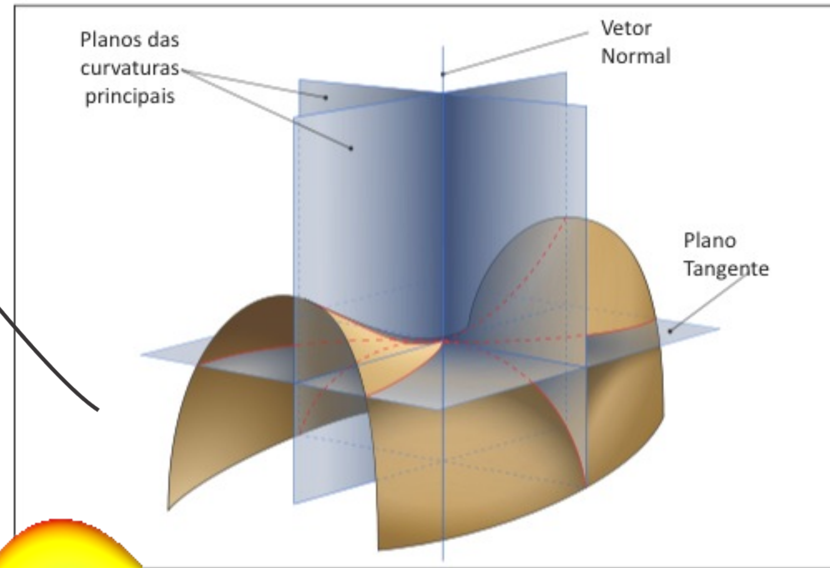
Interpolação e Derivação Discreta

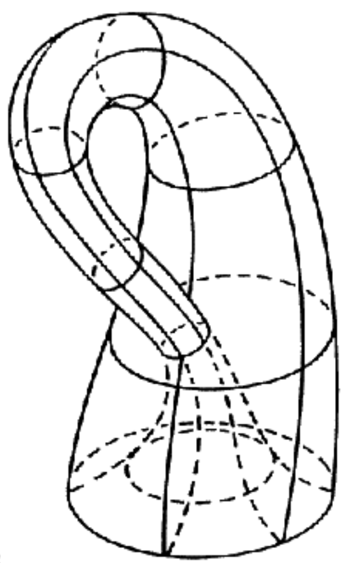
Adelailson Peixoto
Allyson Cabral
Maria Andrade
Thomas Lewiner
Vinícius Mello

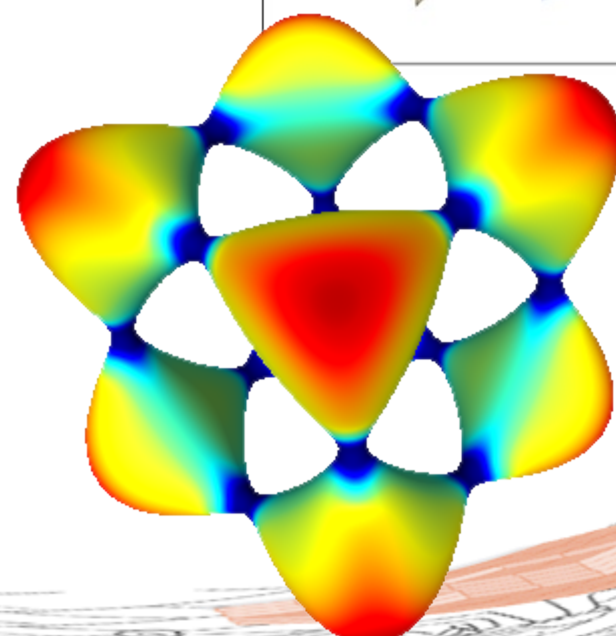
matemática
puc-rio

Aula Anterior





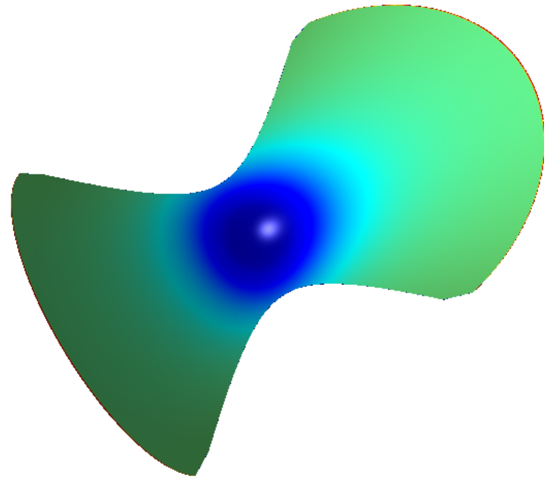


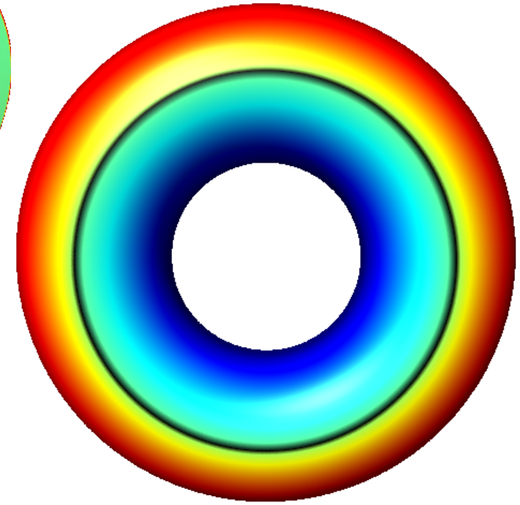


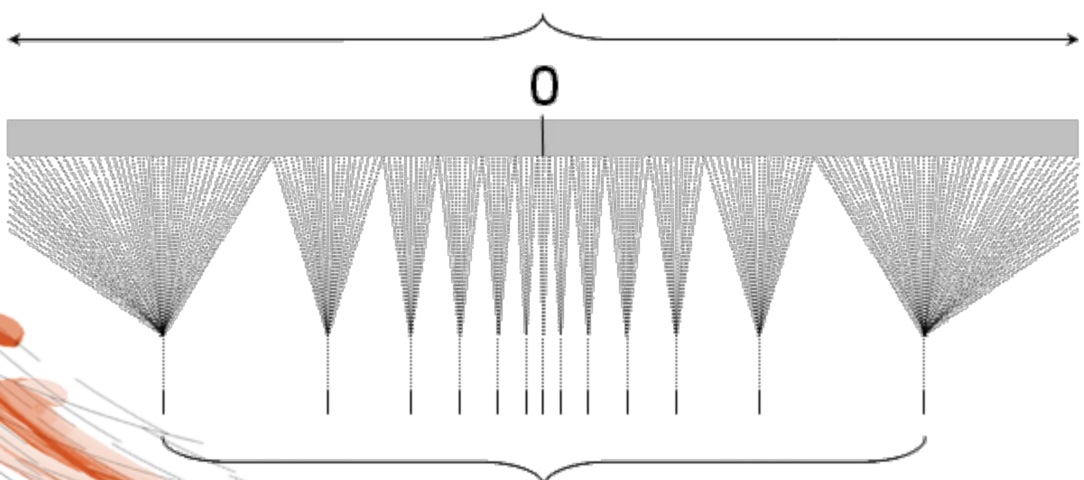
Representação no Computador

Espaço Finito

Funções e Derivadas

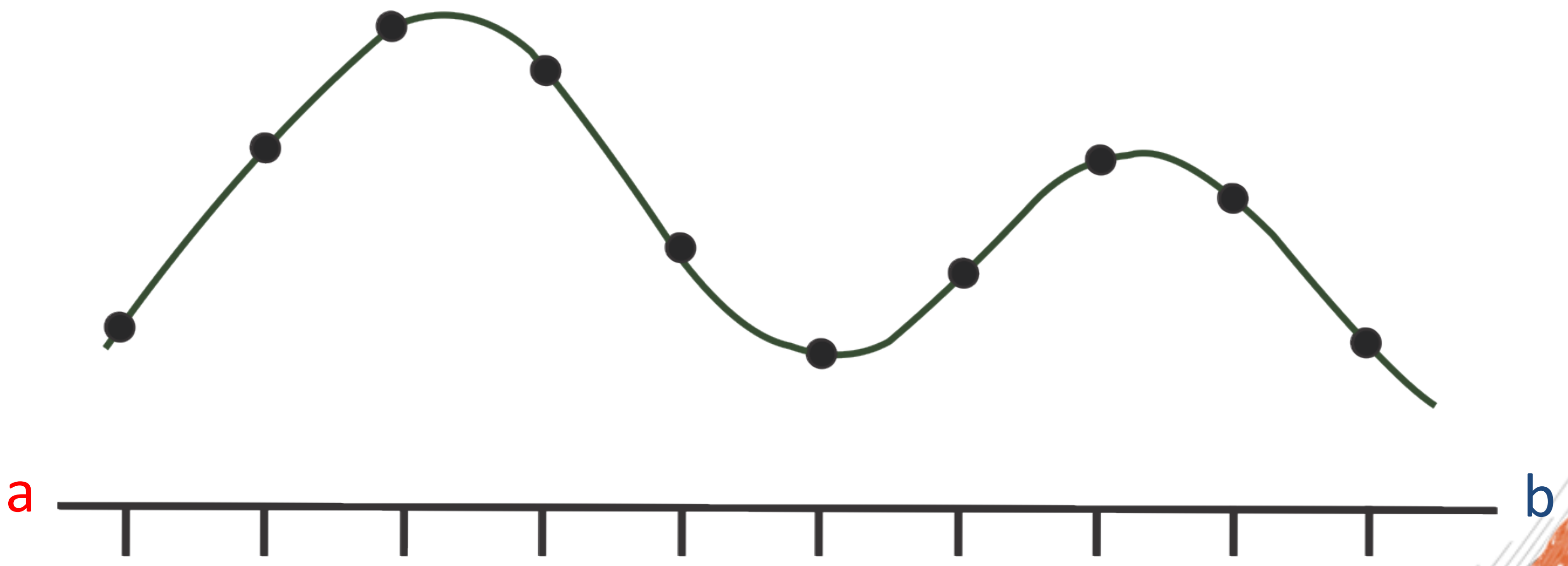




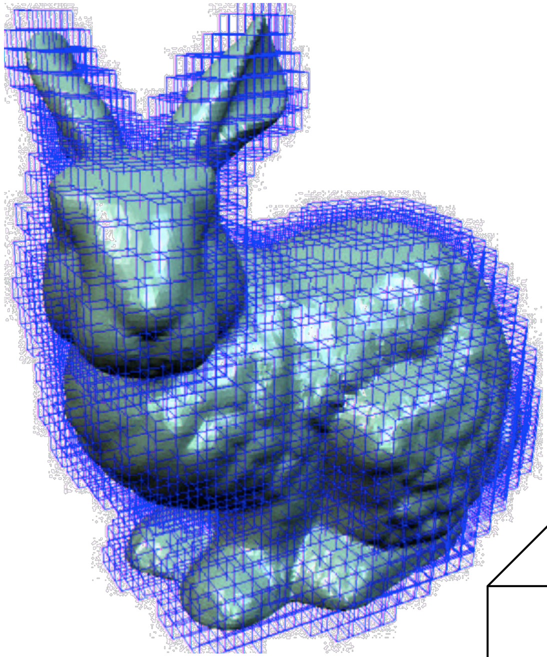


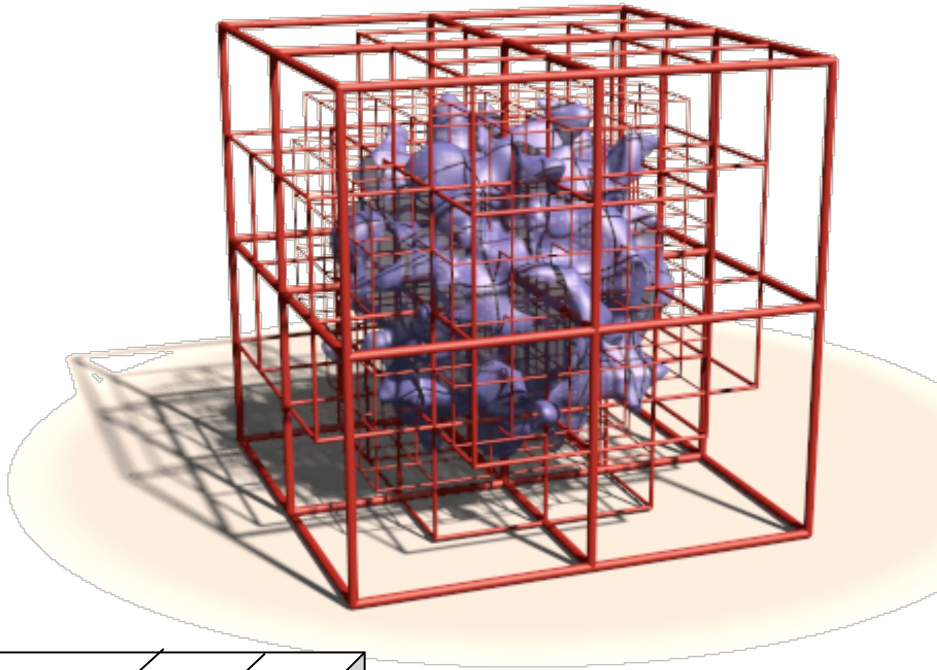
Números Reais

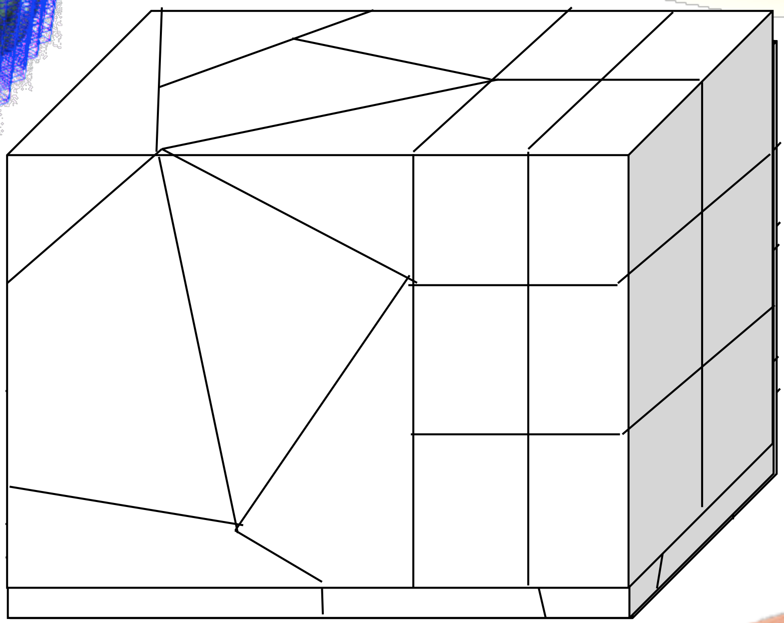
Representação no Computador



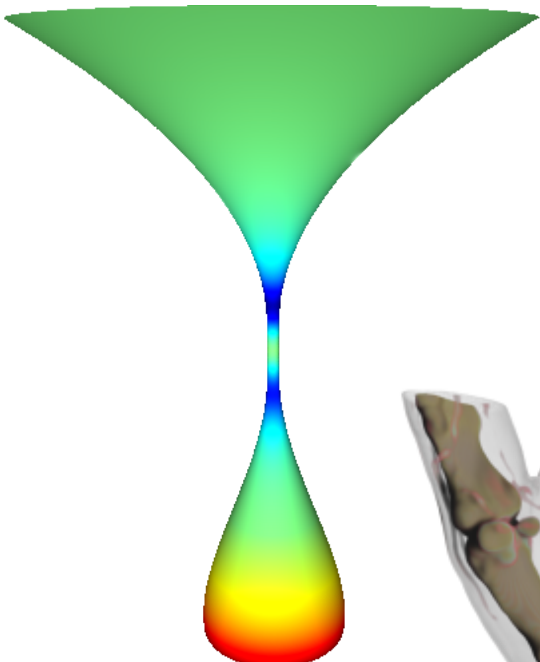
Grid

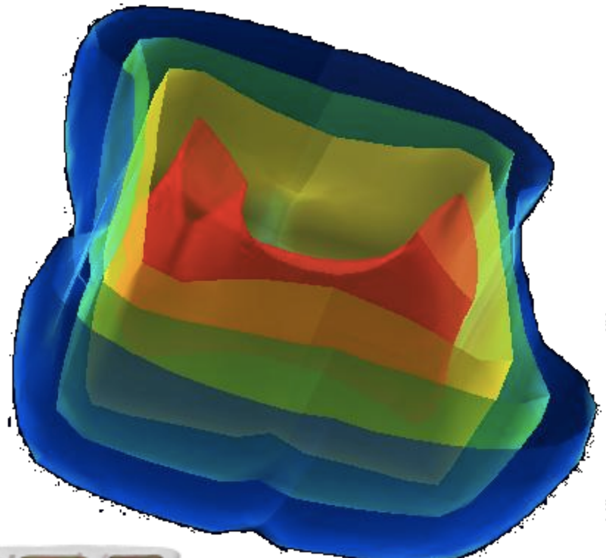


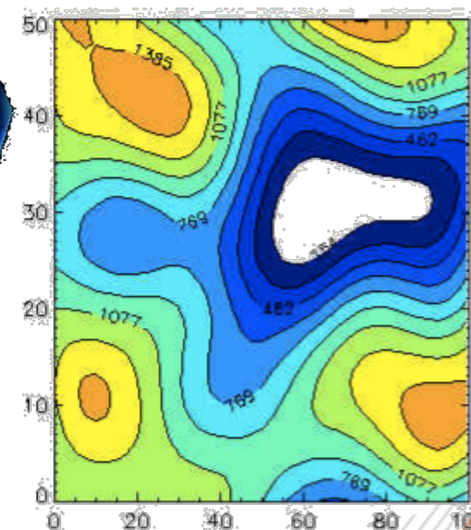




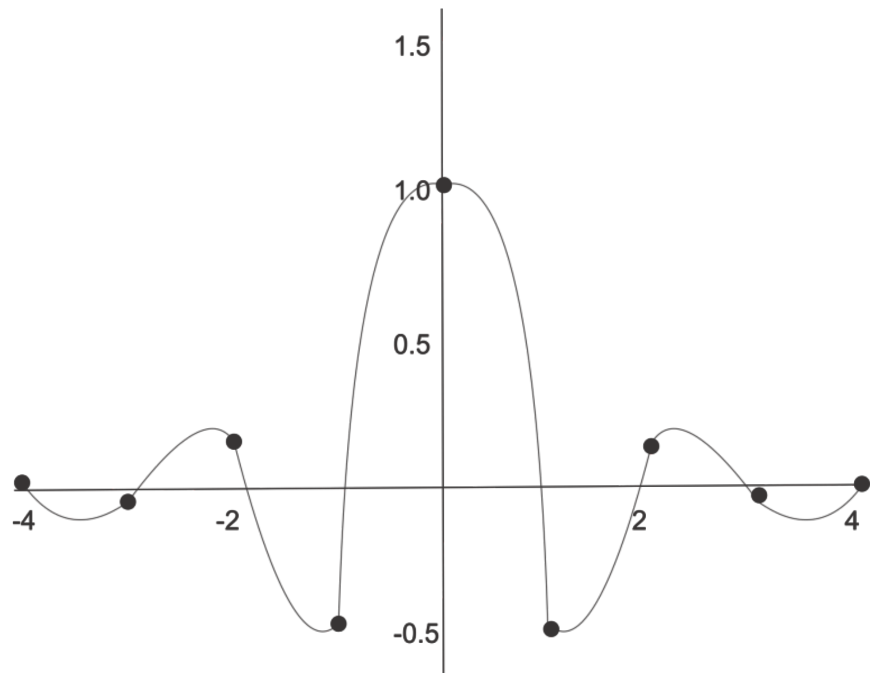
Isosuperfícies em Grid







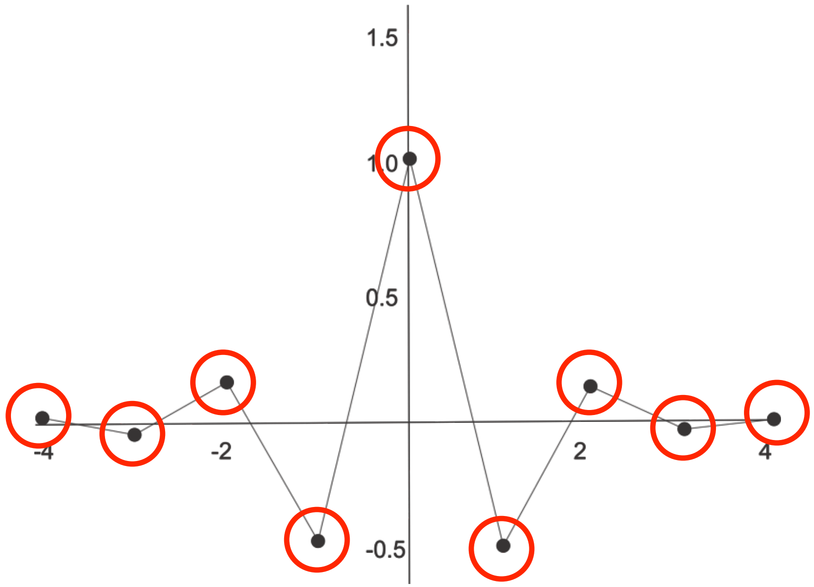
Interpolação de Sinais Discretos



Objetivo: obter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a partir de *g[k]* tal que *f(k)=g[k]* onde $k \in N$.

Interpolação Linear

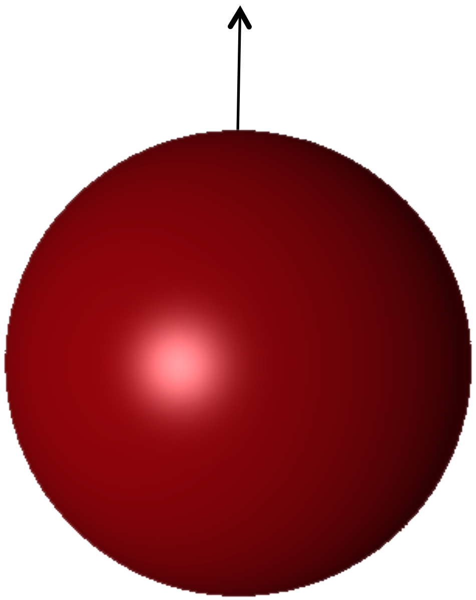
$$f(x) = (1-t)g[i] + tg[i+1],\ f(x) = (1-t)g[i] + tg[i+1]$$

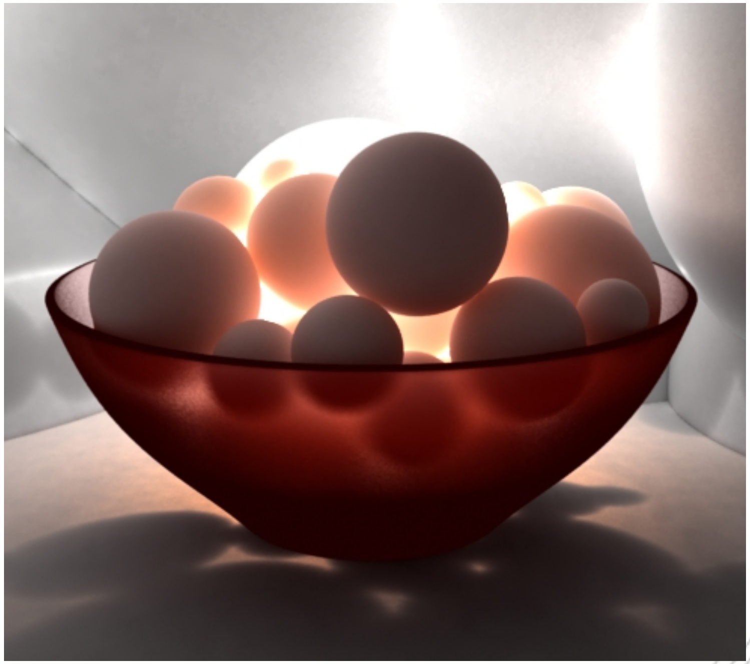


f não é diferenciável para $k \in \mathbb{N}$.

Interpolação Polinomial

Vetores Normais



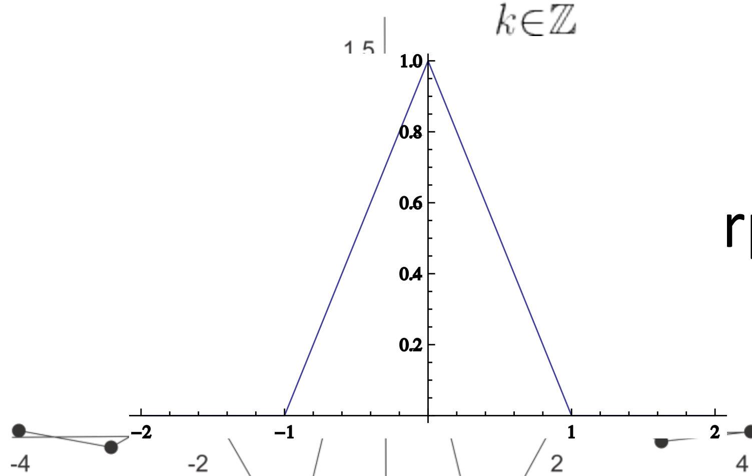


Interpolação Polinomial

Definição: o espaço das funções spline de grau *n* é o conjunto

$$s^n = \{ f \in C^{n-1} \mid f\,|_{[k,k+1]} \text{ é um polinômio de grau } n \}$$

$$\text{Se } f \in S^1, \text{ então } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] B_1(x-k)$$



rpolação Linear

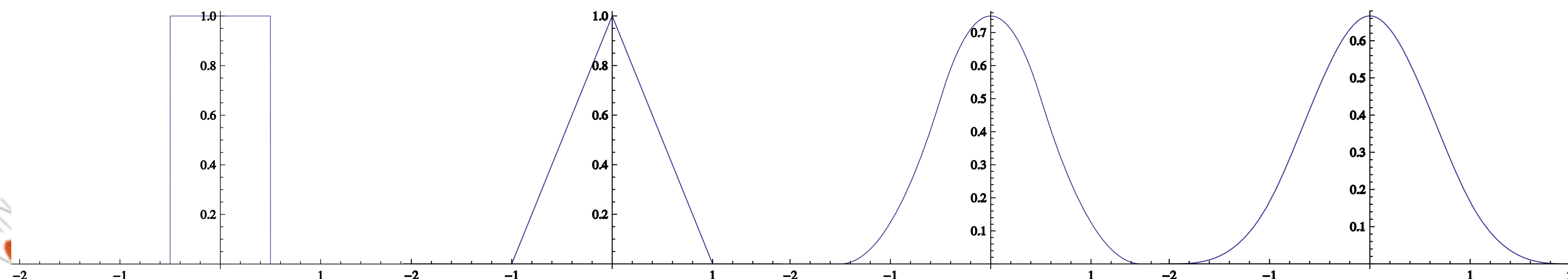
B_1 é a função *b-spline* de grau 1 e *c[k] = g[k]*

matemática puc-rio

Interpolação por Splines

Afirmação: Para cada espaço S^n *(n>1)* existe uma função b-spline de grau n, B_n, tal que $\{B_n(\cdot - k)\}_{k\in Z}$ é uma base do espaço S^n , ou seja, cada *f* pode ser escrito da forma

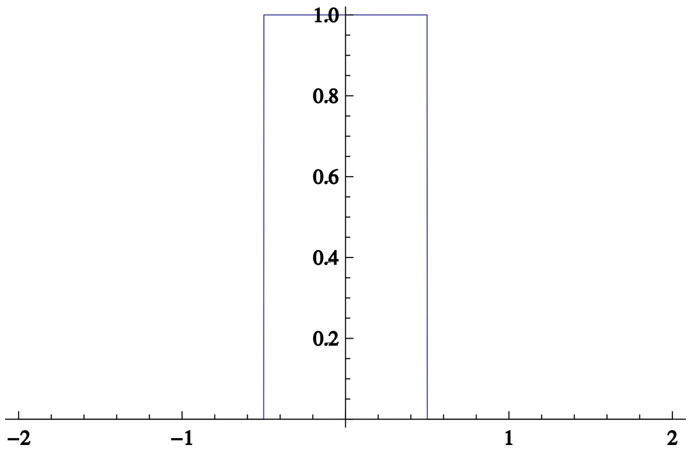
$$f(x) = \sum_{k\in Z} c[k] B_n(x-k)$$



Coeficientes *c[k]* unicamente determinados por *f*

Interpolação por Splines

Recursão $\Rightarrow$ $B_{n+1} = B_n * B_0$

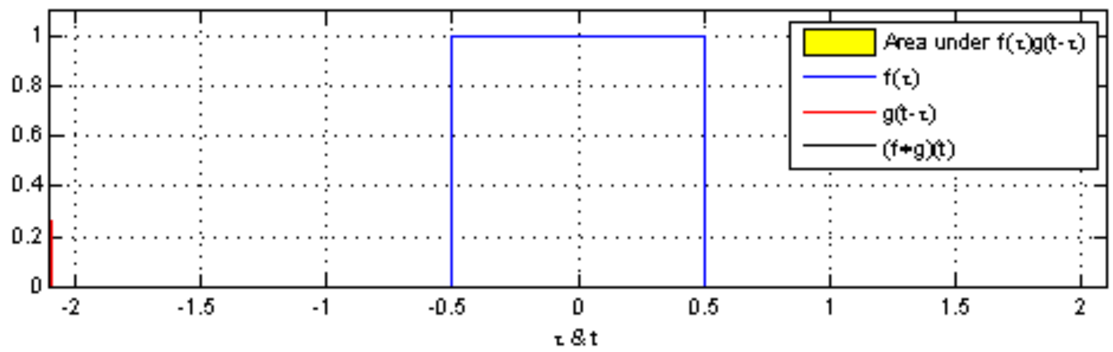


B_0

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt$$

Interpolação por Splines

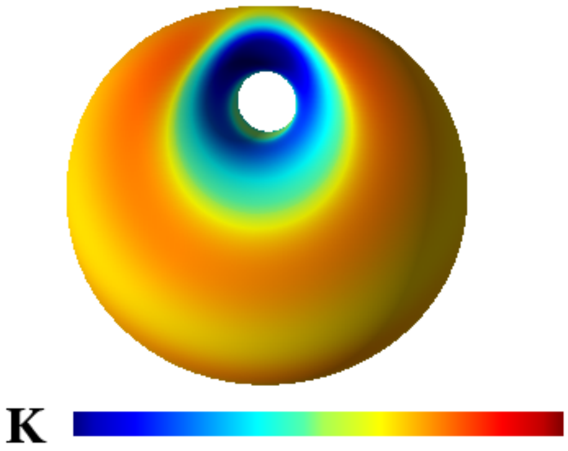
$$B_1 = B_0 * B_0$$



$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

Interpolação Local

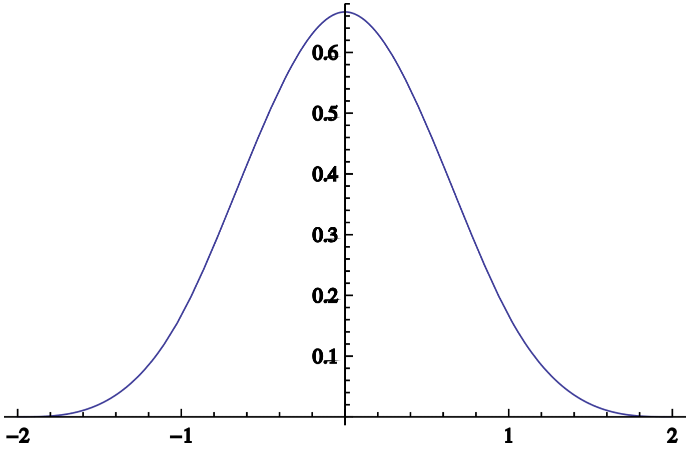
E se quisermos $f \in C^2$?



Solução: buscar *f* em S^3.

Interpolação por Splines

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se} \, |x| \geq 2 \\ \frac{1}{6} \cdot (2 - |x|)^3 & , \text{se} \, 1 \leq |x| < 2 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} |x|^2 \cdot (2 - |x|) & , \text{se} \, |x| < 1 \end{cases}$$



f(x) sofre influência de quatro funções da base $B_3(\cdot - k)$
($k = i-1, i, i+1, i+2$ onde $i = \lfloor x \rfloor$)

Interpolação por Splines

$$\text{Para } x \in \mathbb{Z} \ (k = i-1, i, i+1):$$

$$f(k) = \frac{1}{6}c[k-1] + \frac{4}{6}c[k] + \frac{1}{6}c[k+1]]$$

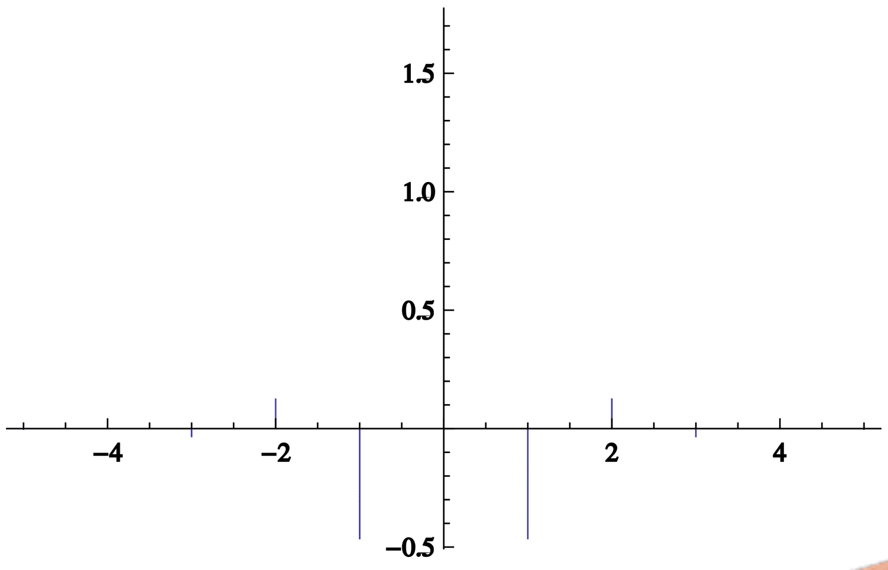
$$g[k] = \left(\left[\frac{1}{6} \frac{4}{6} \frac{1}{6} \right] \star c \right)[k],$$

$$c[k] = \left(\left[\frac{1}{6} \frac{4}{6} \frac{1}{6} \right]^{-1} \star g \right)[k],$$

Interpolação por Splines

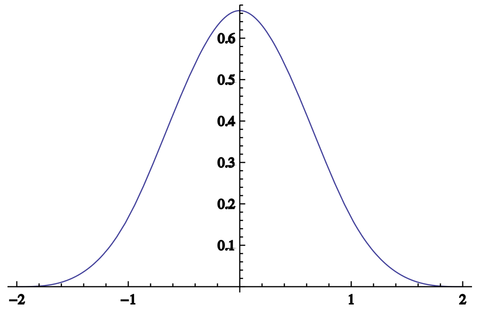
Transformada Z

$$h[k] = \left[\frac{1}{6}\,\frac{4}{6}\,\frac{1}{6}\right]^{-1} = \frac{-6z}{1-z^2}\,z^{|k|} \quad \text{com,} \qquad z = -2+\sqrt{3}$$

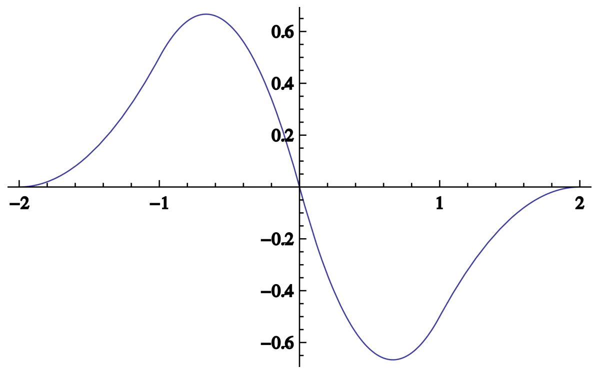


Derivação de Sinais Interpolados

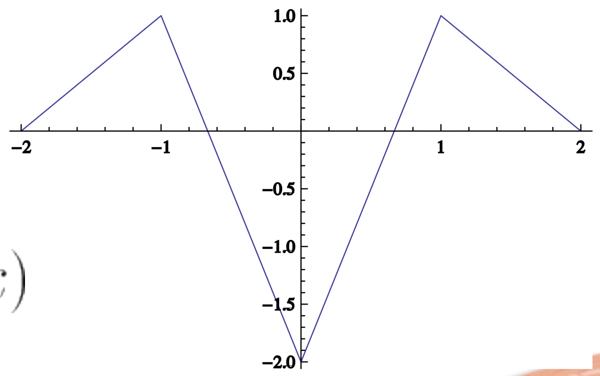
$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] B_3(x-k)$$



$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] B_3'(x-k)$$



$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] B_3''(x-k)$$



Derivação de Sinais Interpolados

Caso Tridimensional

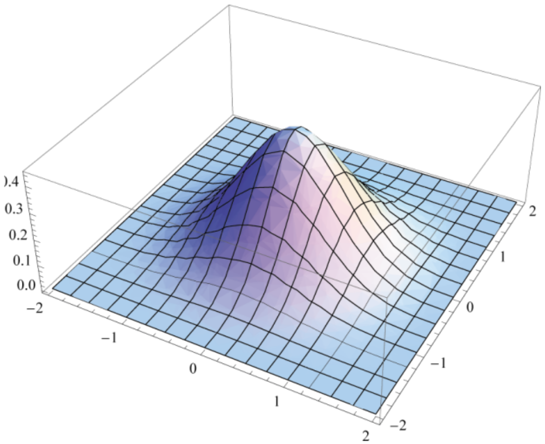
$$f(x,y,z) = \sum_{i,i,k \in \mathbb{Z}} c[i,j,k] B_3(x-i) B_3(y-j) B_3(z-k)$$

$$f_x(x,y,z) = \sum_{i,i,k \in \mathbb{Z}} c[i,j,k] B_3'(x-i) B_3(y-j) B_3(z-k)$$

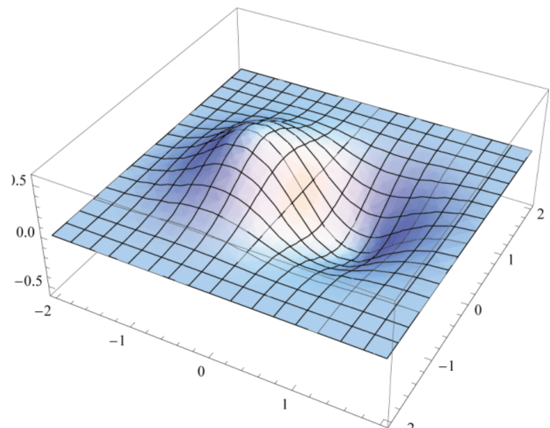
$$f_{xx}(x,y,z) = \sum_{i,i,k \in \mathbb{Z}} c[i,j,k] B_3''(x-i) B_3(y-j) B_3(z-k)$$

$$f_{xy}(x,y,z) = \sum_{i,i,k \in \mathbb{Z}} c[i,j,k] B_3'(x-i) B_3'(y-j) B_3(z-k)$$

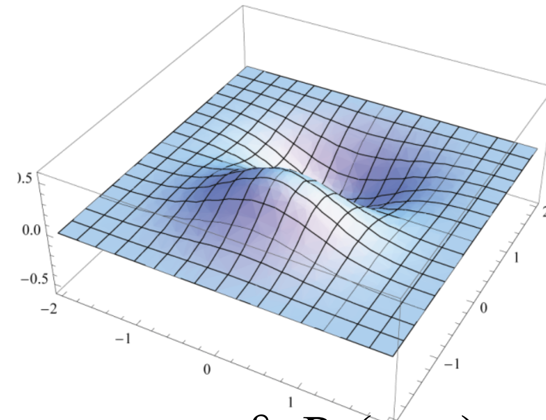
Derivação de sinais interpolados



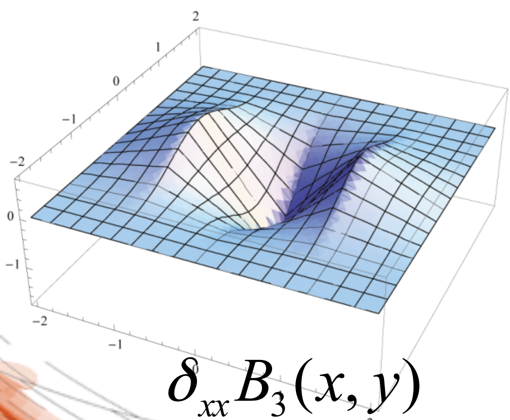
$B_3(x, y)$



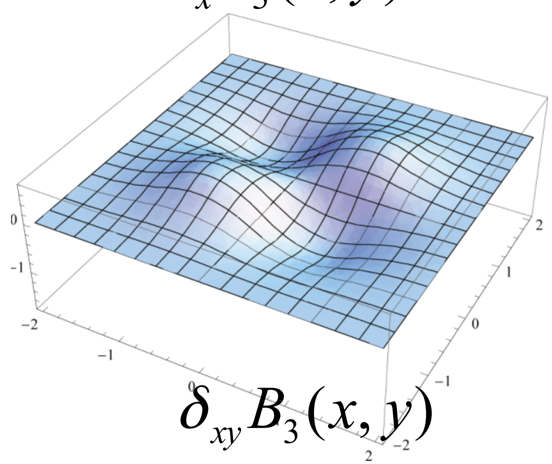
$\delta_x B_3(x, y)$



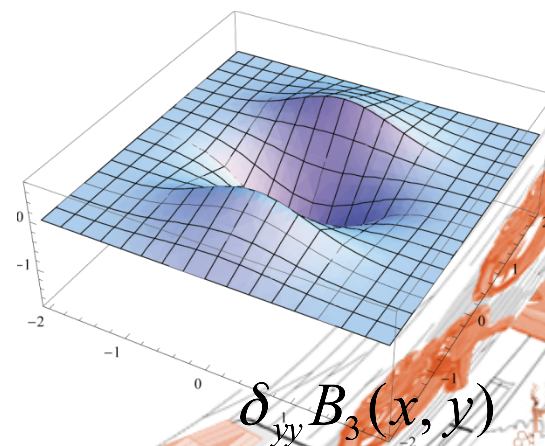
$\delta_y B_3(x, y)$



$\delta_{xx} B_3(x, y)$



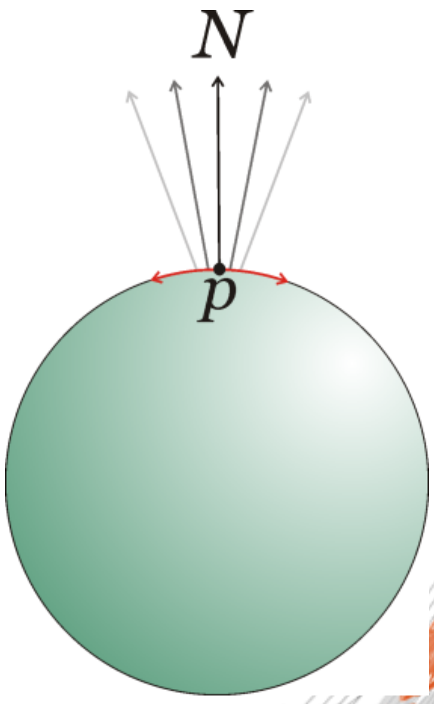
$\delta_{xy} B_3(x, y)$



$\delta_{yy} B_3(x, y)$

Curvatura da Interpolção por Splines

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \qquad \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$



$$dN = -\frac{1}{\|\nabla f\|}(\mathrm{I} - \mathrm{N}\cdot\mathrm{N}^{\mathrm{T}})\mathrm{H}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{I} - \mathrm{N}\mathrm{N}^{\mathrm{T}} \qquad d\mathrm{N} = -\frac{1}{\|\nabla f\|}\mathrm{P}\cdot\mathrm{H}$$

Curvatura da Interpolção por Splines

Base Ortonormal

$$\{v_1, v_2, \mathrm{N}\}$$

$$\Rightarrow \quad d\mathrm{N} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

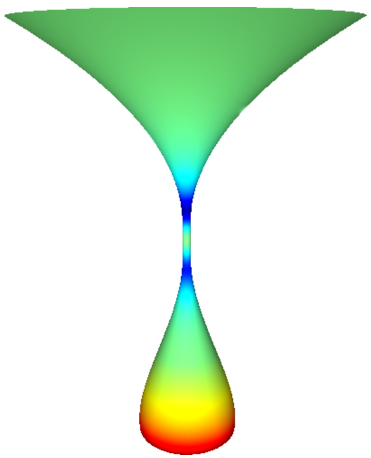
$$\Downarrow$$

$$|d\mathrm{N}|_F \approx \sqrt{tr(d\mathrm{N}d\mathrm{N}^{\mathrm{T}})} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \qquad tr(d\mathrm{N}) = k_1 + k_2$$

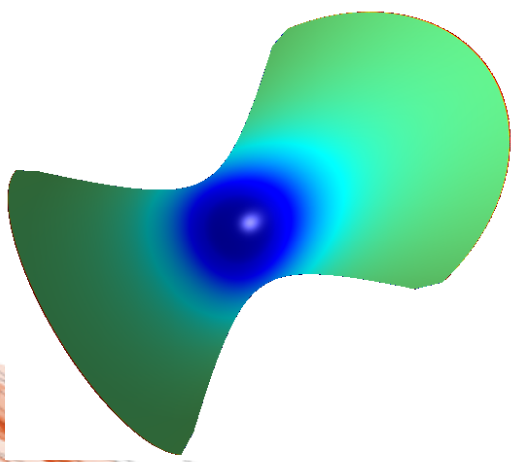
$$k_{1,2} = \frac{tr(d\mathrm{N}) \pm \sqrt{2|dN|_F^2 - tr(d\mathrm{N})^2}}{2}$$

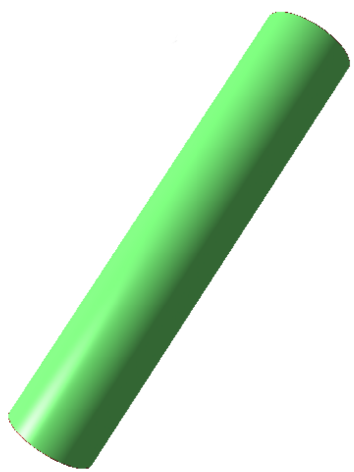
matemática puc-rio

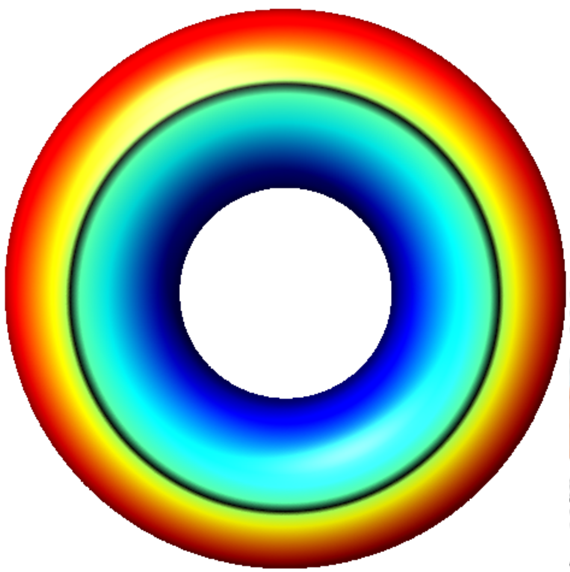
Curvatura da Interpolação por Splines



$$K = k_1 \cdot k_2 \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$



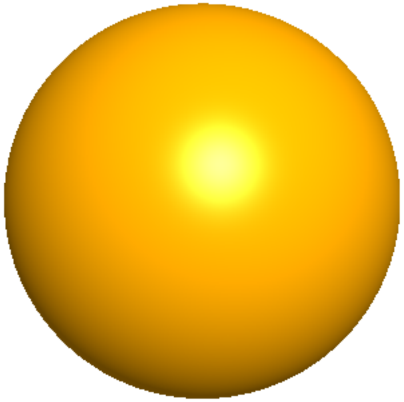




Problema da Invariância

Importância: manter propriedades geométricas

- Vetores Normais, Curvatura, etc.



Invariante por movimentos rígidos.

Problema da Invariância

Definição: uma propriedade geométrica *A* em um objeto *O* é invariante por movimentos rígidos *T* se, $\forall p \in O,$ tivermos $A(T(p)) = A(p).$

Ortogonalidade é preservada

∇f é covariante por movimentos rígidos.

$$\text{se} < N, \sigma_{u,v} >= 0, \text{então} < A^{-T} N, A\sigma_{u,v} >= 0$$

Problema da Invariância

Definição: uma propriedade geométrica *A* em um objeto *O* é invariante por movimentos rígidos *T* se, $\forall p \in O$, tivermos $A(T(p)) = A(p)$.

Problemas no caso discreto:

amostragem (grid) não é invariante!!

Importante no reconhecimento e reconstrução de superfícies

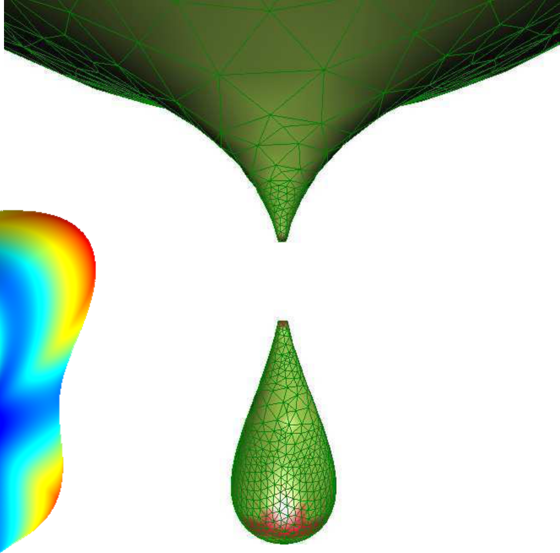
Aplicações

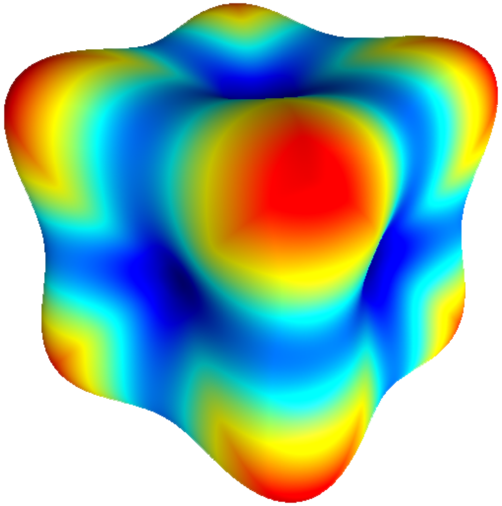
Imagens Médicas

Visualização de Superfícies

Modelagem 3D

...





matemática puc-rio

Aplicações

Imagens Médicas

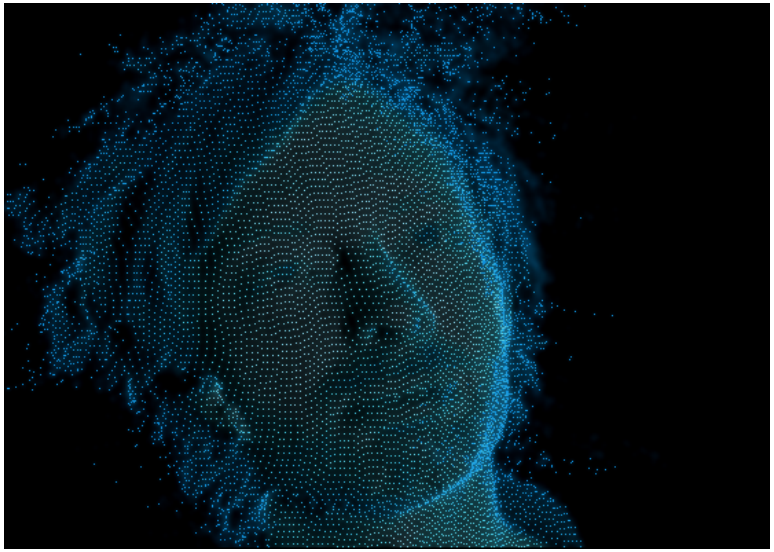
Visualização de Superfícies

Modelagem 3D

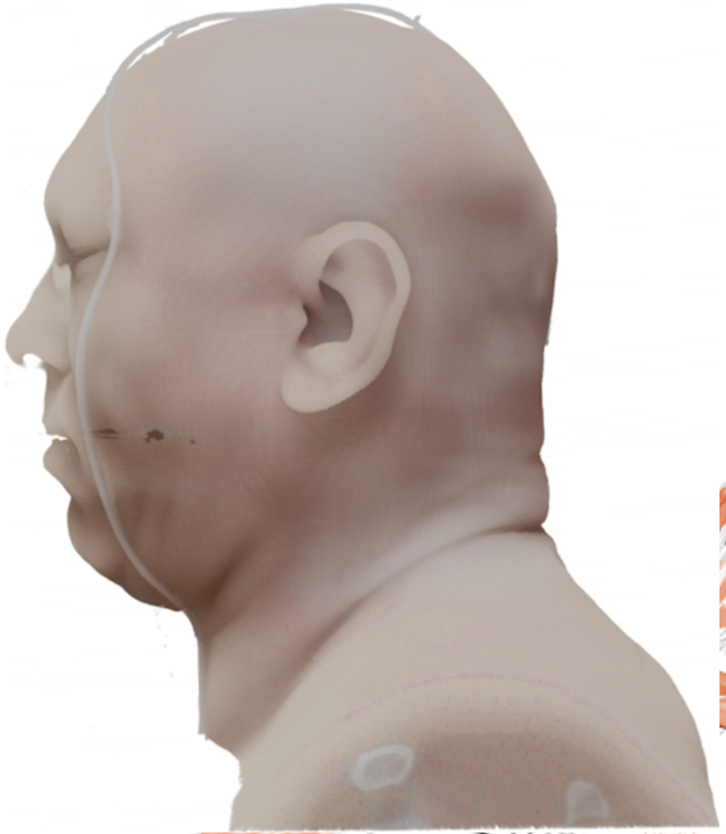
...

Próxima Aula

Entrada

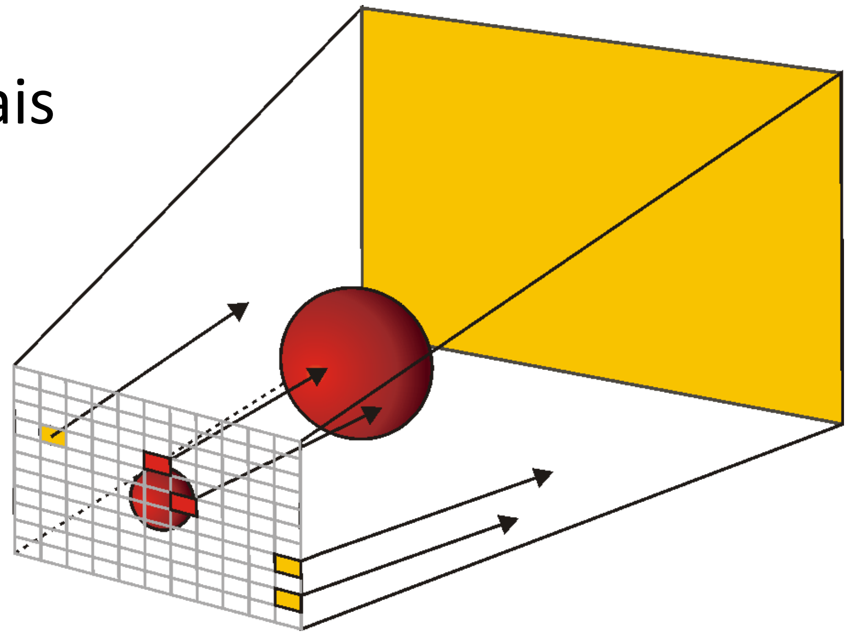


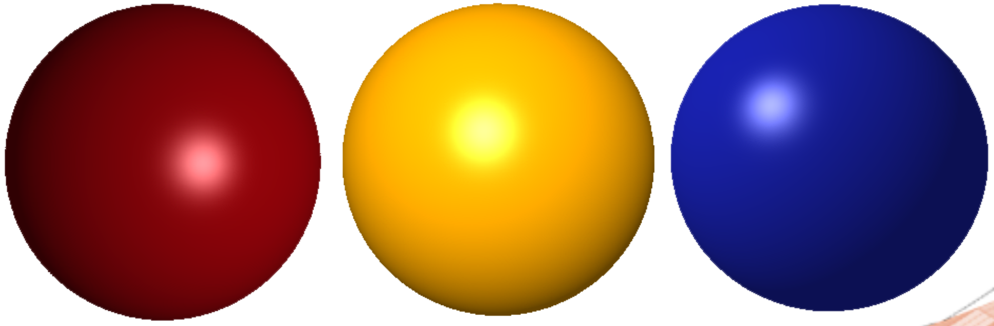
Saída



Próxima Aula

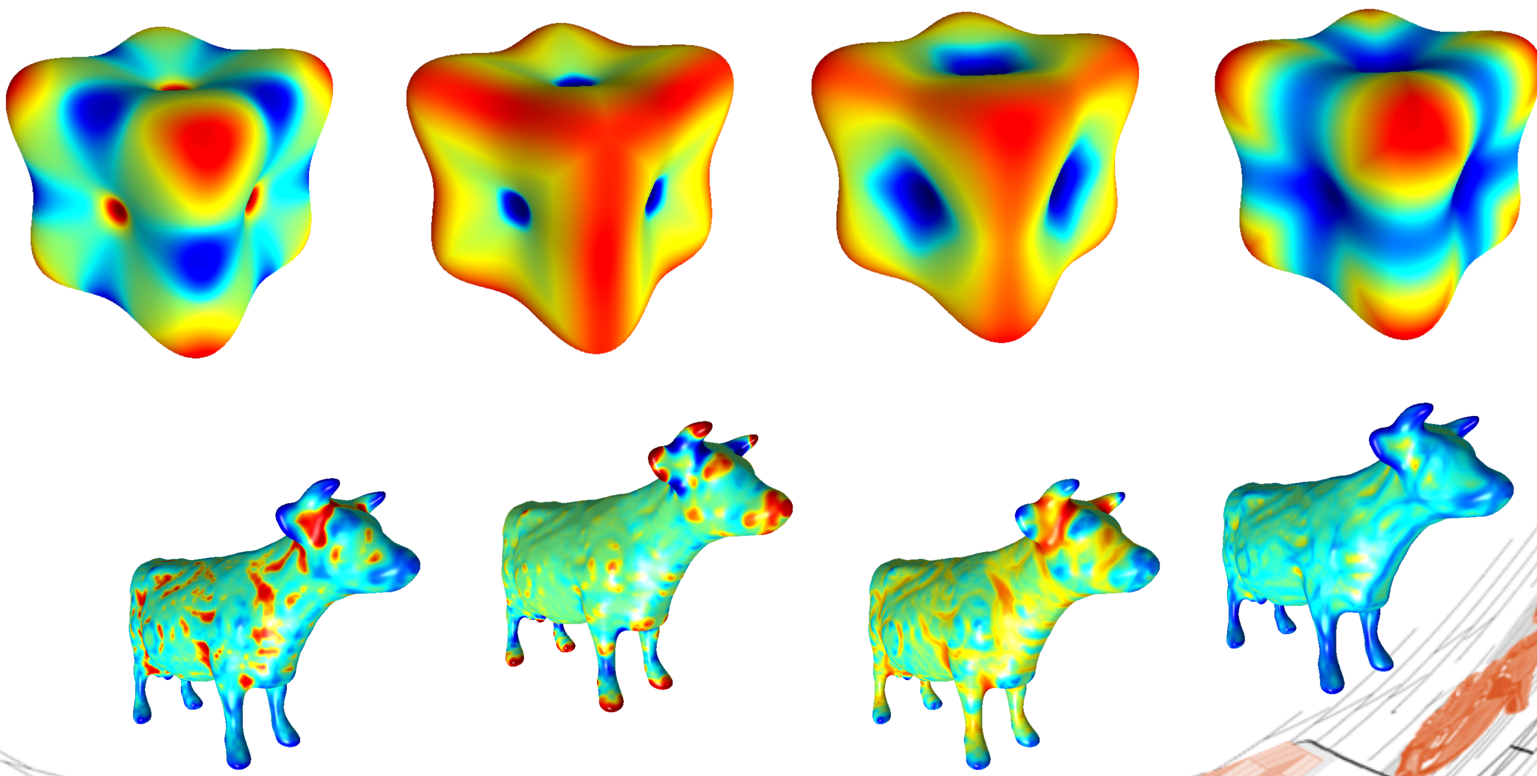
Algoritmos Locais





Próxima Aula

Visualização de Curvatura



Próxima Aula

Algoritmos Globais