



**Thomas Lewiner**

## **Complexos de Morse discretos e geométricos**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática Aplicada

Orientador : Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes  
Co-Orientador: Prof. Geovan Tavares dos Santos

Rio de Janeiro  
Julho de 2005





**Thomas Lewiner**

## **Complexos de Morse discretos e geométricos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática Aplicada. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Geovan Tavares dos Santos**

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Jean-Daniel Boissonnat**

Projeto Geométrica — INRIA – Sophia Antipolis

**Prof. Jean-Marie Morvan**

Instituto C. Jordan — Universidade Claude Bernard – Lyon

**Prof. Jorge Stolfi**

Instituto de Computação – UNICAMP

**Prof. Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho**

Laboratório Visgraf — IMPA

**Prof. Marcos Craizer**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de Julho de 2005



Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Thomas Lewiner**

Graduou-se em Engenharia na Ecole Polytechnique (Paris, França), cursando Álgebra e Informática, assim como Física Teórica. Especializou-se na Ecole Supérieure des Télécommunications (Paris, França) em Processamento de Sinais de Voz e Imagens, assim como Administração de Projetos. Trabalhou junto com a empresa Inventel em sistemas de telecomunicações sem fio baseados na tecnologia Bluetooth. Recebeu o grau de Mestre em Matemática Aplicada da PUC-Rio, e participou de vários projetos do departamento de Matemática para a Petrobras.

#### Ficha Catalográfica

Lewiner, Thomas

Complexos de Morse discretos e geométricos / Thomas Lewiner; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes; co-orientador: Geovan Tavares dos Santos. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 137 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Teoria de Morse. 3. Teoria de Forman. 4. Homologia. 5. Decomposição de Morse-Smale. 6. Campo de Vetores Gradiente. 7. Topologia Computacional. 8. Geometria Computacional. 9. Modelagem Geométrica. 10. Matemática Discreta. I. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. II. Santos, Geovan Tavares dos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510



## Agradecimentos

Esta parte aparece no começo do trabalho, mas acredito que é somente no final que nos damos conta de quantas e tantas pessoas contribuíram para esta tese. Claro, a minha família, os meus amigos e orientadores, os colegas, professores e funcionários do departamento de Matemática e do INRIA me deram um apoio enorme, e a Fundação da École Polytechnique e a PUC que me auxiliaram durante o meu doutorado. Mas essas palavras são um pouco curtas para relatar tudo o que eles fizeram durante esses três anos. Vou tentar falar um pouco mais de alguns deles, mesmo sabendo que precisaria do dobro de páginas desse trabalho para não esquecer de ninguém.

*Ladies first !*. Há de se começar pela minha mãe, que consegue estar onde eu preciso dela, cruzando oceanos para ficar só alguns dias, sabendo o quanto fico feliz quando ela está por perto. Na verdade, fui criado também por outras moças: as minhas avós Fanny e Zazá, a minha babá Simonne, minhas irmãs Elisabeth e France, minhas tias Maggy, Muriel e Florence, e minhas primas Judith, Deborah, Myriam, Sodam, Scarlett e Nathalie. E continuo sendo educado por mocinhas: Debora (sans accent) e Esther, Golda, Sarah, Salomé, Jasmine, Lio, Matis, Gabrielle, Emilie e as outras sobrinhas que estão para chegar... E também por aquelas que cuidaram de mim enquanto estava longe da família, incluindo Ana Cristina, Agnès, Juliana(s), Silvana(s), Tania, Cynthia, Jessica, Christina, Marie, Creuza, Tereza, Kátia, e Albane, JA, Anne-Laure...

Os nomes dos homens são um pouco menos poéticos para mim, mas eles me ajudaram muito também. Primeiro o meu pai, pelas experiências e espertezas. Meus irmãos Noam e William (formalmente cunhados, mas na verdade muito mais) por fazerem as minhas irmãs felizes. Meus primos David e Raphaël, e Gabriel, Daniel, Stéphane e amigos cuja companhia me faz sentir em casa no mundo inteiro. Mesmo que esse trabalho tenha pretensões científicas, os meus professores e os estudantes com quem eu trabalhei me deram muito mais do que só um apoio técnico. Meu orientador Hélio se tornou um dos meus melhores amigos, junto com Marcos, Sinésio, Luiz, Shaoul e Gabriel. Além do Jean-Daniel, Pierre, Alban, Olivier, Carlos, Nicolau, Geovan, Sergio, Lorenzo, Fred... Meus colegas me deram também uma ajuda no dia-a-dia e muito mais, incluindo Bernardo, Wilson, Marcos, Sergio(s), João, Renner, Alex, Afonso, Francisco, Fabiano, Marcos, Otávio, e do outro lado do oceano Luca, David, Marc, Steve, Philippe, Camille, Christophe, Abdelkrim, Laurent, e Benjamin, Nicolas, David(s), Eric, Mathieu...

Além de todos os outros...

## Resumo

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Complexos de Morse discretos e geométricos**. Rio de Janeiro, 2005. 137p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A geometria diferencial descreve de maneira intuitiva os objetos suaves no espaço. Porém, com a evolução da modelagem geométrica por computador, essa ferramenta se tornou ao mesmo tempo necessária e difícil de se descrever no mundo discreto. A teoria de Morse ficou importante pela ligação que ela cria entre a topologia e a geometria diferenciais. Partindo de um ponto de vista mais combinatório, a teoria de Morse discreta de Forman liga de forma rigorosa os objetos discretos à topologia deles, abrindo essa teoria para estruturas discretas.

Este trabalho propõe uma definição construtiva de funções de Morse geométricas no mundo discreto e do complexo de Morse-Smale correspondente, onde a geometria é definida como a amostragem de uma função suave nos vértices da estrutura discreta. Essa construção precisa de cálculos de homologia que se tornaram por si só uma melhoria significativa dos métodos existentes. A decomposição de Morse-Smale resultante pode ser eficientemente computada e usada para aplicações de cálculo da persistência, geração de grafos de Reeb, remoção de ruído e mais. . .

## Palavras-chave

Teoria de Morse. Teoria de Forman. Homologia. Decomposição de Morse-Smale. Campo de Vetores Gradiente. Topologia Computacional. Geometria Computacional. Modelagem Geométrica. Matemática Discreta.

## Abstract

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Geometric Discrete Morse Complexes**. Rio de Janeiro, 2005. 137p. PhD Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Differential geometry provides an intuitive way of understanding smooth objects in the space. However, with the evolution of geometric modeling by computer, this tool became both necessary and difficult to transpose to the discrete setting. The power of Morse theory relies on the link it created between differential topology and geometry. Starting from a combinatorial point of view, Forman's discrete Morse theory relates rigorously discrete objects to their topology, opening Morse theory to discrete structures.

This work proposes a constructive definition of geometric discrete Morse functions and their corresponding discrete Morse–Smale complexes, where the geometry is defined as a smooth function sampled on the vertices of the discrete structure. This construction required some homology computations that turned out to be a significant improvement over existing methods by itself. The resulting Morse–Smale decomposition can then be efficiently computed, and used for applications to persistence computation, Reeb graph generation, noise removal. . .

## Keywords

Morse Theory. Forman Theory. Homology. Morse–Smale decomposition. Gradient vector fields. Computational Topology. Computational Geometry. Geometric Modeling. Discrete Mathematics.



## Sumário

1	Introdução	19
1.1	Principais resultados	20
1.2	Organização do trabalho	25
2	Teorias de Morse	27
2.1	Espaços topológicos	27
2.2	Campos de vetores	32
2.3	Funções de Morse	34
2.4	Elementos críticos	37
2.5	Propriedades topológicas	39
2.6	Cancelamentos	44
2.7	Fluxos e bacias	46
2.8	Complexos de Morse	48
3	Estrutura de uma função de Morse discreta	51
3.1	Camadas e hipergrafos	52
3.2	Construção gulosa	58
3.3	Bacias do fluxo e componentes de hipergrafos	72
4	Cálculo da homologia	79
4.1	Ferramentas algébricas e combinatórias	79
4.2	Cálculo completo da homologia	86
5	Complexos de Morse discretos geométricos	97
5.1	Pontos críticos geométricos	98
5.2	Computação	103
5.3	Propriedades e prova do algoritmo	108
5.4	Resultados e aplicações	122
6	Conclusões e trabalhos futuros	127
	Referências Bibliográficas	129
	Índice Remissivo	133
	Sumário das notações	135



*L'idée d'intensité est donc située au point de jonction de deux courants, dont l'un nous apporte du dehors l'idée de grandeur extensive, et dont l'autre est allé chercher dans les profondeurs de la conscience, pour l'amener à la surface, l'image d'une multiplicité interne. Reste à savoir en quoi cette dernière image consiste, si elle se confond avec celle du nombre, ou si elle en diffère radicalement. (...) Et de même que nous nous sommes demandé ce que serait l'intensité d'une sensation représentative si nous n'y introduisions l'idée de sa cause, ainsi nous devons rechercher maintenant ce que devient la multiplicité de nos états internes, quelle forme affecte la durée, quand on fait abstraction de l'espace où elle se développe. Cette seconde question est autrement importante que la première. Car si la confusion de la qualité avec la quantité se limitait à chacun des faits de conscience pris isolément, elle créerait des obscurités, comme nous venons de le voir, plutôt que des problèmes. Mais en envahissant la série de nos états psychologiques, en introduisant l'espace dans notre conception de la durée, elle corrompt, à leur source même, nos représentations du changement extérieur et du changement interne, du mouvement et de la liberté.*

**Henri Bergson,**

*Essai sur les données immédiates de la conscience.*



## Prefácio

Usualmente na matemática, expomos o nosso trabalho de trás para frente: descobrimos e entendemos os conceitos geralmente através de exemplos, aplicações ou generalizações de alguma intuição, mas apresentamos esses mesmos exemplos e aplicações como corolários ou exercícios deduzidos do nosso trabalho. Esta tese é globalmente conforme a essa prática, embora eu tenha preferido explicações à provas dedutivas, principalmente nas preliminares. Mas antes, eu gostaria de resumir como os conceitos desta tese surgiram.

Este trabalho é a concretização de um processo lento que durou esses últimos três anos. As principais perguntas já tinham sido formuladas no final do meu mestrado na PUC–Rio, e imaginara então que as respostas iriam chegar logo depois. Nessa época, não tinha experiência de problemas longos de se resolver, pois o meu trabalho de mestrado orientou-se rapidamente na direção certa, graças à intuição dos meus orientadores. Acabei meu mestrado descobrindo que alguns dos nossos resultados poderiam ter sido deduzidos mais diretamente do trabalho original do Forman, embora a nossa formulação tenha se tornado mais eficiente na hora de criar os algoritmos. Ao mesmo tempo, reparei a relação entre os componentes conexos dos hipergrafos representando uma função de Morse discreta, e a decomposição de Morse–Smale, que tem um papel fundamental nesta tese.

Esta relação me ajudou no começo do meu doutorado no INRIA numa aplicação específica de encaixamentos de moléculas, da qual resultou um artigo que foi rapidamente aceito numa conferência considerada importante. No entanto, a conferência não motivou muitas discussões, e três anos depois, a parte do problema referente à biologia ainda não está bem entendida. Embora tenhamos passado quase um ano estudando este tema, nossa resolução geométrica do encaixamento de moléculas não contribuiu tanto para a área. E foi apenas depois de um ano que dei-me conta que a decomposição de Morse–Smale discreta, que motivou o tal artigo, era por si só um tópico importante que tinha deixado de estudar.

Então comecei oficialmente este doutorado separado à PUC–Rio, passando o segundo ano desse trabalho no Brasil. Enquanto eu trabalhava principalmente sobre outros assuntos, desde os projetos da Petrobrás até compressão

de malhas e aproximação de quantidades diferenciais em curvas, as bases deste trabalho se consolidaram pouco a pouco. Primeiro, a relação entre hipergrafos e a decomposição de Morse–Smale tornou-se mais intuitiva tendo estudado mais cuidadosamente o fluxo discreto. Depois do primeiro cálculo do fluxo numa célula dual ganhei mais confiança na possibilidade de definir um complexo de Morse–Smale discreto, embora eu tenha percebido que este cálculo era mais uma vez uma versão do cálculo de Forman para nossa representação por hipergrafo. Ao mesmo tempo, completei uma implementação de um algoritmo bem complicado para decomposição de Morse–Smale. Aí então ficou claro que a definição de Banchoff para os pontos críticos que usava não era suficiente para decomposição de Morse–Smale em dimensão maior do que três.

Por isso, passei a me concentrar sobre a definição de pontos críticos usando homologia local. Para ser coerente, tentei desenhar um algoritmo para calcular números de Betti usando teoria de Morse discreta. Este algoritmo, além de ter ficado tão eficiente como o clássico algoritmo incremental para sub-variedades simpliciais da esfera de dimensão 3, também funcionava para *qualquer* complexo celular regular. A implementação do algoritmo foi fácil, e depois o estendi aos poucos para calcular primeiro o grupo de homologia inteiro com torção, e depois para deduzir uma base de ciclos geradores da homologia. A extensão seguinte seria para calcular a decomposição de qualquer ciclo sobre a base, mas este problema suscitou muitas perguntas, e nem todas foram resolvidas ainda. Este foi a principal razão para eu ter completado o algoritmo só recentemente, graças a ajuda que recebi dos professores do departamento de Matemática, incluindo o meu orientador Hélio Lopes, Geovan Tavares, Nicolau Saldanha e Carlos Tomei, assim como a grande ajuda de David Cohen–Steiner, e Alban Quadrat do INRIA. Esta comunidade me dá esperanças de responder as outras perguntas de um ponto de vista mais teórico.

Em paralelo, procurei aplicações e simplificações da decomposição de Morse–Smale discreta. A maioria dos artigos sobre topologia computacional se referia a “persistência” como uma ferramenta possivelmente útil para aplicações. Esse é um conceito bem elegante montado por cima da homologia, usado primeiro pelo Smale na sua prova da conjectura de Poincaré em dimensão alta, mas que foi rebatizada por razões escuras. Persistência usava a definição de Banchoff para os pontos críticos, e eu sabia que esta definição era incompleta. Além disso, já que sabia que essa noção vinha de fato do trabalho do Smale, pensei que trabalhando mais a fundo na teoria de Morse–Smale poderia dar uma definição melhor e mais robusta para calcular a persistência. Então, voltei a trabalhar no meu algoritmo para funções de Morse discretas geométricas de modo a deixá-lo mais claro e simples. A versão mais simples

funcionou tão bem, que parecia simples demais para evitar problemas básicos como respeitar a definição de pontos críticos de Banchoff. Esses problemas são expostos e resolvidos nesta tese com pequenos algoritmos em volta do algoritmo principal, embora eu tenha observado que o algoritmo principal sozinho geralmente apresenta melhores resultados, evitando pontos críticos que parecem mais ruídos, e dando resultados mais intuitivos.

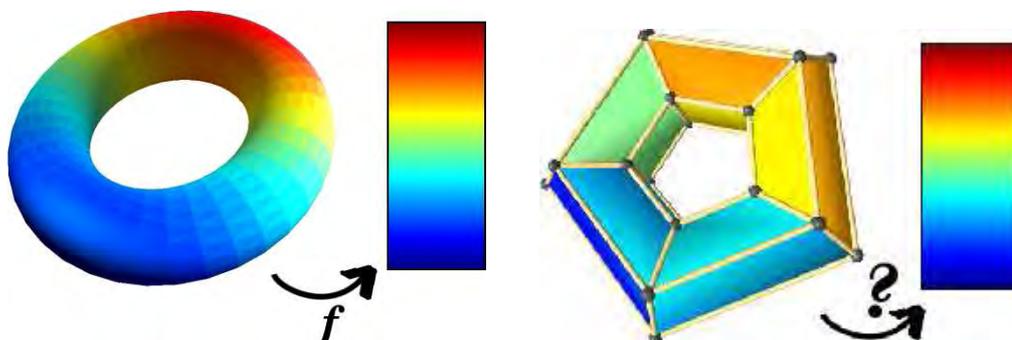


# 1

## Introdução

Os principais objetos estudados por ambas topologia e geometria diferenciais são variedades suaves. Porém, estas duas disciplinas têm estudado esses objetos quase separadamente até os primeiros trabalhos de **Morton Morse** (Morse, 1925). Desde então, a teoria de Morse se tornou uma ferramenta poderosa para estudar a topologia das variedades suaves com a artilharia da geometria diferencial. Essa teoria vem sendo aplicada em vários problemas complexos, dentre eles o teorema de Gauß–Bonnet, o teorema do índice de Poincaré–Hopf, a determinação das estruturas de geodésicas de uma variedade, a teoria das singularidades de hipersuperfícies de Lefschetz, as esferas exóticas de Milnor, a teoria de Yang–Mills de fibrados, a geometria de sistemas dinâmicos Hamiltonianos, a homologia de Floer. . .

Por um lado, a teoria de Morse descreve parte da topologia de uma variedade suave por uma função escalar definida nela, e em particular dos pontos críticos dessa função. Por outro lado, ela nos dá uma descrição simples da tal função pelas decomposições topológicas que esta função gera. Essa ferramenta, devido principalmente ao trabalho de **Stephen Smale** (Smale, 1960), nos permite usar técnicas de toda a topologia para estudar a dinâmica de funções escalares suaves, em particular da topologia algébrica e combinatória. Essa extensão da teoria de Morse se aplicará mais tarde a outros tipos de objetos.



1.1(a): Função altura  $f(\mathbf{x}) = x_z$  num toro suave.

1.1(b): Função altura nas faces de um toro discreto.

Figura 1.1: Função de Morse clássica num toro: ao que corresponderia no caso discreto?

A evolução dessa teoria continuou com as contribuições de **Robin Forman** (Forman, 1995), que construiu uma teoria de Morse inteiramente discreta. Seu trabalho estuda a topologia dos objetos discretos, entre os quais as variedades combinatórias, a partir do estudo de funções especiais (figura 1.1). Contrariamente a outras tentativas de formular versões discretas da teoria de Morse, essas funções não são facilmente descritas com ferramentas da geometria diferencial. Porém, essa teoria é a única, no limite do nosso conhecimento, que providencia resultados topológicos, que é o ponto essencial da teoria de Morse.

O conjunto de ferramentas da geometria diferencial corresponde à maneira intuitiva de entender objetos no espaço. Porém, com a evolução da modelagem geométrica por computador, essas ferramentas são ao mesmo tempo necessárias e difíceis de se transpor para o mundo discreto das máquinas. Embora o problema de amostrar sinais, ou seja, de definir a continuidade deles, tenha sido resolvido, a definição de derivadas no caso discreto ainda não chegou a um consenso. Além disso, essas noções não estão rigorosamente definidas para objetos geométricos discretos. Nessa perspectiva, a teoria de Morse discreta é uma pista para reproduzir a ligação entre a topologia e a geometria diferenciais começando pela topologia combinatória. Esse trabalho tenta contribuir para esse projeto definindo funções de Morse discretas a partir de funções escalares que representam propriedades geométricas.

## 1.1

### Principais resultados

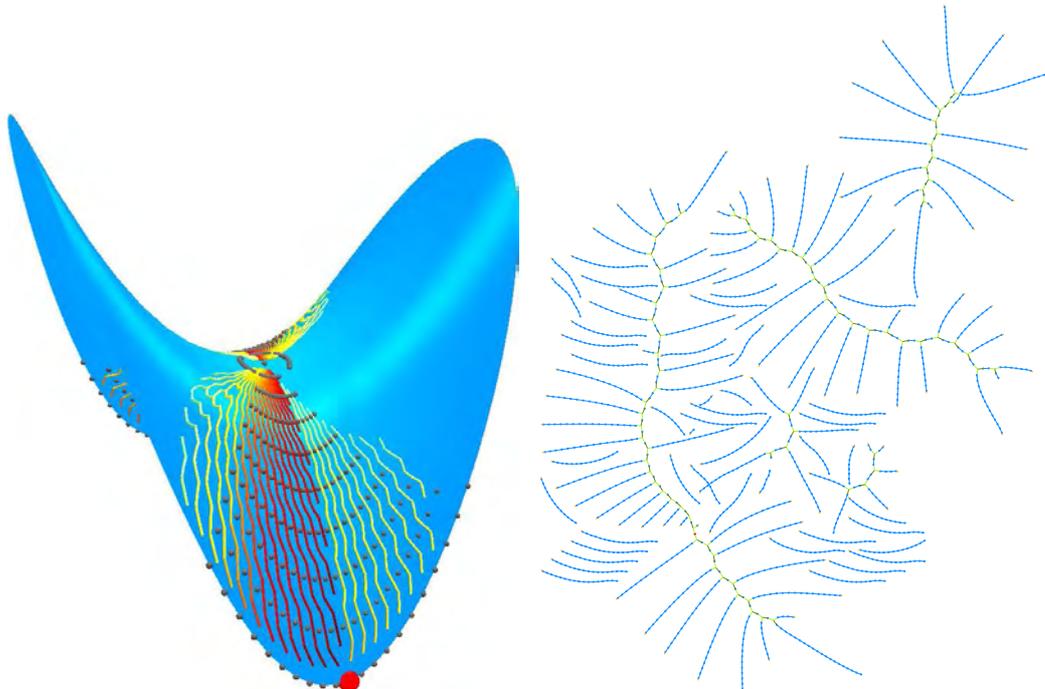
A apresentação deste trabalho é voltada para a construção de decomposições de Morse discretas e geométricas. Para chegar a esta construção, cada capítulo apresenta partes dos conceitos e resultados necessários. Esses resultados são quase todos novos e poderiam ser considerados independentemente da construção final como contribuição própria. Em particular, a extensão da representação do gradiente discreto por hipergrafos (Lewiner, 2002) com as relações deles com o fluxo, e o cálculo da homologia baseado na teoria de Morse discreta são resultados promissores.

### Fluxo e componentes dos hipergrafos

Forman define em (Forman, 1998) um campo de vetor combinatório num complexo celular como um casamento de células. Traduzimos essa definição em termos de *hipergrafos orientados* em (Lewiner, 2002), mostrando a estrutura de camadas que isso induz no complexo celular. Quando este campo de vetor é um gradiente, segundo a definição de (Forman, 1995), a aciclicidade deste

gradiente pode ser traduzida nesses hipergrafos, e neste caso cada hipergrafo de camada é de fato uma *hiperfloresta*. A estrutura de uma hiperfloresta é relativamente simples: cada componente conexo é composto de regiões conexas contendo somente linhas regulares, chamadas de *componentes regulares*, que são interligados por hiperlinhas não regulares. Cada componente regular é uma árvore e tem no máximo uma hiperlinha não regular saindo desta.

No capítulo 3 **Estrutura de uma função de Morse discreta**, usaremos essas definições para clarificar a construção de funções de Morse discretas e detalhamos o algoritmo correspondente (algoritmo 3.5). Esse algoritmo central pode ser usado ou para construir funções de Morse ótimas como em (Lewiner *et al.*, 2003b), ou para construir funções de Morse geométricas como no capítulo 5 **Complexos de Morse discretos geométricos**.



1.2(a): As linhas de fluxo perto do ponto sela crítico, indo para os mínimos (bolas vermelhas).

1.2(b): As linhas de fluxo na estrutura de camadas, desde o nó vermelho até as folhas da hiperfloresta.

Figura 1.2: O fluxo de uma função de Morse discreta geométrica correspondendo a  $f(\mathbf{x}) = -x_z$  numa superfície em forma de sela.

Mas o maior benefício desta estrutura em camadas é o de calcular eficientemente o fluxo discreto, definido por Forman em (Forman, 1995) (figura 1.2). Ademais, este fluxo permite um mapeamento direto do complexo original para o complexo de Morse. Este último pode servir para o cálculo da homologia de Witten, como no capítulo 4 **Cálculo da homologia**, e ainda para a decomposição de Morse–Smale como no capítulo 5 **Complexos de Morse discretos geométricos**.

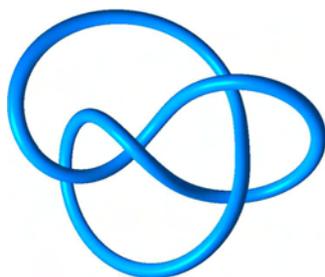
Mostraremos no final do capítulo 3 que o fluxo progride em cada hiperfloresta de camada das raízes para as folhas. Por alto, as cadeias invariantes do fluxo seriam os componentes conexos dessas hiperflorestas. Porém, isso não é sempre verdade, pois no mundo discreto, os caminhos do gradiente podem se juntar e essa união pode ser destrutiva. Os teoremas 3.4 e 3.5 da seção 3.3.2 *Bacias discretas estáveis e instáveis* afirmam que o componente regular de uma célula crítica faz parte da cadeia invariante pelo fluxo, que é contida no componente conexo.

### Computação completa da homologia

O fluxo se comporta diferentemente para uma célula *primal*, *dual* ou *crítica*, seguindo uma classificação próxima à (Forman, 1995). Em termos de hipergrafos, isso fornece uma maneira muito eficiente de calcular o fluxo iterado, mapeando o complexo original no complexo de Morse–Witten. Esse complexo tem a mesma homologia que o complexo original (Forman, 2002), mas tem muito menos elementos. Por isso, a homologia neste complexo pode ser facilmente calculada até mesmo por métodos simples tal como a transformação normal de Smith.

Essa idéia é muito usada no capítulo 4 **Cálculo da homologia** para fazer cálculos de homologia (figura 1.3). Embora a idéia de simplificar o complexo antes de calcular a homologia seja bastante natural, este trabalho é o primeiro, no limite do nosso conhecimento, que aplica esse projeto com eficiência. Em particular, detalhamos os nossos algoritmos para calcular uma função de Morse com poucas células críticas (algoritmo 3.8) e para calcular o operador de bordo no complexo de Witten–Morse resultante (algoritmo 4.1) usando as propriedades do fluxo estabelecidas na seção 3.3 *Bacias do fluxo e componentes de hipergrafos*. Esses algoritmos servirão depois para calcular os grupos de homologia com torção sobre qualquer anel (algoritmo 4.2) em tempo linear em média.

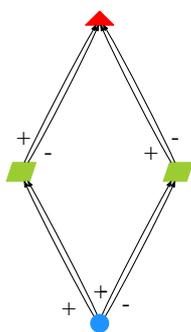
Além das propriedades acima, o fluxo mapeia o complexo original e o complexo de Morse nos dois sentidos, onde podemos usá-lo num sentido para calcular uma base de ciclos para os grupos de homologia no complexo original (algoritmo 4.3), e no sentido contrário para calcular a decomposição de qualquer ciclo nessa base (algoritmo 4.4). Este último passo requer uma pré-computação linear com relação ao tamanho do complexo, e depois retorna a decomposição do ciclo em tempo linear no tamanho deste ciclo.



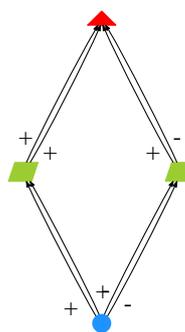
1.3(a): Um toro entrelaçado com 27600 retângulos.



1.3(b): Uma garrafa de Klein com 8240 triângulos.



1.3(c): O complexo de Morse do gradiente discreto ótimo no toro entrelaçado só tem 4 células.



1.3(d): Idem para a garrafa de Klein, onde a orientação de cada célula reflete a não-orientabilidade.

Figura 1.3: A homologia pode ser eficientemente calculada no complexo de Morse–Witten: por exemplo num toro entrelaçado ( $H_0 = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \mathbb{Z}^2$ ,  $H_2 = \mathbb{Z}$ ) e numa garrafa de Klein ( $H_0 = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2 = \mathbb{Z}_2$ ).

### Funções de Morse discretas geométricas e decomposições de Morse–Smale

Essa eficiência em mapear o complexo original para o complexo de Morse nos dois sentidos resolve parte da decomposição de Morse–Smale. Falta ainda construir a função de Morse discreta. No caso do cálculo da homologia, a função de Morse discreta tinha que ter o menor número possível de células críticas para acelerar as partes mais caras em tempo de execução dos algoritmos, que são na maioria as contas de álgebra linear. O caso das decomposições de Morse gerais é mais delicado. Ao contrário da teoria de Morse diferencial, a definição de uma função de Morse discreta não é tão intuitiva, e há pouquíssimos exemplos onde uma função de Morse discreta provém de outro domínio que da própria teoria de Morse discreta.

O capítulo 5 **Complexos de Morse discretos geométricos** se propõe a definir uma função de Morse discreta  $f$  correspondendo a uma função escalar  $f$  definida nos vértices do complexo celular. Essa função  $f$  será chamada de “geometria” neste trabalho, embora sirva qualquer função escalar. Como a decomposição de Morse–Smale é uma estrutura discreta deduzida de propriedades suaves das variedades, ela liga as estruturas diferenciais e discretas. Para preservar esta ligação, exigimos que a nossa função de Morse discreta  $f$  tenha a mesma decomposição de Morse–Smale que  $f$ .



Figura 1.4: Uma função de Morse discreta geométrica obtida somente com o algoritmo guloso, e a decomposição de Morse–Smale correspondente.

O algoritmo 5.3 dá uma definição construtiva da tal função de Morse discreta geométrica  $f$  (figura 1.4). Em particular, provaremos na seção 5.3 *Propriedades e prova do algoritmo* que esta definição cumpre com a decomposição de Morse–Smale para a segunda subdivisão baricêntrica de superfícies. Porém, se o complexo celular não é adaptado à função, esta definição sozinha poderia passar por cima de alguns elementos críticos. Neste caso, a construção pode ser precedida por uma seleção explícita das células críticas (algoritmo 5.2) e completada pelos cancelamentos das células críticas não selecionadas (algoritmo 5.4). Este cancelamento corresponde àquele que o Smale usou para provar a conjectura de Poincaré em dimensão alta. Como a persistência é só um outro nome para essa técnica, esta construção produz uma maneira explícita e rigorosa de definir e calcular a persistência. E concluimos este trabalho por esta aplicação, e por mostrar a relação entre as decomposições de Morse–Smale e os grafos de Reeb, com uma construção algorítmica e explícita destes grafos de Reeb para qualquer complexo celular.

## 1.2

### Organização do trabalho

Esta tese esta organizada da seguinte forma. No capítulo 2 **Teorias de Morse**, recordamos os conceitos básicos que usaremos ao longo deste trabalho. Embora todas as noções sejam descritas nesse capítulo, os elementos da teoria de Morse diferencial são apenas mencionados, enquanto as definições equivalentes na teoria de Morse discreta estão mais detalhadas.

Depois, o capítulo 3 **Estrutura de uma função de Morse discreta** introduz a representação de funções de Morse discretas por camadas, simplificando (Lewiner, 2002). Os principais algoritmos para construir funções de Morse discretas estão apresentados lá, num formato que será usado por todos os algoritmos desta tese. Este capítulo termina com o cálculo do fluxo nas camadas, que será uma peça chave para o resto deste trabalho.

Em seguida, o capítulo 4 **Cálculo da homologia** detalha o nosso método para calcular os grupos de homologia, uma base de geradores e a decomposição de ciclos. Esse é um resultado interessante por si só, mas o usaremos para definir os pontos críticos no capítulo 5 **Complexos de Morse discretos geométricos**.

Este último capítulo propõe também um algoritmo para calcular um gradiente discreto geométrico derivado diretamente do capítulo 3. A prova que este algoritmo simples detecta todos os pontos críticos nos casos regulares é dada no final do capítulo 5. Porém, no caso geral, o algoritmo pode ser antecipado por uma seleção explícita de células críticas, e completado por uma série de cancelamentos para gerar somente as células críticas especificadas. O capítulo 5 fecha com aplicações diretas destas construções aos grafos de Reeb e ao cálculo da persistência.



## 2

### Teorias de Morse

Este capítulo coleta as noções fundamentais que usaremos ao longo desta tese. Já que o tema deste trabalho é sobre a versão discreta de Forman da teoria de Morse, cada conceito será introduzido na sua versão suave (subseções 2.x.1) e na sua versão discreta (subseções 2.x.2). Assumimos que o leitor esteja mais familiarizado com a teoria de Morse suave que com a teoria de Forman. Descreveremos então as noções de topologia diferencial com mais concisão, enquanto que as noções discretas são definidas com mais detalhes e relacionadas com as versões suaves. O objetivo deste capítulo é chegar na noção de complexos de Morse. Referimos a (Fomenko, 1987, Hatcher, 2002) para apresentações mais completas de topologia algébrica. A descrição clássica da teoria de Morse se encontra em (Milnor, 1963), e a apresentação completa da teoria de Morse de Forman está em (Forman, 1995).

A teoria de Morse clássica estuda as funções diferenciáveis em variedades suaves, e relaciona os elementos críticos destas funções com a topologia da variedade. A teoria de Morse discreta pretende fornecer uma ferramenta similar, embora as funções estudadas sejam bem menos intuitivas. Dois fatos iluminam um pouco essas noções. Primeiro, a informação principal de uma função de Morse discreta está contida no seu gradiente, e no caso ideal, este gradiente está alinhado com o gradiente suave da função de Morse diferencial. Segundo, as funções de Morse suaves e discretas coincidem tanto na decomposição em alças quanto no complexo de Morse–Smale: esses são estruturas discretas, na verdade complexos celulares, que podem ser descritos a partir apenas do gradiente de uma função de Morse. A segunda construção não é direta do caso diferencial ao caso discreto, e isso é o principal objetivo deste trabalho.

#### 2.1

##### Espaços topológicos

Um espaço topológico é um conjunto de pontos  $X$  com uma definição para os sub-conjuntos abertos de  $X$ , usualmente chamados de vizinhança. Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são considerados equivalentes quando existir

um homeomorfismo entre eles, ou seja, uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  cuja inversa é contínua. Essa definição geral contém a maioria dos espaços clássicos: subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , espaços discretos, subconjuntos de funções... A teoria de Morse é definida em espaços topológicos particulares: variedades suaves para a teoria clássica e complexos celulares para a versão discreta. Definições formais de cada um deles encontram-se em (do Carmo, 1976) e (Hatcher, 2002) respectivamente.

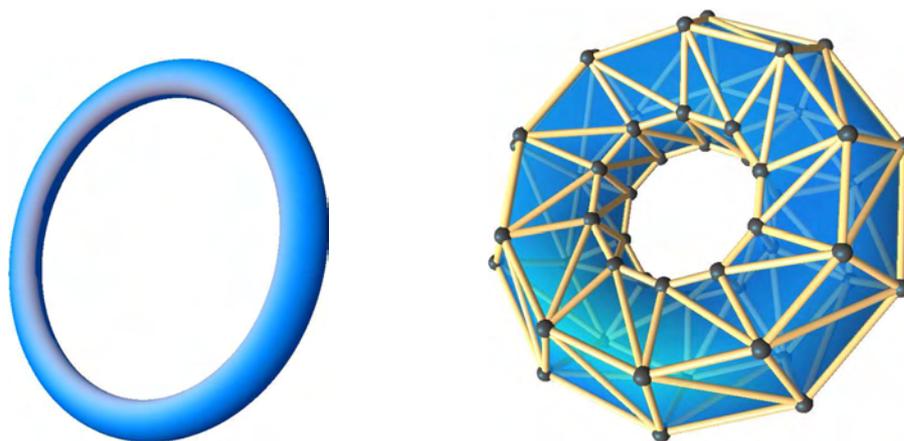


Figura 2.1: Dois toros: suave e discreto.

### 2.1.1

#### Variedades suaves

Uma *variedade topológica*  $\mathcal{M}$  de dimensão  $n$  é um espaço topológico onde a vizinhança de cada ponto é homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , a dimensão  $n$  sendo a mesma para cada ponto de  $\mathcal{M}$ . Este homeomorfismo define de fato uma parametrização local de  $\mathcal{M}$ . Uma variedade será qualificada de *suave* se estas parametrizações são suaves (muitas vezes diferenciáveis) e quando elas são compatíveis entre a vizinhança de um ponto e a vizinhança de um ponto ao lado. Para a teoria de Morse suave, consideraremos apenas variedades compactas sem bordo, como o toro da figura 2.1.

### 2.1.2

#### Complexos celulares

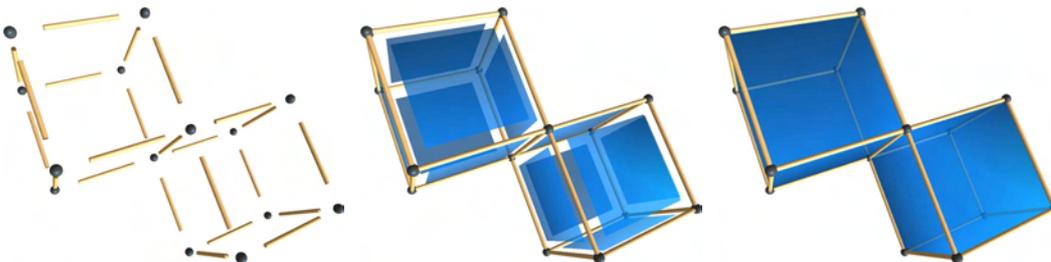
Uma *célula*  $\sigma$  de dimensão  $p$  é um espaço topológico homeomorfo à esfera aberta  $\mathbb{B}^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ . O exemplo mais simples de  $p$ -célula é o interior de um  $p$ -simplexo, que é o fecho convexo de  $(p + 1)$  pontos de  $\mathbb{R}^p$  em posição geral. Um *complexo celular*  $K$  é uma coleção de células (figura 2.2) que pode ser definido de duas maneiras equivalentes: por construção (Hatcher, 2002) ou por decomposição (Cooke & Finney, 1967).



2.2(a): Um 1-complexo: coleção de vértices  $|K^0|$  e arestas  $|K^1| \setminus |K^0|$ .

2.2(b): Espaço topológico  $K$  inválido desde que as intersecções das arestas não sejam células de  $K$

Figura 2.2: Exemplos de um 1-complexo e de um espaço discreto inválido.



2.3(a): Grudando 1-células (arestas) a  $|K^0|$ .

2.3(b): Grudando 2-células (faces) a  $|K^1|$ .

2.3(c): O 2-complexo  $K$  final.

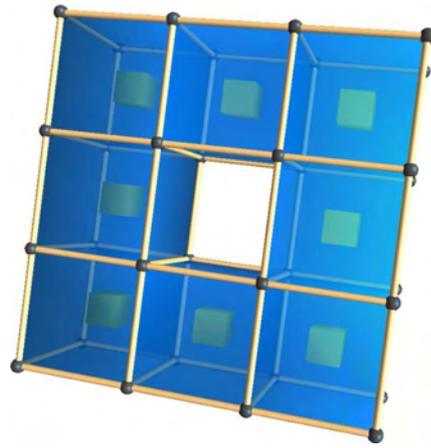
Figura 2.3: Construção de um cubo duplo como sendo um 2-complexo.

**Construção.** Um complexo celular é construído incluindo células em ordem crescente de dimensão (figura 2.3). Começando de um conjunto discreto  $K^0$  contendo as 0-células, colamos  $p$ -células a  $K^{p-1}$  para obter  $K^p$ . Cada célula  $\sigma^p$  é colada identificando o seu bordo geométrico (homeomorfo à esfera  $\mathbb{S}^{p-1}$ ) com um subconjunto de  $K^{p-1}$ . Esse não é o caso do exemplo da figura 2.2(b). A *realização geométrica*  $|K|$  de  $K$  é a união geométrica de todas as suas células (figura 2.4).

**Decomposição.** Um complexo celular pode também ser definido pela decomposição  $|K| = \bigcup |K^p|$ , onde o espaço  $|K^p|$  é fechado em  $|K|$ , e incluso em  $|K^{p+1}|$  (figura 2.5). Esta decomposição deve satisfazer as seguintes condições. Primeiro, os componentes conexos, anotados  $\sigma_i$ , de  $|K^p| \setminus |K^{p-1}|$  devem ser conjuntos abertos de  $|K^p|$ : aí estão as células. Segundo, deve existir, para cada célula  $\sigma_i$ , um homeomorfismo  $h_i : \mathbb{S}^{p-1} \rightarrow |\partial\sigma_i|$  da esfera  $\mathbb{S}^{p-1}$  para o bordo geométrico de  $\sigma_i$  que possa ser estendido numa função contínua  $\bar{h}_i : \mathbb{B}^p \rightarrow \sigma_i$  sobre a bola  $\mathbb{B}^p$ . Em ambos casos, construção ou decomposição, a topologia de  $|K|$  é a topologia fraca: um sub-conjunto de  $|K|$  é aberto se a intersecção dele com cada célula de  $K$  é aberto.

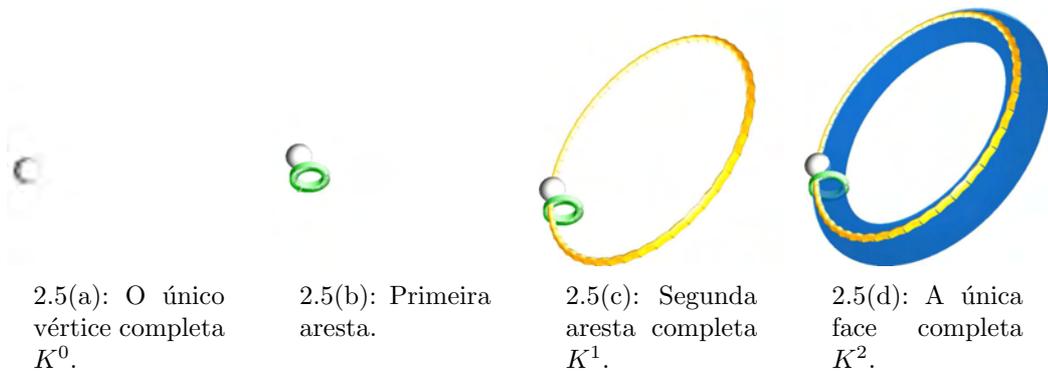


2.4(a): Um toro PL mínimo mergulhado.



2.4(b): Um toro sólido feito de cubos.

Figura 2.4: Exemplos de 2- e 3-complexos.



2.5(a): O único vértice completa  $K^0$ .

2.5(b): Primeira aresta.

2.5(c): Segunda aresta completa  $K^1$ .

2.5(d): A única face completa  $K^2$ .

Figura 2.5: Decomposição de um toro suave num complexo celular: essa decomposição é a mesma que a do toro entrelaçado da figura 1.3(c).

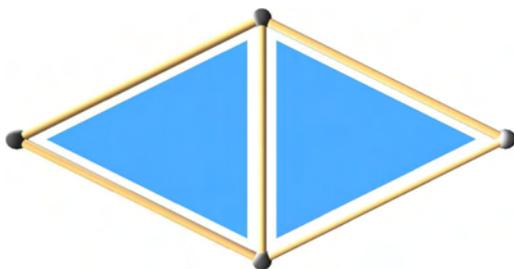


Figura 2.6: Cada triângulo é incidente a duas arestas externas, e ambas são incidentes a aresta central.

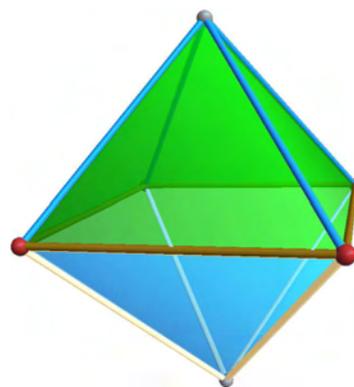


Figura 2.7: A estrela aberta do vértice de cima é composta dos triângulos verdes e das arestas azuis. O elo dele é composto dos vértices vermelhos e das arestas marrons.

**Incidências.** Na definição acima, vimos que o bordo geométrico  $|\partial\sigma|$  de uma célula  $\sigma$  é uma união de células  $|\tau_i|$  de dimensão menor. Cada célula  $\tau_i$  é chamada de *face* de  $\sigma$  e diremos que  $\sigma$  e  $\tau_i$  são *incidentes*, o que será denotado por  $\tau_i < \sigma$  (figura 2.6). Com esta notação, podemos descrever o *bordo combinatório* por uma soma formal de células:  $\partial\sigma = \sum_{\tau_i < \sigma} \tau_i$ . A estrela aberta  $\mathring{est}\tau$  de uma célula  $\tau$  é o conjunto de todas as células cujo fecho contém  $\tau$ :  $\mathring{est}\tau = \sum_{\tau < \sigma_i} \sigma_i$ . A *estrela* é o fecho da estrela aberta (figura 2.7). O *elo* de  $\tau$  é o conjunto das células que pertencem à estrela sem pertencer à estrela aberta:  $elo\tau = est\tau \setminus \mathring{est}\tau$ .

**Regularidade.** Neste trabalho, consideramos apenas complexos celulares finitos, ou seja, compostos de um número finito de células, e regulares. Num complexo celular regular, existem para cada duas células incidentes  $\rho$  e  $\tau$  com  $\dim(\tau) = \dim(\rho) - 2$ , duas células  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tais que  $\tau < \sigma_1 < \rho$  e  $\tau < \sigma_2 < \rho$  (figura 2.8).

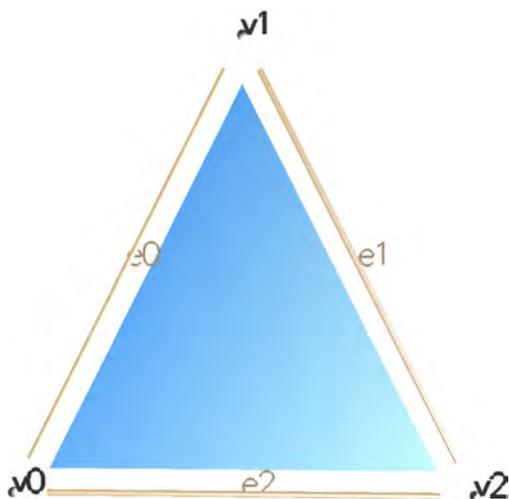


Figura 2.8: Regularidade de um complexo feito de um triângulo só: tem exatamente duas arestas  $e_i$  e  $e_{i-1 \bmod 3}$  entre o triângulo e o vértice  $v_i$ .

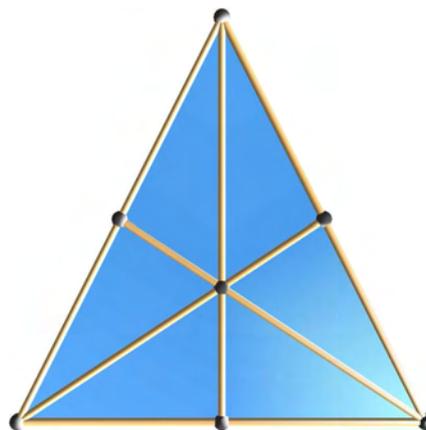


Figura 2.9: Subdivisão baricêntrica de um triângulo.

**Subdivisão baricêntrica.** Se a realização geométrica de cada célula for convexa ou se for possível deformá todas simultaneamente em células convexas, é então possível deformar o complexo celular num complexo simplicial mais fino. A cada seqüência de células  $\sigma_0^{i_0} < \sigma_1^{i_1} < \dots < \sigma_k^{i_k}$  com dimensão crescente ( $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ ), cada célula sendo face da seguinte, corresponde no complexo subdividido o  $k$ -simplexo, fecho convexo de  $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_k$ , onde  $\mathbf{z}_j$  é o baricentro de  $\sigma_j^{i_j}$  (figura 2.9). Em particular, a prova clássica

da decomposição em alças de uma variedade linear por partes requer duas subdivisões baricêntricas sucessivas para poder separar as alças uma da outra (Rourke & Sanderson, 1972). Essas considerações serão úteis para a prova da nossa construção do complexo de Morse.

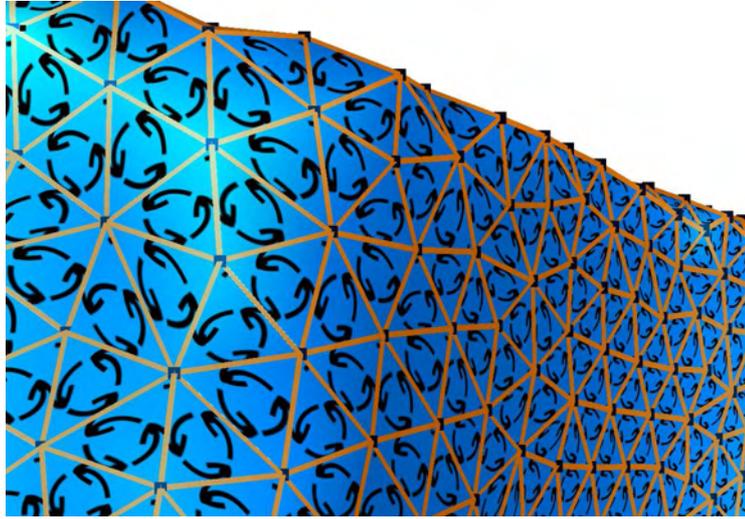


Figura 2.10: Superfície orientada: observe que aqui, todos os triângulos têm a mesma orientação, embora isso não seja necessário para definir  $[ : ]$ .

**Orientação.** Um complexo celular  $K$  pode ser *orientado* definindo  $[ : ] : K \times K \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  com as três restrições seguintes (Cooke & Finney, 1967). Primeiro,  $[\sigma : \tau] \neq 0$  se e somente se  $\tau$  é face de  $\sigma$  e  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ . Segundo, se  $\sigma$  é uma aresta (1-célula) incidente aos vértices (0-células)  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , então  $[\sigma : \tau_1] + [\sigma : \tau_2] = 0$ . Terceiro, se  $\rho$  e  $\tau$  são incidentes com  $\dim(\tau) = \dim(\rho) - 2$ , e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são tais que  $\tau < \sigma_1 < \rho$  e  $\tau < \sigma_2 < \rho$ , então  $[ : ]$  tem que satisfazer  $[\rho : \sigma_1] \cdot [\sigma_1 : \tau] + [\rho : \sigma_2] \cdot [\sigma_2 : \tau] = 0$ . Essa orientação será útil para definir o operador de bordo e para orientar o campo de vetor gradiente (figura 2.10). Por exemplo, na figura 2.8, a orientação do triângulo sobre cada aresta pode ser 1, e  $[e_i : v_i] = -1$ ,  $[e_i : v_{i+1}] = +1$ ,  $[e_i : v_{i+2}] = 0$ .

Uma variedade suave com uma função de Morse suave pode ser decomposta num complexo celular onde cada célula corresponde às partes homogêneas do seu campo de vetores gradiente, que está definido na próxima seção.

## 2.2

### Campos de vetores

Até agora, ambos os casos suave e discreto são coerentes com a intuição: uma variedade suave pode ser decomposta num complexo celular, e a realização

geométrica de um complexo celular pode ser uma variedade. Porém, as noções de campos de vetores suaves e discretos diferem, e coincidem somente quando considerarmos os seus fluxos. A razão principal deste fato vem da não diferenciabilidade das estruturas discretas. Para trabalhar com campos de vetores nos espaços combinatórios, Forman interpreta cada célula como mais que uma parte só da realização geométrica: a dimensão de uma célula será relacionada às propriedades diferenciais da sua vizinhança. Intuitivamente, a célula deveria corresponder a uma parte homogênea do campo gradiente que ela suporta. O fato deste campo gradiente interpolar suavemente entre uma célula e uma célula do seu bordo será representado por um casamento entre essas células.

### 2.2.1 Campos de vetores tangentes

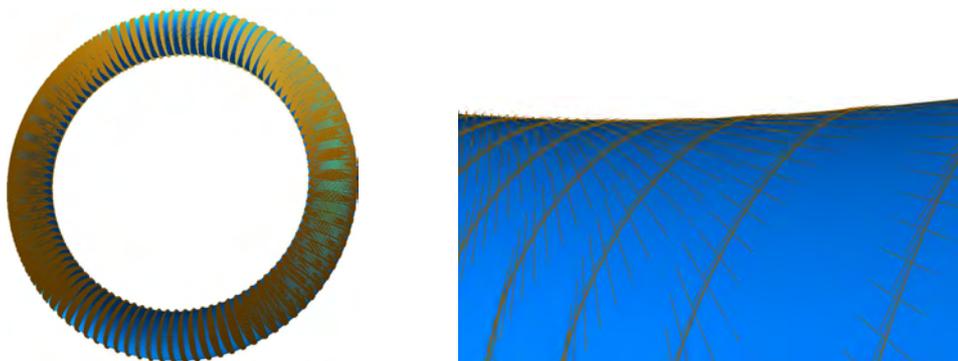


Figura 2.11: Variedade tangente de um toro suave: as linhas representam as direções tangentes gerando, em cada ponto, o plano tangente.

Dada uma curva suave  $\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow \mathcal{M}$  sobre uma variedade  $\mathcal{M}$ , podemos definir a *tangente* de  $\gamma$  em  $\gamma(0)$  por  $\gamma'(0)$ . O espaço tangente  $T\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  é a coleção dos pares  $(\gamma(0), \gamma'(0))$  para qualquer curva suave  $\gamma$  (figura 2.11). Um *campo de vetores* é uma seção reta suave de este espaço tangente, ou de maneira equivalente uma correspondência de cada ponto  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{M}$  com um vetor de  $T\mathcal{M}$  tangente em  $\mathbf{x}$  (do Carmo, 1976).

### 2.2.2 Casamento de células

Um *campo de vetores combinatório*  $\mathcal{V}$  é uma coleção  $\{(\tau^p < \sigma^{p+1})\}$  de pares disjuntos de células incidentes (Forman, 1995) (figura 2.12). Pode também ser definido como função  $\mathbf{V} : K \rightarrow K \cup \{0\}$  dada por  $\mathbf{V}(\tau) = \pm\sigma$  e  $\mathbf{V}(\sigma) = 0$ . Em particular,  $\mathbf{V} \circ \mathbf{V} = 0$ . Se  $K$  é orientado, o sinal de  $\mathbf{V}(\tau)$  é determinado por  $[\mathbf{V}(\tau) : \tau] = -1$ . A condição que os pares sejam disjuntos



Figura 2.12: Dois campos de vetores combinatórios.

significa que uma célula pode pertencer a no máximo um par. Se uma célula  $\sigma$  não pertence a nenhum par, então  $\mathbf{V}(\sigma) = 0$ . Essa definição funcional será útil para formalizar o fluxo. Conforme (Forman, 1995), representaremos um casamento ( $\tau^p < \sigma^{p+1}$ ) por uma seta indo de  $\tau^p$  a  $\sigma^{p+1}$ . A condição que os pares sejam disjuntos implica que uma célula pode ser a fonte ou o destino de no máximo uma seta.

## 2.3

### Funções de Morse

A idéia da teoria de Morse é ligar a topologia de um espaço aos elementos críticos de uma função escalar definida nesse espaço. O campo de vetores a considerar será o gradiente daquela função. Isto significa que o campo de vetores gradiente tem rotacional nulo, e no mundo discreto isso implica que seguindo o gradiente, não dá para voltar a uma célula já visitada.

#### 2.3.1

##### Função suave

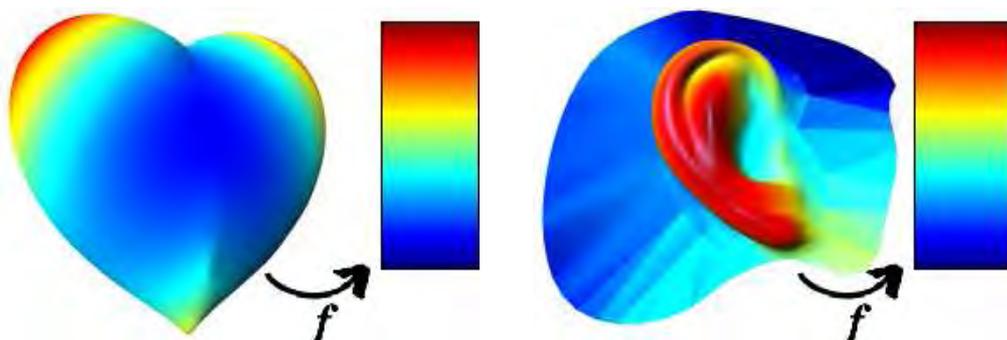


Figura 2.13: Duas funções de Morse suaves: distância até a origem e projeção sobre uma determinada direção.

Dada uma função escalar suave  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , o seu *gradiente*  $\nabla f$  é o campo de vetor descrito pelas derivadas de primeira ordem de  $f$ . Numa parametrização local  $(x_i)$  da variedade numa vizinhança do ponto  $\mathbf{x}$ , o gradiente se escreve  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Uma *curva integral* é a curva solução de  $\dot{\mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x})$ . Um ponto  $\mathbf{x}$

é *crítico* para  $f$  se o gradiente de  $f$  é nulo em  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $\mathbf{x}$  é uma extremidade de uma curva integral. A matriz *Hessiana*  $\text{Hess } f$  é descrita pelas derivadas de segunda ordem de  $f$ , e pode ser escrita via uma parametrização local pela matriz  $n \times n$   $\text{Hess } f = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}]_{ij}$  (Milnor, 1963). Uma função  $f$  é uma função de Morse válida se não possuir ponto crítico degenerado, ou seja, a matriz Hessiana de  $f$  é sempre inversível nos pontos críticos. Os exemplos clássicos de funções de Morse suaves são: a distância a um determinado ponto e a projeção sobre uma direção fixa (figura 2.13). Na decomposição de Morse–Smale é ainda preciso que as curvas integrais se cruzem transversalmente, o que é automático para uma função de Morse discreta.

### 2.3.2

#### Casamentos acíclicos

A definição de uma função de Morse discreta é melhor formulada como integral de um campo de vetores discreto. Para isto, é necessário que o campo seja acíclico (Forman, 1995). No mundo contínuo, isto significa que as curvas integrais são fechadas.

**Caminhos integrais.** Um *caminho integral* de  $\mathcal{V}$  é a concatenação de passos  $\blacktriangleleft \tau_i^p \sigma_i^{p+1} \tau_{i+1}^p \blacktriangleright$ , onde  $\tau_i$  e  $\tau_{i+1}$  são faces distintas de  $\sigma_i$  e onde  $\mathbf{V}(\tau_i) = \pm \sigma_i$ . Dá para concatenar dois passos  $\blacktriangleleft \tau_i \sigma_i \tau_{i+1} \blacktriangleright$  e  $\blacktriangleleft \tau_{i+1} \sigma_{i+1} \tau_{i+2} \blacktriangleright$  se o segundo começar onde o primeiro termina. Repare que um caminho integral contém células de apenas duas dimensões diferentes. A *multiplicidade* de um passo é o produto  $\mu(\blacktriangleleft \tau_i \sigma_i \tau_{i+1} \blacktriangleright) = -[\sigma_i : \tau_i] \cdot [\sigma_i : \tau_{i+1}]$ . E a multiplicidade de um caminho é o produto das multiplicidades dos passos.

**Gradiente discreto.** Um caminho integral é *fechado* se a última célula do último passo é igual à primeira célula do primeiro passo. Por exemplo, o campo de vetores da figura 2.12(a) contém um caminho integral fechado de comprimento 4 (à esquerda). Um *campo de vetores gradiente discreto* é um campo de vetores combinatório que não possui nenhum caminho integral fechado. Por exemplo, o campo de vetores da figura 2.12(a) não é um gradiente discreto, enquanto que o da figura 2.12(b) o é. Essa definição determina de fato uma ordem sobre as células de um caminho integral, e esta ordem pode ser estendida para o complexo celular inteiro, o que define uma função de Morse discreta.

**Função de Morse discreta.** Formalmente, uma *função de Morse discreta* sobre um complexo celular  $K$  é uma função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  com valores reais

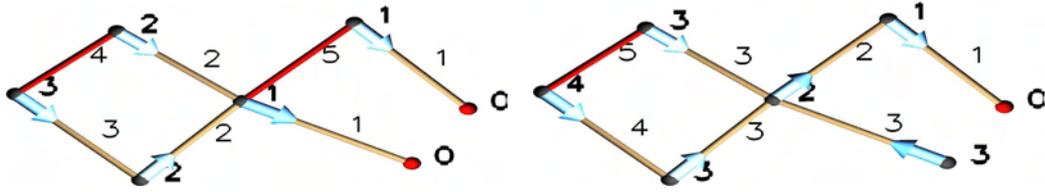


Figura 2.14: Duas funções de Morse discretas. A primeira corresponde ao gradiente discreto da figura 2.12(b).

satisfazendo:

$$\begin{cases} \forall \sigma^p \in K, & \text{card} \{ \rho^{p+1} > \sigma^p : f(\rho) \leq f(\sigma) \} \leq 1 & e \\ \forall \sigma^p \in K, & \text{card} \{ \tau^{p-1} < \sigma^p : f(\tau) \geq f(\sigma) \} \leq 1 \end{cases}$$

O gradiente discreto  $\mathcal{V}$  correspondente é então o conjunto de pares  $(\tau^p < \sigma^{p+1})$  tais que  $(f(\tau) \geq f(\sigma))$ . Pela regularidade do complexo, as duas desigualdades não podem ser simultaneamente igualdades, o que assegura que  $\mathcal{V}$  é um campo de vetores combinatório válido (figura 2.14). Com a representação de  $\mathcal{V}$  por setas, as setas apontam para os valores baixos, e neste sentido  $\mathcal{V}$  corresponde mais a  $-\nabla f$  do que a  $\nabla f$  (figura 2.15). Esse gradiente contém quase toda



Figura 2.15: Um gradiente discreto e a função de Morse discreta correspondente no cubo duplo.

a informação da topologia de  $f$ , e usaremos principalmente o gradiente no lugar da função. No entanto, a função de Morse discreta informa mais do que o gradiente sobre as alturas relativas de partes separadas do complexo, pois para duas funções de Morse discretas terem o mesmo gradiente, basta que elas gerassem a mesma ordem em cada caminho integral.

## 2.4

### Elementos críticos

A parte mais significativa dessas funções de Morse são os seus pontos críticos. De fato, a topologia do espaço controla esses pontos críticos, em natureza e número. Em particular, uma função suave num espaço topológico complicado deve ter uma geometria que gera muitos pontos críticos. Essa natureza dos elementos críticos será caracterizada, no mundo suave, pelo índice, que será diretamente a dimensão da célula crítica no mundo discreto.

#### 2.4.1

##### Pontos críticos

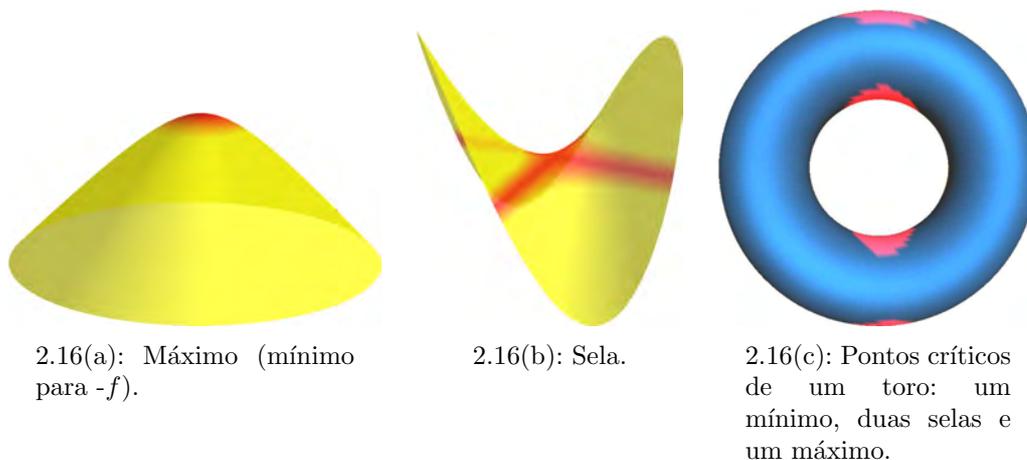


Figura 2.16: Pontos críticos da projeção sobre o eixo vertical: os pontos críticos estão no meio das regiões vermelhas.

Como vimos na seção anterior, um ponto  $\mathbf{x}$  é *crítico* para uma função de Morse suave  $f$  se o gradiente de  $f$  se anula em  $\mathbf{x}$  (Milnor, 1963). Como  $f$  é uma função de Morse, a Hessiana de  $f$  em  $\mathbf{x}$  não tem autovalores nulos, e se o domínio de  $f$  é uma variedade de dimensão  $n$ , a Hessiana em  $\mathbf{x}$  possui  $p$  autovalores negativos e  $n - p$  autovalores positivos. Este número inteiro  $p$  é chamado de *índice* de  $\mathbf{x}$ . O índice de fato caracteriza o ponto crítico. Por exemplo, um índice 0 significa que  $\mathbf{x}$  é um mínimo local, enquanto um índice  $n$  corresponde a um máximo. Pontos críticos com índice  $0 < p < n$  serão chamados de *p-selas* (figura 2.16).

#### 2.4.2

##### Células críticas

No mundo discreto, a definição ainda capta a idéia de ponto extremo de um caminho integral. Uma célula  $\sigma^p$  é crítica para um gradiente discreto  $\mathcal{V}$  se não pertence a nenhum par de  $\mathcal{V}$ . As células críticas são pintadas de vermelho

nas figuras 2.12(b), 2.14 e 2.15. Esta definição pode ser escrita com a versão funcional do gradiente:  $\sigma$  é crítica se  $\mathbf{V}(\sigma) = 0$  e  $\sigma \notin \text{Im } \mathbf{V}$ . E pode ainda ser escrita em termos da função de Morse discreta (Forman, 1995):

$$\begin{cases} \text{card} \{ \rho^{p+1} > \sigma^p : f(\rho) \leq f(\sigma) \} = 0 & e \\ \text{card} \{ \tau^{p-1} < \sigma^p : f(\tau) \geq f(\sigma) \} = 0 \end{cases}$$

A classificação dos pontos críticos suaves fica, definindo o índice de  $\sigma$  como a sua dimensão.

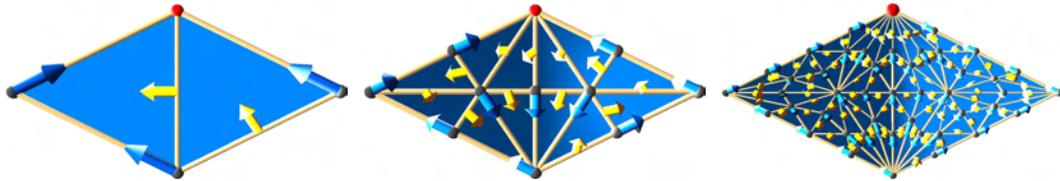
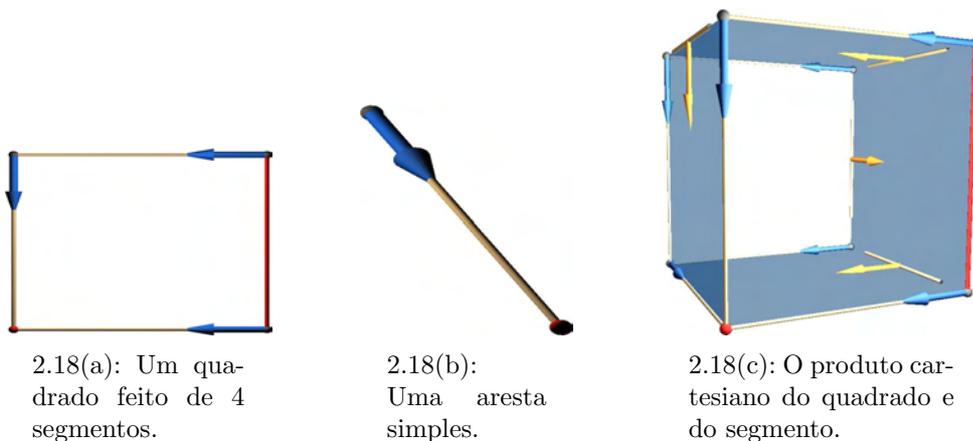


Figura 2.17: Invariância do gradiente discreto com a subdivisão.

Funções de Morse discretas tem propriedades interessantes como invariância por subdivisão: dada uma função de Morse discreta num complexo  $K$ , pode ser simplesmente estendida na subdivisão baricêntrica de  $K$  preservando as suas células críticas (figura 2.17). Esse bom comportamento com as operações topológicas ainda vale para o produto Cartesiano: dadas duas funções de Morse discretas em dois complexos celulares, podemos construir uma função de Morse discreta no produto Cartesiano destes complexos que possua como células críticas apenas os produtos das células críticas originais (Lewiner, 2002) (figura 2.18).



2.18(a): Um quadrado feito de 4 segmentos.

2.18(b): Uma aresta simples.

2.18(c): O produto cartesiano do quadrado e do segmento.

Figura 2.18: As células críticas do produto cartesiano são os produtos cartesianos das células críticas.

Já tocamos a diferença mais profunda entre as teorias de Morse suave e discreta. Enquanto a célula é *a priori* definida como um pedaço da realização

geométrica de um complexo celular, na teoria de Forman a célula leva ainda informações sobre propriedades diferenciais locais ao redor da célula. Nesta perspectiva, uma célula pode ser interpretada como união de pedaços próximos de curvas integrais do gradiente. Isto justifica que um mínimo da função seja um vértice, pois nenhuma curva integral sai de um mínimo para  $-\nabla f$ . Similarmente, um máximo tem que ser uma célula de dimensão máxima, pois curvas integrais saem do máximo em todas as direções. Perto de uma sela, as curvas integrais saem da sela em algumas direções, e entram em outras, o que corresponde a células de dimensões intermediárias. Essas dimensões tornaram-se mais precisas na decomposição em alças descritas na próxima seção.

## 2.5

### Propriedades topológicas

A relação entre os elementos críticos e a topologia do espaço ficará mais clara agora. No mundo suave, o teorema principal da teoria de Morse afirma que uma variedade suave com uma função de Morse suave  $f$  tem o mesmo tipo de homotopia que um complexo celular  $K$ , tal que cada célula de dimensão  $p$  de  $K$  corresponde de forma bijetiva a um ponto crítico de índice  $p$  de  $f$ . Este resultado ainda vale no mundo discreto, usando *homotopia simples* (Cohen, 1973) no lugar da homotopia. Nesse contexto, variedades suaves podem ser decompostas em estruturas discretas, possibilitando o uso de ferramentas do mundo suave (tal como a homotopia) e do mundo discreto (tal como homologia e característica de Euler). Portanto, as duas partes desta seção poderiam ser aplicadas aos dois mundos.

### 2.5.1

#### Homotopia e decomposição em alças

As desigualdades de Morse podem ser deduzidas diretamente da *decomposição em alças* de uma variedade de acordo com uma função de Morse suave. Uma alça  $H^p$  de dimensão  $n$  e índice  $p$  é o produto Cartesiano de duas bolas:  $H^p = \mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{n-p}$ . O fato de colar uma alça a uma variedade, identificando  $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{B}^{n-p} \subset H^p$  com uma parte da variedade, muda a topologia da variedade, e as mudanças de topologia podem ser interpretadas como a colagem de uma alça. Esta operação muda o *tipo de homotopia* (Hatcher, 2002).

**Tipo de homotopia.** Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes se puderem ser deformados de maneira contínua um no outro. Formalmente,  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia se existir quatro funções contínuas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$ ,  $h_X : X \times [0, 1] \rightarrow X$  e  $h_Y : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$

tais que  $h_X(\mathbf{x}, 0) = f \circ g(\mathbf{x})$ ,  $h_X(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$  e  $h_Y(\mathbf{y}, 0) = g \circ f(\mathbf{y})$ ,  $h_Y(\mathbf{y}, 1) = \mathbf{y}$ . Por exemplo, cada símbolo  $\approx$  na figura 2.19 corresponde a uma equivalência topológica, enquanto os objetos separados por um símbolo  $\rightarrow$  não tem o mesmo tipo de homologia.

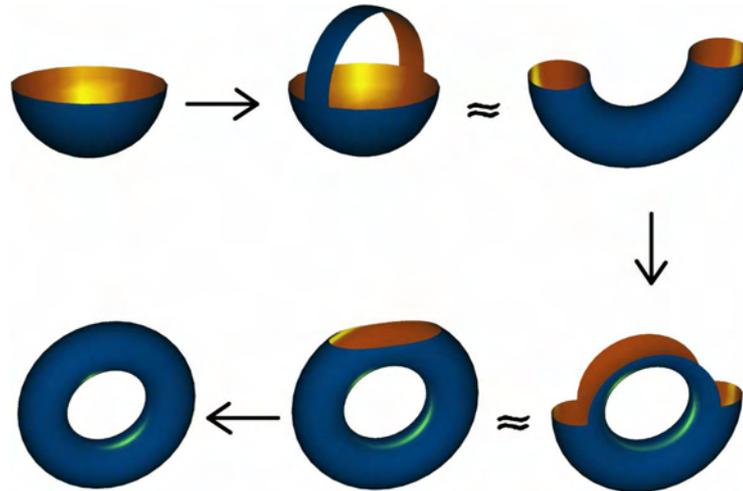


Figura 2.19: Decomposição em alças de um toro.

**Decomposição em alças.** O teorema de Morse prova que não há mudança do tipo de homologia entre cortes abaixo e acima de um nível sem ponto crítico, e mudança do tipo de homologia entre cortes abaixo e acima de um nível contendo um único ponto crítico de índice  $p$  corresponde a colar uma alça de índice  $p$  (Fomenko, 1987) (figura 2.20). Um complexo celular  $H^M$  pode então ser construído a partir de uma função de Morse colando alças sucessivas: uma alça  $H^0$  de índice 0 para o mínimo absoluto  $f_0$  de  $f$ , e depois uma alça é colada a  $H^0$  para o ponto crítico com o menor valor  $f_1 > f_0$  e assim por diante. Uma variedade suave é então homotopicamente equivalente a um complexo celular finito tal que cada ponto crítico de índice  $p$  corresponda a uma célula–alça de dimensão  $p$ : este complexo é a decomposição em alças. Esta decomposição pode ser descrita a partir da decomposição de Morse–Smale apresentada no final deste capítulo. As ferramentas do mundo discreto a seguir, em particular as desigualdades de Morse, podem ser usadas sobre  $K$  via  $H^K$ .

## 2.5.2

### Homotopia simples e desigualdades de Morse

A caracterização de objetos em matemática envolve geralmente a noção de invariantes. Por exemplo, o tipo de homotopia de uma variedade suave é um invariante topológico, o que significa que duas variedades que têm tipos de homotopia diferentes não podem ser iguais (homeomorfas). Mesmo que a

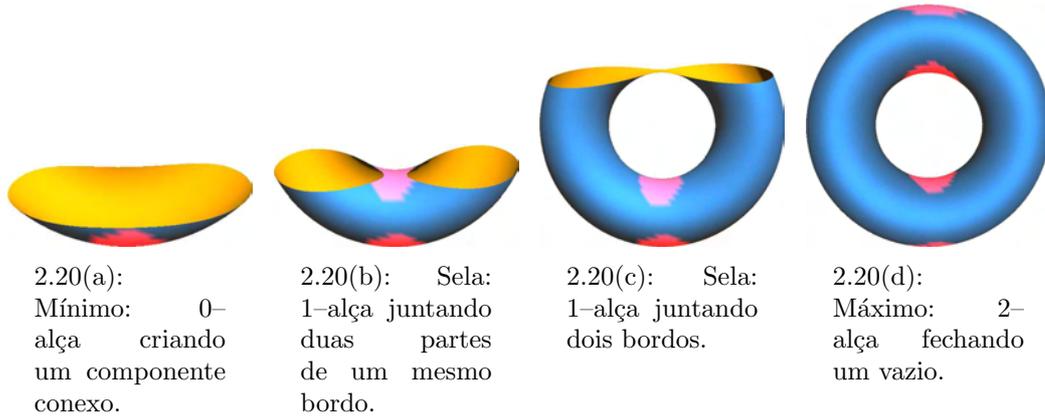


Figura 2.20: Cada um dos quatro pontos críticos do toro corresponde a uma alça.

decomposição em alças  $H^{\mathcal{M}}$  tenha o mesmo tipo de homotopia que  $\mathcal{M}$ , esta não é por si só um invariante, pois a mesma variedade com duas funções de Morse diferentes terá duas decomposições em alças diferentes. Porém, a decomposição em alças de uma variedade é um complexo celular, no qual os invariantes da topologia algébrica se aplicam, pelo menos para caracterizar a topologia PL da variedade (Rourke & Sanderson, 1972). Em particular, invariantes topológicos tais como a *homologia singular* e a *característica de Euler–Poincaré* podem ser relacionados ao número de células críticas de qualquer função de Morse através das desigualdades de Morse, usando a decomposição em alças no caso diferencial, ou a *homotopia simples* no caso discreto.

**Operador de bordo.** Os objetos considerados pela homologia são somas formais de células, todas tendo a mesma dimensão, chamadas de *cadeia*  $c_p = \sum_{\sigma^p \in K} c_\sigma \sigma^p$ ,  $c_\sigma$  sendo coeficientes do anel  $\mathbb{K}$ . A coleção  $C_p$  das cadeias de dimensão  $p$  é assim um módulo livre gerado pelas células de dimensão  $p$ . O objeto central da homologia é o *operador de bordo*  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ , que é simplesmente definido, a partir da orientação  $[ : ]$  do complexo, por  $\partial_p(\sigma^p) = \sum_{\tau^{p-1} \in K} [\sigma^p : \tau^{p-1}] \tau^{p-1}$  (Cooke & Finney, 1967). Por exemplo, a figura 2.21 mostra o operador de bordo num pequeno modelo feito de 4 triângulos. Podemos verificar que o bordo do quadrado inteiro é composto das quatro arestas externas:  $\partial_2(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = e_0 + e_3 + e_5 - e_7$ . A definição de  $[ : ]$  implica que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ , ou seja,  $\text{Im } \partial_{p+1} \subseteq \text{ker } \partial_p$ .

**Homologia.** Este fato pode ser escrito por uma seqüência exata (Hatcher, 2002):

$$\{0\} \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \{0\}$$

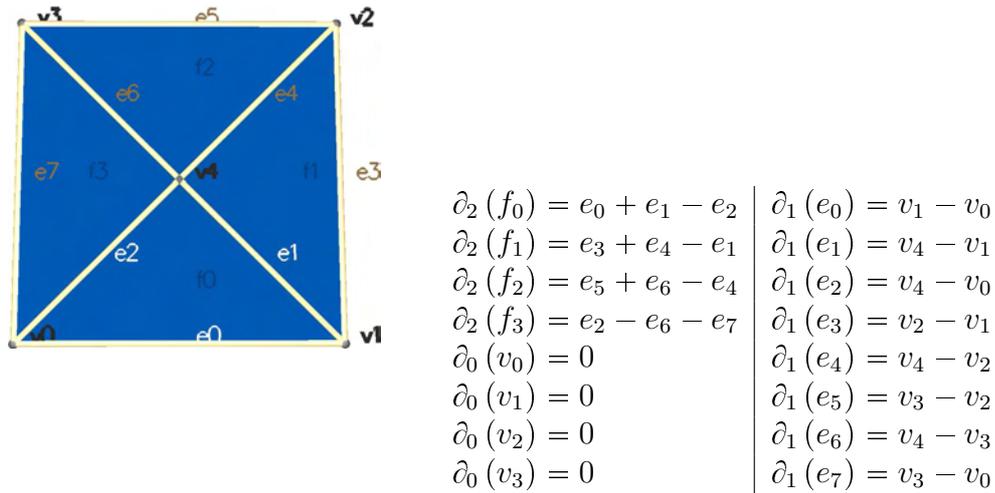


Figura 2.21: O operador de bordo num quadrado de quatro triângulos.

A direção das setas no diagrama vem do fato que o operador de bordo diminui a dimensão das cadeias. O grupo de homologia de ordem  $p$ ,  $H_p(K)$ , é definido por  $\ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$ . Estes grupos são invariantes topológicos: espaços homeomorfos têm os mesmos grupos de homologia. As dimensões destes módulos  $\beta_p(K)$  são chamadas de *números de Betti* de  $K$ . Por exemplo, na figura 2.21, temos que  $\ker \partial_2 = \{0\}$ ,  $\text{Im } \partial_2 = \ker \partial_1 \approx \mathbb{K}^4$ ,  $\text{Im } \partial_1 \approx \mathbb{K}^4$ ,  $\ker \partial_0 = C_0 \approx \mathbb{K}^5$ . Portanto, obtemos  $H_0 = \mathbb{K}$ ,  $H_1 = H_2 = \{0\}$ , e então  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

**Característica de Euler–Poincaré.** Anotando por  $\#_p$  o número de células de dimensão  $p$  de  $K$ , a *característica de Euler–Poincaré* é a soma alternada destas quantidades:  $\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \#_p(K)$ . Assim, pode ser definido a partir da decomposição em alças para as variedades suaves. A característica de Euler–Poincaré também é um invariante topológico, pois pode ser escrito em termos dos números de Betti:  $\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \beta_p(K)$ . Por exemplo na figura 2.21 temos  $\chi = \#_5 - 8 + 4 = \beta_0 - 0 + 0 = 1$ .

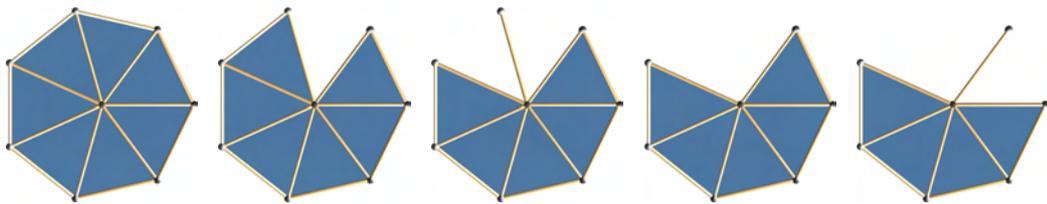


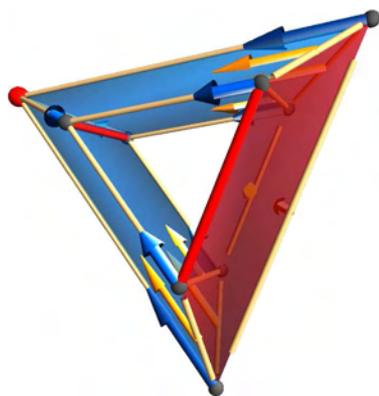
Figura 2.22: Colapso de um heptágono: colapsos não alteram a característica de Euler.

**Homotopia simples** A homotopia de um complexo celular é usualmente definida na sua realização geométrica. Porém, uma versão mais fraca da equivalência homotópica, chamada de *homotopia simples*, pode ser definida

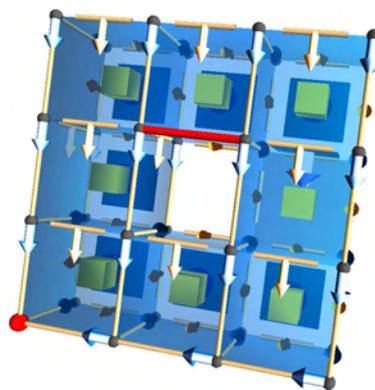
combinatorialmente por colapsos e extensões sucessivas (Cohen, 1973). Se  $\tau^{p-1} < \sigma^p$  são duas células de um complexo celular  $K$  e  $\tau$  não é face de nenhuma outra célula de  $K$ , então diremos que  $K$  *colapsa* sobre  $K \setminus \{\tau, \sigma\}$  (figura 2.22). A operação inversa de um colapso se chama *extensão*. Se um complexo pode ser obtido de  $K$  por uma seqüência de colapsos e extensões, diremos que ele tem um mesmo tipo de homotopia simples que  $K$ .

**Decomposições discretas.** O teorema principal da teoria de Morse discreta de Forman prova que um complexo celular com uma função de Morse discreta  $f$  tem o mesmo tipo de homotopia simples que um outro complexo celular tendo exatamente uma célula de dimensão  $p$  para cada  $p$ -célula crítica de  $f$  (Forman, 1995). Por exemplo, figura 2.5 mostra a decomposição discreta de um toro com apenas quatro pontos críticos, que difere da decomposição de um toro sólido (figura 2.23). Este teorema coloca, no limite do nosso conhecimento, a teoria de Morse–Forman como a única versão discreta da teoria de Morse que acerta a equivalência topológica.

**Desigualdades de Morse.** O número de  $p$ -células na decomposição de  $K$  por uma função  $f$  é o número de elementos críticos de índice  $p$ , que anotaremos  $m_p(f)$ . Já que a característica de Euler–Poincaré é um invariante topológico, a característica desta decomposição é a mesma que a característica de  $K$ , e assim pode escrita:  $\chi(\mathcal{M}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p m_p(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \beta_p$ . Esta igualdade é fraca, pois pode ser deduzida de um conjunto de desigualdades mais fortes, chamadas de desigualdades de Morse:  $\sum_{p \leq k} (-1)^{k-p} \beta_p \leq \sum_{p \leq k} (-1)^{k-p} m_p(f)$ . Somando estas desigualdades, obtemos  $\beta_p \leq m_p(f)$ . Existem duas obstruções



2.23(a): Toro simples, com um vértice crítico, duas arestas críticas e uma face crítica.



2.23(b): Toro sólido com um vértice crítico e uma aresta crítica.

Figura 2.23: Funções de Morse ótimas caracterizam o complexo, por exemplo para distinguir entre um toro–superfície e um toro cheio.



Figura 2.24: Uma função de Morse não ótima num toro:  $m_0 = 1 = \beta_0$ ,  $m_1 = 3 \geq 2 = \beta_1$  e  $m_2 = 2 \geq 1 = \beta_2$ .

para essas desigualdades não serem igualdades: ou a função de Morse não é ótima (figura 2.24), no pior caso tendo todas as células críticas ( $f(\sigma^p) = p$ ,  $\mathcal{V} = \emptyset$  e  $\mathbf{V} \equiv 0$ ), ou o complexo celular tem características topológicas finas que a homologia não detecta, por exemplo elementos específicos da homotopia ou a colapsibilidade (Crowley *et al.*, 2005).

## 2.6 Cancelamentos

Funções de Morse são ligadas à topologia do espaço, mas ainda de uma forma fraca. Uma função de Morse particular dá apenas um limite superior à complexidade da topologia, e uma função de Morse complexa não implica que a topologia não seja trivial. Em particular, é simples criar uma função de Morse crítica em cada ponto (com  $f(\sigma) = \dim \sigma$ ,  $\mathcal{V} = \emptyset$  ou  $\mathbf{V} \equiv 0$  no caso discreto), o que não informa muito sobre a topologia do espaço. Porém, o menor número possível de elementos críticos caracteriza melhor a topologia. Nos casos simples, este mínimo corresponde aos números de Betti do espaço. Além disso, provamos em (Lewiner, 2002) que este é um invariante topológico para complexos celulares cuja realização é uma variedade de dimensão 2 ou 3. Para chegar ao mínimo, uma opção é gerar uma função de Morse razoável e depois cancelar pares de elementos críticos.

### 2.6.1 Inversão

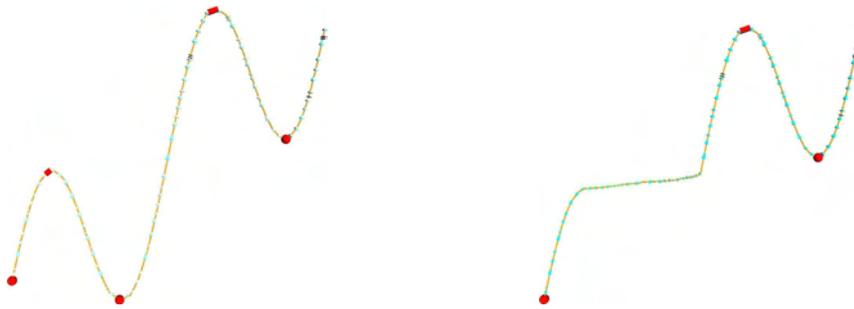


Figura 2.25: Inversão de um gradiente suave à esquerda do complexo.

Dado uma função de Morse  $f$ , dois pontos críticos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  com índices  $p$  e  $p - 1$ , respectivamente, podem ser cancelados se as curvas integrais que vão para  $\mathbf{y}$  e as curvas integrais que saem de  $\mathbf{x}$  se cruzam transversalmente num único ponto  $\mathbf{z}$ . Neste caso, há uma nova função de Morse  $f'$  tal que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  não são mais críticos. Além disso,  $f'$  coincide com  $f$  numa vizinhança arbitrariamente pequena da curva integral  $\mathbf{xzy}$  (Fomenko, 1987) (figura 2.25). Este cancelamento é obtido invertendo o sinal do gradiente sobre a curva integral, e interpolando na vizinhança dela para preservar a diferenciabilidade do gradiente. Esta propriedade foi intensamente usada para a demonstração da conjectura de Poincaré em altas dimensões.

### 2.6.2 Caminho gradiente único

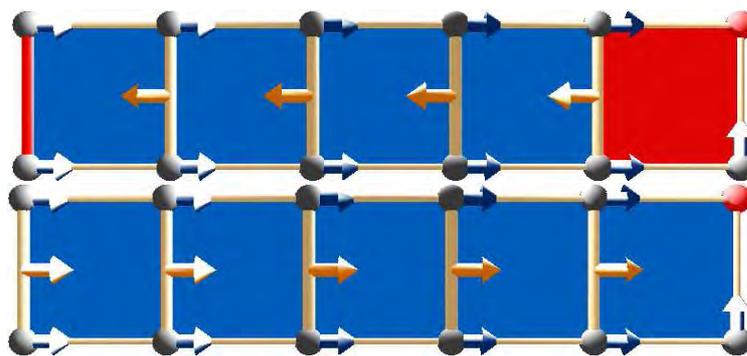


Figura 2.26: Inversão de um caminho gradiente discreto.

O procedimento é bem parecido no caso discreto, entretanto é bem mais simples. Dado um gradiente discreto  $\mathcal{V}$  e duas células críticas  $\sigma^p$  e  $\tau^{p-1}$ , tem-se um único caminho integral  $\tau_0, \sigma_0, \dots, \tau_r, \sigma_r, \tau_{r+1}$  com  $\tau_0 < \sigma$  e  $\tau_{r+1} = \tau$ , assim o gradiente  $\mathcal{V}'$  definido por  $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{(\tau_i < \sigma_i)\} \cup \{(\tau_{i+1} < \sigma_i)\} \cup \{(\tau_0 < \sigma)\}$  coincide com  $\mathcal{V}$  fora do caminho integral (figura 2.26). Além disso,  $\sigma$  e  $\tau$  não são

mais críticas para  $\mathcal{V}'$  (Forman, 1995). Em particular, células críticas incidentes podem ser canceladas se não existe outro caminho integral ligandó-as. Isto será a base da nossa construção gulosa de funções de Morse discretas.

## 2.7

### Fluxos e bacias

As técnicas de cancelamento permitem, em casos regulares, chegar a funções de Morse com o menor número de elementos críticos. Isso nos dá uma ferramenta poderosa para descrever a topologia a partir da geometria de uma função de Morse. Mas a teoria de Morse pode ser usada no sentido contrário, usando a topologia para caracterizar a geometria da função. Neste caso, o primeiro passo é definir os elementos críticos, e depois definir as bacias de gradiente homogêneo que correspondem às zonas de influência dos elementos críticos. Esta decomposição em bacias é usualmente referenciada como complexo de Morse–Smale (figura 2.27).

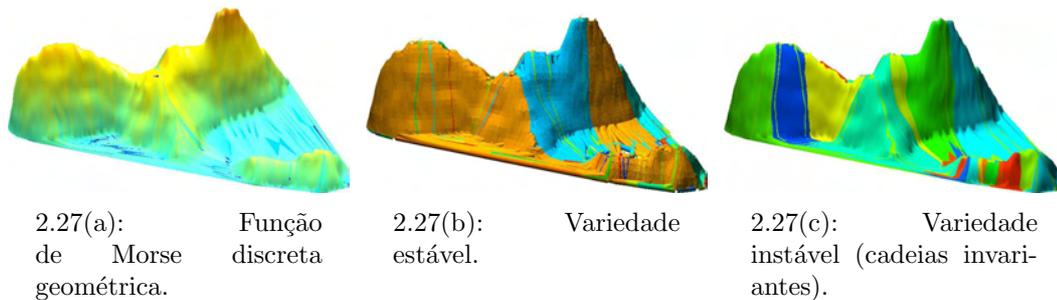


Figura 2.27: Variedades estável e instável sobre um modelo do Pão de Açúcar com ruído.

### 2.7.1

#### Variedades estáveis e instáveis

A definição do fluxo  $\phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  para um campo de vetores gradiente suave vem dos sistemas dinâmicos: para cada estado inicial  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ , o fluxo associa o estado  $\phi(\mathbf{x}, t)$  obtido no tempo  $t$  respeitando  $\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla f(\phi(\mathbf{x}, t))$ . Temos que  $\phi(\phi(\mathbf{x}, t), t') = \phi(\mathbf{x}, t + t')$  e que a curva integral passando por  $\mathbf{x}$  pode ser parametrizada pelo fluxo como  $\{\phi(\mathbf{x}, t), t \in \mathbb{R}\}$ .

A *variedade estável*  $W^s(\mathbf{x})$  do ponto crítico  $\mathbf{x}$  é o conjunto de todos os pontos  $\mathbf{y} \in \mathcal{M}$  tais que  $\phi(\mathbf{y}, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}$ . Análogamente, a *variedade instável*  $W^u(\mathbf{x})$  do ponto crítico  $\mathbf{x}$  é o conjunto de todos os pontos  $\mathbf{y} \in \mathcal{M}$  tais que  $\phi(\mathbf{y}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}$ . De fato, as variedades estáveis e instáveis são variedades abertas. Além disso, se  $f$  é uma função de Morse–Smale, ou seja, se as suas curvas integrais se cruzam transversalmente, as intersecções destas variedades são bolas topológicas.

### 2.7.2 Cadeias invariantes



Figura 2.28: O fluxo de um vértice é o vértice apontado pelo gradiente:  
 $\Phi(v_0) = v_0 + \partial_1(\mathbf{V}(v_0)) = v_0 + \partial_1(e) = v_0 + (v_1 - v_0) = v_1$ .

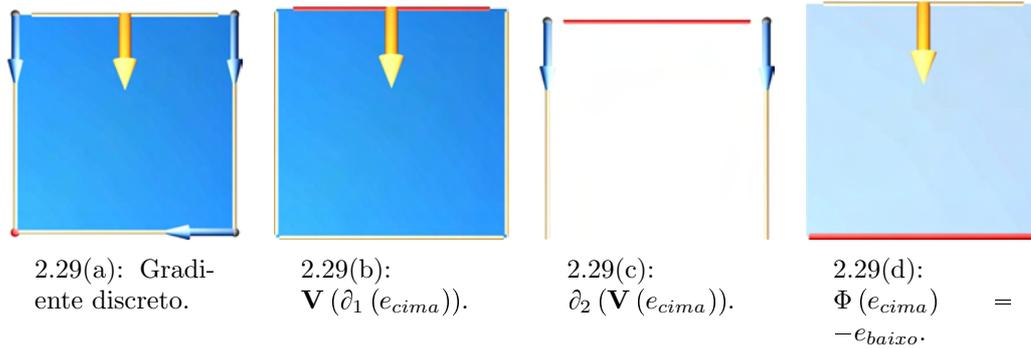


Figura 2.29: Definição combinatória do fluxo, as arestas do quadrado sendo orientadas no sentido trigonométrico:  $\Phi(e_{cima}) = e_{cima} + \mathbf{V}(\partial_1(e_{cima})) + \partial_2(\mathbf{V}(e_{cima})) = e_{cima} + \mathbf{V}(v_{esquerda} - v_{direita}) + \partial_2(-face) = e_{cima} + ((-e_{esquerda}) - e_{direita}) - (e_{cima} + e_{esquerda} + e_{direita} + e_{baixo}) = -e_{baixo}$ .

A idéia do fluxo é acompanhar o gradiente. Por isso, o fluxo de um vértice deve ser o vértice apontado pelo gradiente (figura 2.28). Isto pode ser definido combinatorialmente por  $\Phi(\sigma^0) = \sigma^0 + \partial_1(\mathbf{V}(\sigma^0))$  (figura 2.28). Podemos então imaginar o fluxo de uma célula de dimensão mais alta  $\sigma^p$  como a coleção de todas as células adjacentes que contém uma curva integral atravessando  $\sigma$ . Logo a imagem de  $\sigma^p$  é então uma  $p$ -cadeia. A definição para vértices pode ser então estendida para qualquer célula:  $\Phi(\sigma^p) = \sigma^p + \mathbf{V}(\partial_p(\sigma^p)) + \partial_{p+1}(\mathbf{V}(\sigma^p))$  (figura 2.29). O fluxo estende ainda para qualquer cadeia:  $\Phi : C_p \rightarrow C_p$  com  $\Phi = \text{Id} + \mathbf{V}\partial_p + \partial_{p+1}\mathbf{V}$ . Observe que o fluxo comuta com o operador de bordo (Forman, 1995), e isso anuncia o fato do fluxo preservar a homologia.

Este fluxo pode ser iterado, e pela estrutura de gradiente de  $\mathbf{V}$  que não contém órbitas fechadas, este fluxo iterado terá alguns pontos fixos: as *cadeias invariantes*  $\Phi^\infty(c) = c$  (figura 2.30). Observe que estas cadeias invariantes correspondem às bacias instáveis, enquanto que as bacias estáveis não estão diretamente consideradas aqui, pois não tem definição direta do fluxo inverso em  $K$  (mas sim no dual algébrico de  $K$  (Forman, 2002)). Além disso, há uma correspondência bijetiva entre o conjunto  $C_p^\Phi$  das cadeias invariantes de dimensão  $p$  e o módulo livre  $M_p$  gerado pelas células críticas de dimensão

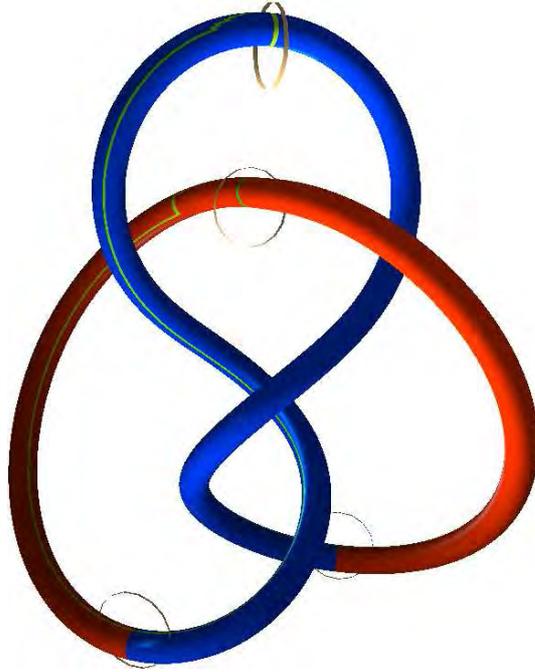


Figura 2.30: Cadeias invariantes do fluxo de uma função de Morse discreta geométrica: as selas estão enfatizadas.

$p$  (Forman, 1995). Mais precisamente,  $M_p$  e  $C_p^\Phi$  são isomorfos :  $M_p \xrightarrow{\Phi^\infty} C_p^\Phi$ , e este isomorfismo é a peça-chave do complexo de Morse (figura 2.30).

## 2.8

### Complexos de Morse

O objetivo deste trabalho é construir complexos de Morse e aplicá-los para dois casos específicos: a decomposição de Morse–Smale, que é a decomposição em bacias estáveis e instáveis, e a homologia de Morse–Witten, que nós permitirá calcular de forma eficiente os grupos de homologia e a decomposição de ciclos sobre os geradores da homologia.

#### 2.8.1

##### Decomposição de Smale

Dado uma função de Morse–Smale  $f$ , a decomposição de Morse–Smale de  $\mathcal{M}$  por  $f$  é um complexo celular  $K$  cuja realização geométrica é  $|K| = \mathcal{M}$  (Smale, 1960, Palis & de Melo, 1982). As células de  $K$  são as intersecções das variedades estáveis e instáveis de  $f$  sobre  $\mathcal{M}$  (figura 2.31). Em particular, a variedade estável de um mínimo local  $\mathbf{x}$  é reduzida ao ponto  $\mathbf{x}$ , e então  $K$  contém todos os mínimos. De forma similar,  $K$  contém todos os máximos. Pela condição de transversalidade, as variedades estáveis e instáveis de uma sela  $\mathbf{x}$  se interceptam em  $\mathbf{x}$ . Então,  $K$  contém todos os pontos críticos de  $f$ . A estrutura

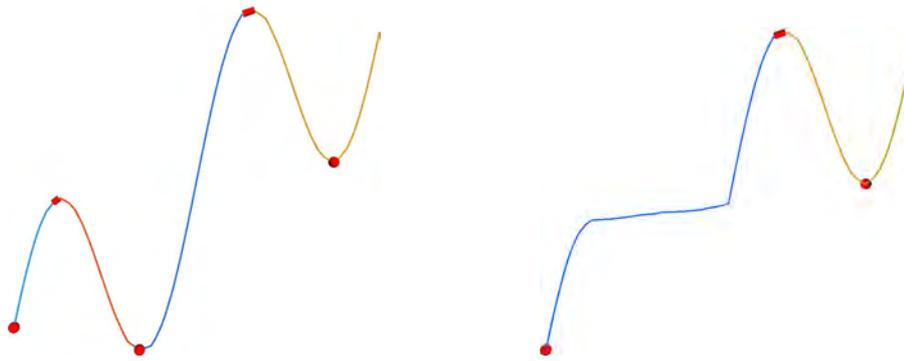


Figura 2.31: Intersecção das cadeias invariantes para o fluxo e o fluxo inverso da figura 2.25.

de  $K$  é ainda mais precisa, pois cada célula de  $K$  é incidente a vértices de índices certos. Por exemplo, numa 2-variedade, as células de  $K$  sempre são incidente a, na ordem, uma sela, um máximo, uma sela e um mínimo. Esta decomposição relaciona as teorias de Morse suave e discreta, e permite também cálculos eficientes da homologia de  $\mathcal{M}$ .

### 2.8.2 Homologia de Witten

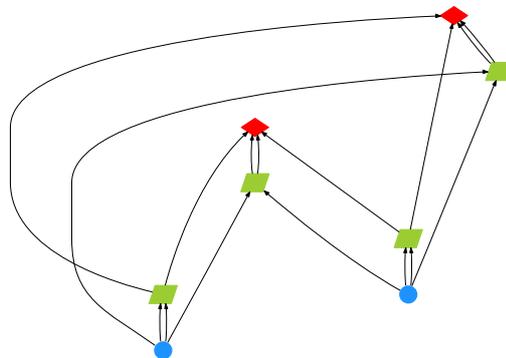


Figura 2.32: Complexo de Morse do toro entrelaçado da figura 2.30.

A decomposição de Morse–Smale no mundo discreto não é definida diretamente. As bacias instáveis são as cadeias invariantes do fluxo. Podemos considerar as bacias estáveis como as duais das instáveis, ou seja, considerando  $-f$  no dual de  $K$ . Porém, o complexo de Morse–Witten é completamente definido pelo fluxo: anotando por  $\text{Id}$  a inclusão de  $C_p^\Phi$  em  $C_p$ , podemos definir o operador de bordo  $\tilde{\partial}$  diretamente em  $C_p^\Phi$  de tal maneira que o seguinte

diagrama comute (Forman, 1995):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \{0\} & \xleftarrow{\partial_0} & C_0 & \xleftarrow{\partial_1} & C_1 & \xleftarrow{\partial_2} & C_2 & \xleftarrow{\partial_3} & \dots & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & \{0\} \\
 & & \Phi^\infty \downarrow & \uparrow \text{Id} & \Phi^\infty \downarrow & \uparrow \text{Id} & \Phi^\infty \downarrow & \uparrow \text{Id} & & & \Phi^\infty \downarrow & \uparrow \text{Id} & \\
 \{0\} & \xleftarrow{\tilde{\partial}_0} & C_0^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} & C_1^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_2} & C_2^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_3} & \dots & \xleftarrow{\tilde{\partial}_n} & C_n^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} & \{0\}
 \end{array}$$

Então, o isomorfismo  $M_p \xrightarrow{\Phi^\infty} C_p^\Phi$  estende este operador de bordo  $\tilde{\partial}_p$  a  $M_p$ . Isto gera um novo complexo:

$$\{0\} \xleftarrow{\tilde{\partial}_0} M_0 \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} M_1 \xleftarrow{\tilde{\partial}_2} M_2 \xleftarrow{\tilde{\partial}_3} \dots \xleftarrow{\tilde{\partial}_n} M_n \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} \{0\}$$

Este complexo tem, de fato, a mesma homologia que o complexo original, mas contém bem menos células (somente as células críticas). Por exemplo, na figura 1.3 e na figura 2.32, a homologia pode ser calculada usando somente as 4 células do complexo de Morse e o operador de bordo representado nos diagramas. Isso permite calcular eficientemente os grupos de homologia, uma vez que podemos calcular  $\tilde{\partial}$ . Forman provou que o bordo de uma célula  $\sigma$  de  $M_p$  é uma soma formal de células  $\tau$  de  $M_{p-1}$ , onde o coeficiente de  $\tau$  é a soma da multiplicidade de todos os caminhos do gradiente partindo de uma face de  $\sigma$  e chegando a  $\tau$  (Forman, 1995). A coleção destes caminhos do gradiente pode ser facilmente formalizada em termos de camadas e grafos, como vamos ver no próximo capítulo.

### 3

## Estrutura de uma função de Morse discreta

Para construir um complexo de Morse a partir de uma função geométrica, precisaremos estudar mais a fundo a estrutura de uma função de Morse discreta. Já vimos duas representações diferentes das estruturas de Morse discretas: uma função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  e o seu gradiente discreto  $\mathcal{V}$  que é um casamento acíclico. Vamos ver agora em detalhes uma terceira versão em termos de grafos, que já foi apresentada em (Lewiner, 2002).

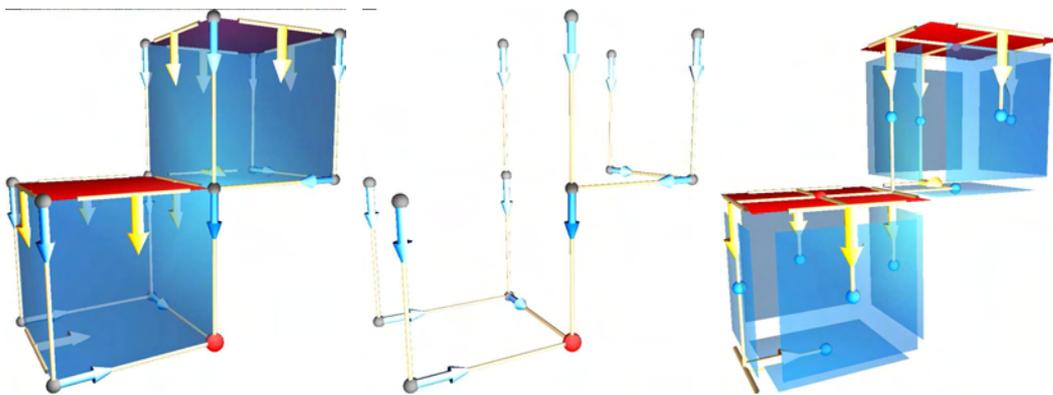


Figura 3.1: O gradiente discreto da figura 2.15, decomposto na camada primal  $\mathcal{L}_{01}$  e na camada dual  $\mathcal{L}_{21}$

A primeira seção deste capítulo é uma versão simplificada (e mais clara) de alguns dos resultados de (Lewiner, 2002), mais especificamente a estrutura de camadas de uma função de Morse e o hipergrafo correspondente. A segunda seção apresenta uma construção algorítmica e versátil de funções de Morse, da qual as construções ótimas de (Lewiner, 2002, Lewiner *et al.*, 2003b, Lewiner *et al.*, 2004) podem ser descritas de forma concisa. A última seção é uma simples avaliação do fluxo nessas estruturas de grafos. Por um lado, essa construção identifica propriedades de conexidades nos grafos com as partes estáveis do fluxo, enfatizando o ponto de vista dos grafos. Por outro lado, este cálculo pode ser escrito usando equações (3-3), (3-5) e (3-9), o que torna a computação do fluxo muito eficiente. Esta seção introduz também algoritmos e estruturas de dados simples que serão as peças das nossas construções. Eles estão misturados no texto de propósito para enfatizar a proximidade da teoria

e da sua implementação. Visto que esses algoritmos são eficientes, reforça-se a idéia de que a teoria de Morse discreta de Forman se adapta muito bem a aplicações do mundo discreto.

### 3.1

#### Camadas e hipergrafos

Um complexo celular finito  $K$  pode ser representado por um grafo  $\mathcal{H}$ , chamado *grafo de Hasse*, que representa explicitamente cada relação de incidência dentro de  $K$ . Um gradiente discreto  $\mathcal{V}$  corresponde a um sub-grafo de  $\mathcal{H}$  o qual tem uma estrutura de camada bem particular, e que nós a iremos descrever agora. Veremos que, para um gradiente discreto fixo, cada par de dimensões  $(p, p+1)$  ou  $(p, p-1)$  corresponde ao hipergrafo  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$  ou  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$  (figura 3.1). De fato, o contrário também é verdade, pois há uma correspondência bijetiva entre os gradientes discretos e certas coleções de hipergrafos de camadas. Uma camada representará então as relações de incidência e o gradiente de certas classes de células, que estão definidas na próxima seção.

#### 3.1.1

##### Classificação de células

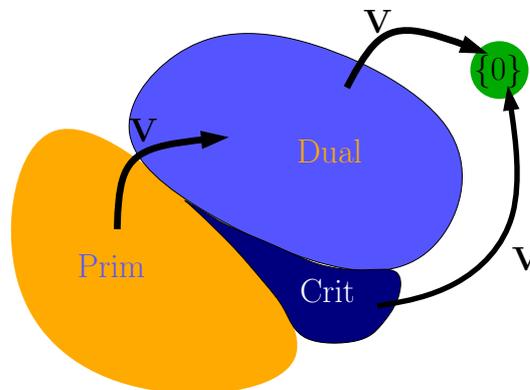


Figura 3.2: O operador  $\mathbf{V}$  em cada classe de células.

Com um campo de vetores combinatório  $\mathcal{V}$  definido num complexo celular  $K$ , as células de  $K$  são naturalmente classificadas entre a imagem e o núcleo de  $\mathbf{V}$ , notando que  $\mathbf{V} \circ \mathbf{V} = 0$ , ou seja,  $\text{Im } \mathbf{V} \subset \text{ker } \mathbf{V}$ . A primeira classe de células é o conjunto  $\text{Crit}_p$  das *células críticas* de dimensão  $p$ :  $\text{Crit}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \in \text{ker } \mathbf{V} \setminus \text{Im } \mathbf{V}\}$  (seção 2.4.2 *Células críticas*). Relembrado que cada  $p$ -célula regular (não crítica)  $\sigma^p$  pertence a um par de  $\mathcal{V}$  (seção 2.2.2 *Casamento de células*),  $\sigma^p$  ou é a fonte de uma seta ( $\sigma^p < \rho^{p+1}$ ) ou o destino dela ( $\tau^{p-1} < \sigma^p$ ) (figura 3.2). No primeiro caso,  $\sigma$  será classificada como *primal*,

enquanto que no segundo caso será classificada como *dual*. Isto pode ser escrito com  $\mathbf{V}$ :  $\text{Prim}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \notin \ker \mathbf{V}\}$  e  $\text{Dual}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \in \text{Im } \mathcal{V}\}$ .

Esta classificação vem do fato de que cada caminho do gradiente contém células de apenas duas dimensões. Ela também foi usada em (Forman, 1995), mas apenas para o cálculo do fluxo, e em (Lewiner, 2002) para construir funções de Morse discretas ótimas. Esta construção é baseada em hipergrafos, cuja estrutura representa de maneira bem simples o fluxo iterado  $\Phi^\infty$  de  $\mathcal{V}$ .

### 3.1.2

#### Hipergrafo de uma camada

A definição de caminhos integrais de Forman (seção 2.3.2 *Casamentos acíclicos*)  $\langle \tau_0^p \sigma_0^{p+1} \tau_1^p \sigma_1^{p+1} \dots \sigma_{r-1}^{p+1} \tau_r^p \rangle$  restringe as células  $\sigma_i$  e  $\tau_i$  a pertencer as duas dimensões consecutivas  $p$  e  $p + 1$ . Todos esses caminhos entre as dimensões  $p$  e  $p + 1$  podem ser representados por um grafo, que chamamos de *hipergrafo da camada*  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$  de  $\mathcal{V}$ . Os nós desse grafo são as células críticas e primais de dimensão  $p$ , e as linhas são as células duais de dimensão  $p + 1$ . Uma linha é incidente a um nó se a célula que ela representa é incidente à célula representada pelo nó.

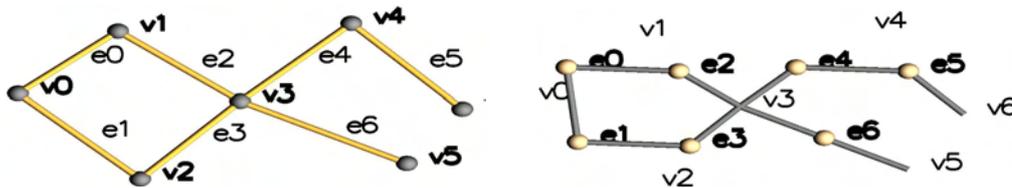


Figura 3.3: O dual de um grafo, obtido invertendo-se vértices (nós) e arestas (linhas), não é genericamente um grafo, mas sim um hipergrafo: por exemplo,  $v_3$  não é uma linha regular.

**Hipergrafo.** Como podemos ver, este grafo não é um grafo regular, pois as linhas podem ser incidentes a apenas um nó (representando o passo do gradiente  $\langle \tau_0 \sigma_0 \tau_1 \rangle$  com  $\tau_1 = \tau_0$ ) ou a mais de dois nós. No último caso, a linha será chamada de *hiperlinha*, e o grafo de *hipergrafo* (figura 3.3). Formalmente, um hipergrafo é um conjunto de nós e linhas, onde as linhas são coleções de nós (Berge, 1970). Observe que uma linha pode ser incidente mais de uma vez ao mesmo nó. Anotaremos um hipergrafo por  $hg$  (Nós, Linhas, incidências), onde incidências :  $\text{Linhas} \times \text{Nós} \rightarrow \mathbb{Z}$  indica a incidência de uma linha sobre um nó.

**Orientação.** Esta representação de um hipergrafo indica a orientação  $[ : ]$  de  $K$  pelo sinal de incidências  $= [ : ]$ . Porém, esta representação ainda não

descreve completamente o campo de vetores discreto, pois não indica qual nó é casado com qual linha. Esta informação pode ser incluída considerando *hipergrafos orientados*:  $\vec{\text{hg}}$  (Nós, Linhas, incidências, orientação). Formalmente, um hipergrafo é orientado pela escolha de um *nó fonte* para cada linha tal que um nó seja a fonte de no máximo uma linha (figura 3.4). Esta definição é mais restritiva que a de (Berge, 1970), e corresponde à definição de uma função de Morse discreta (seção 2.3.2 *Casamentos acíclicos*).

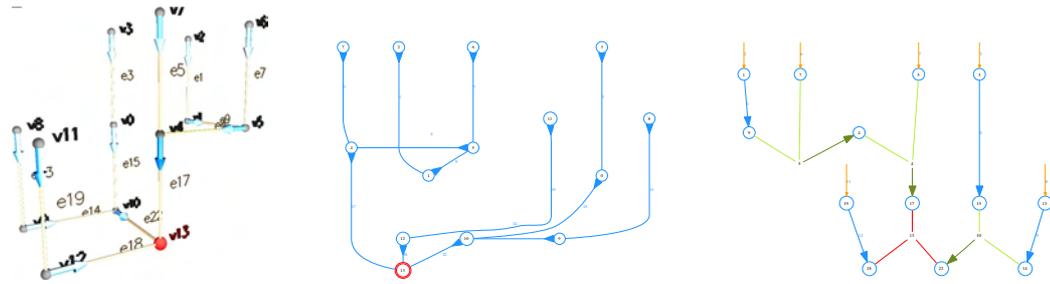


Figura 3.4: Primeiras camadas  $\mathcal{L}_{01}$  e  $\mathcal{L}_{10}$  do gradiente discreto da figura 2.15

**Camada primal e dual.** O hipergrafo da camada  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$  de  $\mathcal{V}$  pode ser escrito então como  $\vec{\mathcal{L}}_{p(p+1)} = \vec{\text{hg}}(\text{Prim}_p \cup \text{Crit}_p, \text{Dual}_{p+1}, <, \mathcal{V})$  (figuras 3.4 e 3.5). Como os seus nós são células primais e críticas de  $\mathcal{V}$ , será chamado de *hipergrafo primal*. Podemos construir o seu dual, no sentido usual de teoria dos grafos (Berge, 1970) invertendo o papel das linhas e dos nós (figura 3.3). Depois, retirando as linhas críticas e acrescentando as  $(p+1)$ -células críticas (agora nós), obtemos o *hipergrafo dual*:  $\vec{\mathcal{L}}_{(p+1)p} = \vec{\text{hg}}(\text{Dual}_{p+1} \cup \text{Crit}_{p+1}, \text{Prim}_p, >, \mathcal{V})$ .

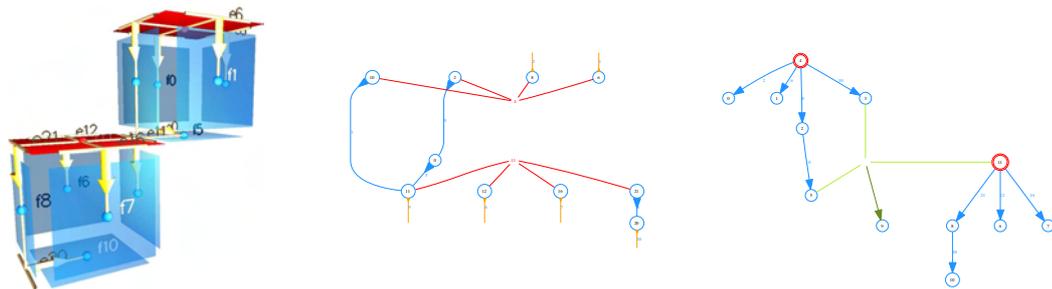


Figura 3.5: Últimas camadas  $\mathcal{L}_{12}$  e  $\mathcal{L}_{21}$  do gradiente discreto da figura 2.15

### 3.1.3 Hiperfloresta

A definição acima de hipergrafos de camadas vale para qualquer campo de vetores combinatório. A aciclicidade do gradiente discreto corresponde

diretamente à aciclicidade dos hipergrafos das camadas. Da mesma maneira que campos de vetores gerais correspondem a hipergrafos orientados, campos de vetores gradientes correspondem a *hiperflorestas*.

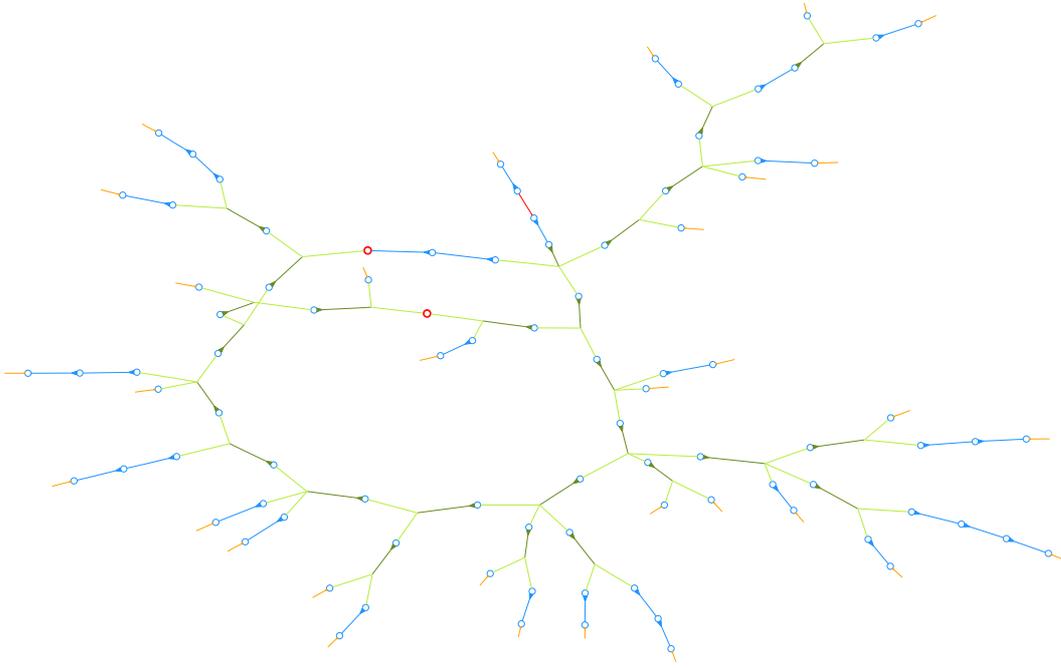


Figura 3.6: Camada  $\mathcal{L}_{23}$  de uma função de Morse ótima na esfera homológica de Poincaré: o hipergrafo orientado é acíclico, no entanto hipergrafo sem a orientação contém ciclos.

**Aciclicidade.** Definimos a camada de um campo de vetores discreto como a representação dos caminhos integrais. Podemos formalizar esta noção definindo um *hipercaminho*  $\triangleleft n_0 l_0 n_1 l_1 \dots l_{r-1} n_r \triangleright$  como uma seqüência de um nó inicial  $n_0$ , nós  $n_i$  e linhas  $l_i$  intermediários onde  $n_i$  é o nó fonte de  $l_i$  e  $l_i$  é incidente à  $n_{i+1}$ . Esta definição é apenas uma tradução da definição de um caminho integral (seção 2.3.2 *Casamentos acíclicos*). Um hipergrafo corresponde a uma camada de gradiente discreto se não houver nenhum hipercaminho fechado. Neste caso, será chamado de *hiperfloresta* (figura 3.6).

**Componentes regulares.** Considerando mais detalhadamente a camada  $\mathcal{L}_{01}$  de um campo de vetores discretos, reparamos que só contém (hiper)linhas regulares, ou seja, linhas incidentes a exatamente dois nós. Estas camadas são então grafos regulares. Agora, podemos extrair uma estrutura parecida para hipergrafos gerais, chamada de *parte regular*, que tem o mesmo conjunto de nós e apenas as linhas regulares. Os componentes conexos desta parte regular serão chamados de *componentes regulares* do hipergrafo (figura 3.7).

**Raízes.** Em (Lewiner, 2002), provamos as seguintes propriedades para hiperflorestas de camada de um gradiente discreto.

**Proposição 3.1** *Considerando uma camada de um gradiente discreto, ou de forma equivalente uma hiperfloresta, as proposições a seguir são verdadeiras:*

1. *O dual de uma hiperfloresta é uma hiperfloresta.*
2. *Os componentes regulares de uma hiperfloresta são árvores regulares não orientadas.*
3. *Para cada componente regular de uma hiperfloresta, há exatamente um nó, chamado de raiz, que não é fonte de nenhuma linha regular (contendo exatamente dois nós). Em consequência, a raiz ou é crítica, ou é a fonte de uma hiperlinha não regular. Numa camada primal, todas as linhas são orientadas na direção da raiz, enquanto numa camada dual são orientadas para fora da raiz.*

*Prova.* A primeira parte da proposição é imediata, pois um hipercaminho fechado num hipergrafo também é um hipercaminho fechado no hipergrafo dual. Como os nós e linhas críticas não são orientados, a proposição vale para camadas primais e duais. Isto assegura a equivalência direta entre um gradiente discreto e a representação por hiperflorestas.

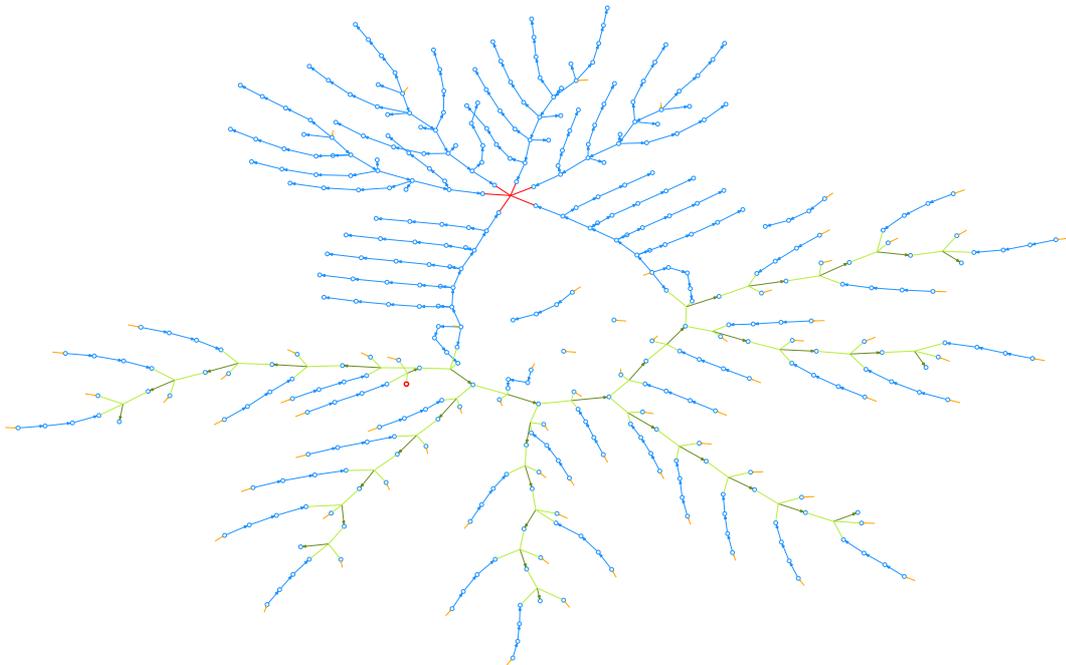


Figura 3.7: Camada  $\mathcal{L}_{21}$  de uma função de Morse ótima sobre  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ : as hiperlinhas estão pintadas de verde e abóbora, e os componentes regulares (em azul) são árvores.

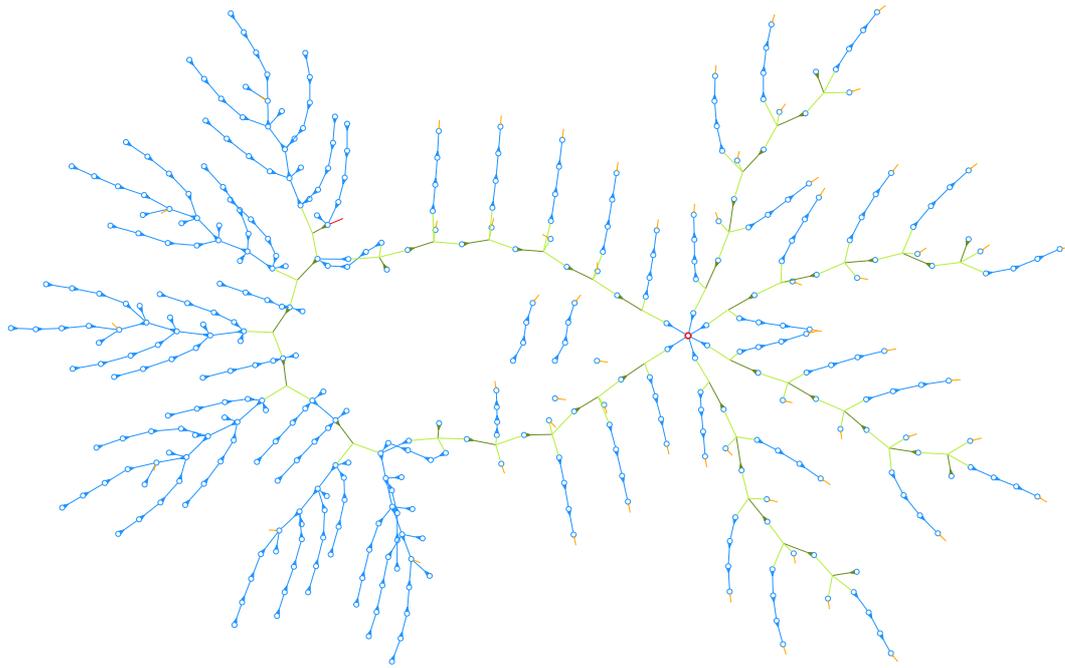


Figura 3.8: Camada  $\mathcal{L}_{12}$  de uma função de Morse ótima sobre  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ : existe no máximo uma hiperlinha não regular (em verde ou abóbora) entrando no componente regular (em azul).

A segunda parte pode ser provada por absurdo, supondo que um componente regular não seja uma árvore não orientada, isto é, que contenha um ciclo  $n_0 l_0 n_1 \dots n_r l_r n_{r+1} = n_0$  com  $l_i$  incidente a  $n_i$  e  $n_{i+1}$ . Como as linhas são regulares, a fonte da linha  $l_k$  no hipergrafo ou é  $n_k$  ou  $n_{k+1}$ . Supondo, sem perda de generalidade, que a fonte de  $l_0$  seja  $n_1$ . Temos então que a fonte de  $l_1$  tem que ser  $n_2$ , pois um nó, em particular  $n_1$ , é a fonte de no máximo uma linha. Acompanhando o ciclo, temos que o nó fonte de  $l_k$  sempre é  $n_{k+1}$ . O ciclo considerado é então de fato um hipercaminho fechado, o que contradiz a definição de hiperfloresta.

Agora vamos provar que tem apenas uma raiz por componente regular (figura 3.8). Já que cada linha de uma hiperfloresta de camada é orientada, cada linha do componente regular tem o seu nó fonte dentro do componente regular. Relembrado que uma árvore com  $k$  nós tem  $k - 1$  linhas, existe então exatamente um nó que não é fonte de uma linha do componente regular. Assim, ou este nó é crítico, ou a linha do qual é fonte não é regular, pois caso contrário pertenceria ao componente regular. A orientação para dentro ou fora da raiz vem da limitação de no máximo uma linha destino por nó. Com isso podemos seguir a orientação das linhas de forma única dentro do componente regular, como na prova da segunda proposição. O único nó onde estes caminhos param ou saem do componente regular é a raiz. ■

## 3.2

### Construção gulosa

A definição do gradiente como casamento acíclico lembra dois algoritmos clássicos da teoria dos grafos. O primeiro é o algoritmo de casamento perfeito (Lovasz & Plummer, 1986), que tenta extrair pares de nós distintos, os nós de um par sendo adjacentes no grafo. Isto corresponde à definição de um campo de vetores combinatório geral, e é meio caminho para a definição do gradiente. A outra metade é a aciclicidade. Já que um grafo acíclico é uma árvore, usaremos o algoritmo clássico de extração de árvores geradoras em grafos (Berge, 1970) (figura 3.13), que é mais eficiente com estruturas de dados apropriadas como por exemplo **Junta & Busca** (Tarjan, 1975).

Nesta seção, apresentaremos uma construção gulosa de funções de Morse discretas, que na verdade pode gerar *qualquer* gradiente discreto. Descreveremos esses métodos principalmente por pseudo-código, pois os algoritmos são bem simples e versáteis. Por exemplo, as construções de função de Morse ótimas (Lewiner, 2002, Lewiner *et al.*, 2003b, Lewiner *et al.*, 2004) podem ser derivadas dele. O algoritmo guloso será o passo central da nossa construção de complexos de Morse.

### 3.2.1

#### Estrutura de dados e algoritmos básicos

A formulação geral que adotamos para a teoria de Morse enfatiza a representação por árvores, e então a nossa estrutura de dados completa este ponto de vista representando mais o casamento de cada célula que os elementos do teste de aciclicidade.

**Complexos celulares.** Um complexo celular é representado por uma coleção de células. Cada célula contém uma referência às suas células incidentes, bordo e co-bordo, a representação do gradiente discreto, e o valor associado pela função de Morse discreta (estrutura 3.1). Por exemplo, a `.estr` do vértice 3 da figura 3.3 contém os identificadores de aresta 2,3,4 e 6, enquanto o `.bord` da aresta 6 contém os identificadores de vértices 3 e 5.

**Exemplo: conversão de função para gradiente.** A estrutura de dados 3.1 é fácil de se manipular. Para ilustrar isso, o algoritmo 3.2 calcula o gradiente discreto  $\mathcal{V}$  a partir de uma função de Morse discreta:  $\mathcal{V} = \{(f(\tau) \geq f(\sigma))\}$  (figura 3.9). Isto é a operação inversa do algoritmo 3.7, que é o passo final da construção descrita nesta seção.

---

**Estrutura 3.1** Célula  $\sigma_i^p$

---

*Representação do complexo celular*

dim	$\sigma_i^p = p$	// Dimensão da célula
id	$\sigma_i^p = i$	// Identificador da célula
bord	$\sigma_i^p = \text{lista} \{ [\sigma_j^{p-1} : \tau_j^{p-1}] j \}$	// Bordo $\partial_p \sigma_i^p$
estr	$\sigma_i^p = \text{lista} \{ [\rho_j^{p+1} : \sigma_i^p] j \}$	// Co-bordo $\sigma_i^p$

*Representação das funções de Morse*

casad	$\sigma_i^p = \mathbf{V}(\sigma_i^p)$	// Imagem ou pré-imagem por $\mathbf{V}$
val	$\sigma_i^p = \mathfrak{f}(\sigma_i^p)$	// Imagem pela função de Morse $\mathfrak{f}$
bacia	$\sigma_i^p = \rho^p \in K$	// Raiz do componente regular
homo	$\sigma_i^p = \rho^p \in M_p$	// Decomposição homológica
peso	$\sigma_i^p \in \mathbb{R}$	// Peso representando $f$

---

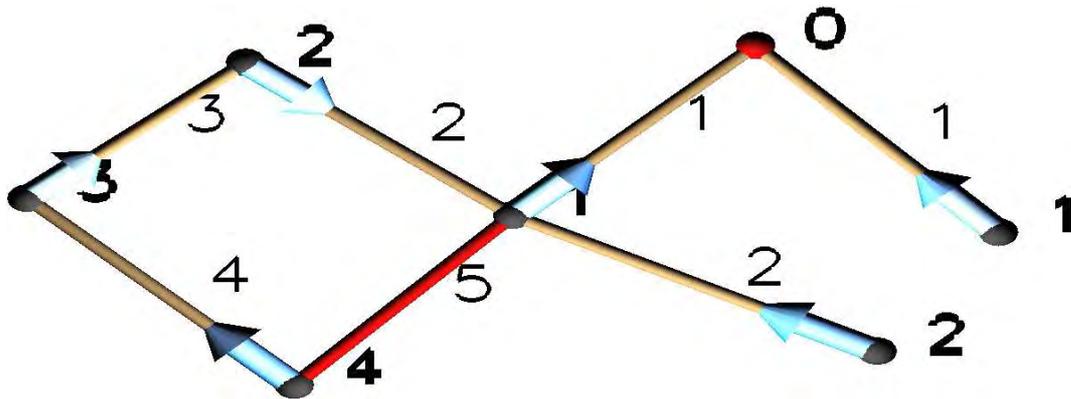


Figura 3.9: Exemplo da execução de `fun2grad` (algoritmo 3.2), com as notações da figura 3.3: vértice  $v_0$  tem valor inferior ou igual ao valor da aresta  $e_0$  no seu co-bordo, então o algoritmo os casa. Depois,  $v_1$  com  $e_2$ ,  $v_2$  com  $e_1$ ,  $v_3$  com  $e_4$ ,  $v_4$  fica crítico,  $v_5$  com  $e_6$ ,  $v_6$  com  $e_5$ . As arestas têm co-bordos vazios, então o algoritmo para nesse ponto.

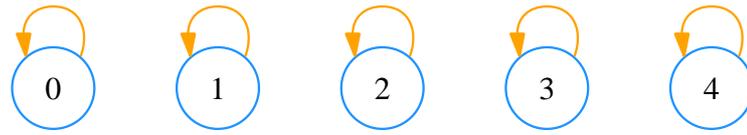
---

**Algoritmo 3.2** `fun2grad`: calcula  $\mathcal{V}$  a partir de  $\mathfrak{f}$

---

1:	<b>para</b> $\sigma \in K$ <b>faz</b>	// Para cada célula de $K$
2:	<b>para</b> $\rho \in \sigma.\text{estr}$ <b>faz</b>	// Para cada célula do co-bordo
3:	<b>se</b> $\mathfrak{f}(\rho) \leq \mathfrak{f}(\sigma)$ <b>então</b>	// Condição da função de Morse
4:	$\sigma.\text{casad} \leftarrow \rho$	// Define o gradiente
5:	$\rho.\text{casad} \leftarrow \sigma$	// Define o gradiente
6:	<b>fim se</b>	
7:	<b>fim para</b>	
8:	<b>fim para</b>	

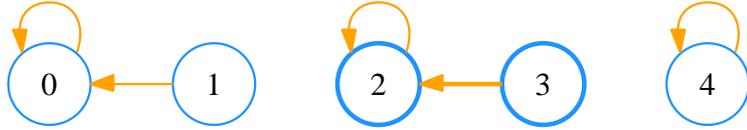
---



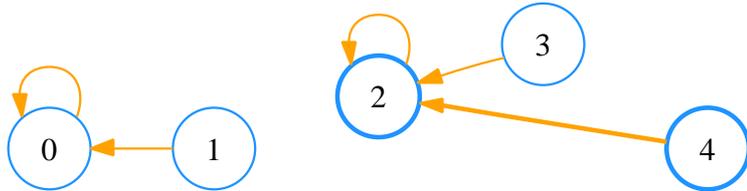
3.10(a): Estado inicial.



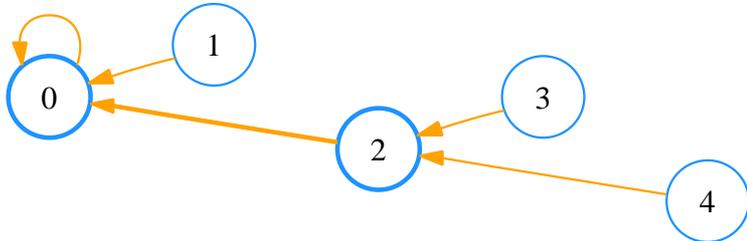
3.10(b): Junta 0 com 1.



3.10(c): Junta 2 com 3.



3.10(d): Junta 2 com 4.



3.10(e): Junta 0 com 2.

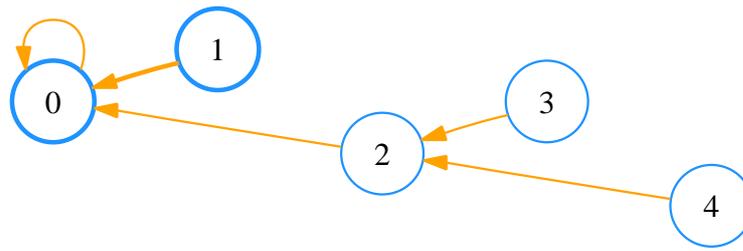
Figura 3.10: Exemplo da execução de *junta* (algoritmo 3.3).

---

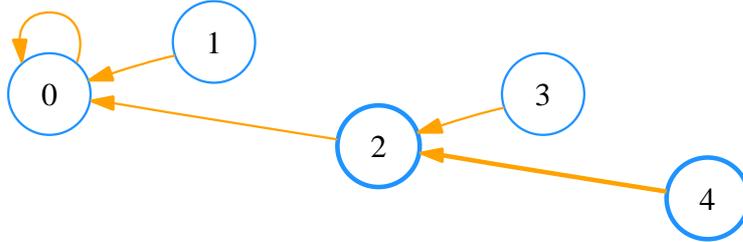
**Algoritmo 3.3**  $junta(\sigma, \tau)$  : une as bacias de  $\sigma$  com  $\tau$

---

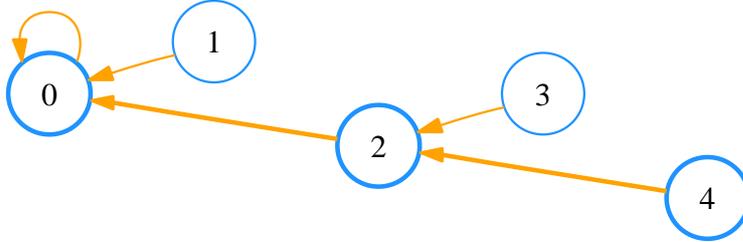
- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 1: $\sigma' \leftarrow busca(\sigma)$                 | // Recupera a bacia de $\sigma$   |
| 2: $\tau' \leftarrow busca(\tau)$                     | // Recupera a bacia de $\tau$     |
| 3: <b>se</b> $\sigma'.peso < \tau'.peso$ <b>então</b> | // $\sigma'$ é inferior a $\tau'$ |
| 4: $\tau'.bacia \leftarrow \sigma'.bacia$             | // Troque para a bacia menor      |
| 5: <b>caso contrário</b>                              | // $\tau'$ é inferior a $\sigma'$ |
| 6: $\sigma'.bacia \leftarrow \tau'.bacia$             | // Troque para a bacia menor      |
| 7: <b>fim se</b>                                      |                                   |
-



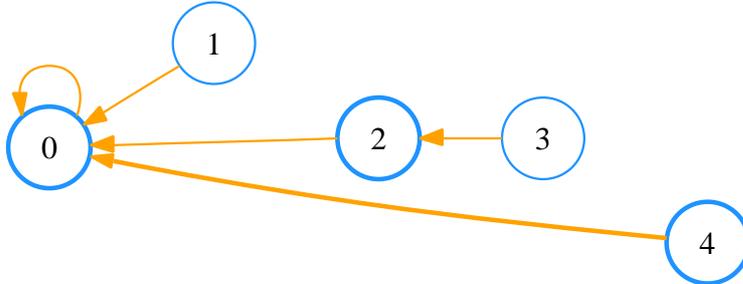
3.11(a): Busca 1 retorna 0.



3.11(b): Busca 4 chama busca 2.



3.11(c): Busca 2 retorna 0.



3.11(d): Busca 4 atualiza  $4.bacia \leftarrow 0$  e retorna 0.

Figura 3.11: Exemplo de duas execuções de **busca** (algoritmo 3.4): cada célula atualiza a estrutura para otimizar a próxima execução.

---

**Algoritmo 3.4**  $busca(\sigma)$  : busca a bacia (raiz) de  $\sigma$

---

- 1: se  $\sigma.bacia \neq \sigma$  então *//  $\sigma$  não é raiz da sua bacia*
  - 2:  $\sigma.bacia \leftarrow busca(\sigma.bacia)$  *// Recursão*
  - 3: fim se
  - 4: retorna  $\sigma$
-

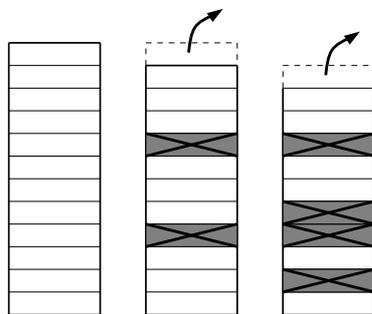
**Implementação do Junta & Busca.** A variável `.bacia` contém de fato a estrutura **Junta & Busca**, e será usada para otimizar a construção do gradiente e a representação do complexo de Morse, pois ambos são partições do complexo celular original, construídas por cancelamentos, ou seja, por união de classes nessas partições. A estrutura de dados **Junta & Busca** (Tarjan, 1975) é uma representação eficiente para tais operações sobre partições. E está descrita nos algoritmos 3.3 (figura 3.10) e 3.4 (figura 3.11).

### 3.2.2

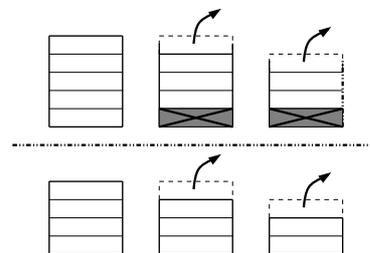
#### Algoritmo guloso

A construção gulosa de uma função de Morse discreta começa com um gradiente discreto vazio  $\mathcal{V}$  (com todas as células críticas) e acrescenta par por par a  $\mathcal{V}$ , fazendo cancelamentos locais de células incidentes. Um par  $(\tau < \sigma)$  é acrescentado se nem  $\tau$  nem  $\sigma$  já pertence a um par de  $\mathcal{V}$  (condição de campo de vetor combinatório) e se este par não cria ciclos dentro de  $\mathcal{V}$  (condição de gradiente). O segundo teste (algoritmo 3.6) é a única parte complicada do algoritmo (algoritmo 3.5). A implementação da construção gulosa é similar à extração de árvores geradoras (figura 3.13): as linhas dos grafos são testados em seqüência, e se uma linha junta dois componentes distintos, é adicionada à árvore geradora. Mais precisamente, os dois nós de uma linha pertencem ao mesmo componente se o algoritmo **busca** retorna a mesma raiz para cada. Neste caso, a linha criaria um ciclo. Caso contrário, os dois componentes são juntos pela adição da linha, que é feita por uma operação **junta**.

Na verdade, qualquer gradiente discreto  $\mathcal{V}$  pode ser construído com este algoritmo, definindo o peso de cada cancelamento de tal forma que somente os pares de  $\mathcal{V}$  apareçam na fila de prioridade.



3.12(a): A fila de prioridade inteira: cancelar um par invalida outros elementos da fila.

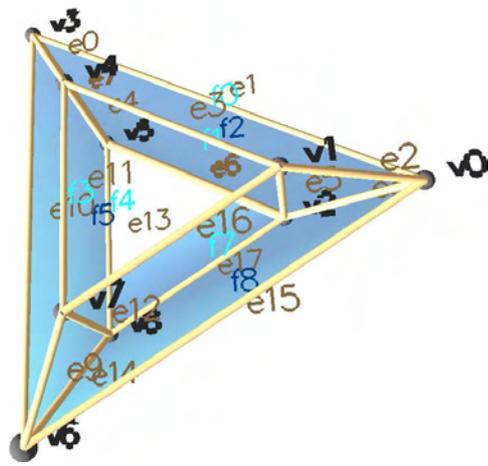


3.12(b): A fila de prioridade dividida ao meio terá guardado menos pares no final do algoritmo.

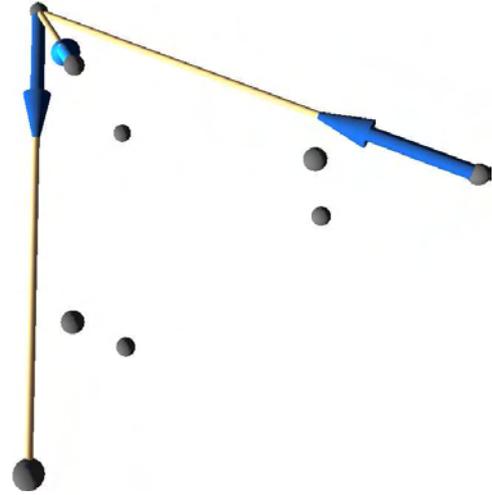
Figura 3.12: A fila de prioridade do algoritmo guloso pode ser otimizada.



Figura 3.13: O algoritmo de árvore geradora no exemplo da figura 3.3.



3.14(a): Notações das células do toro.



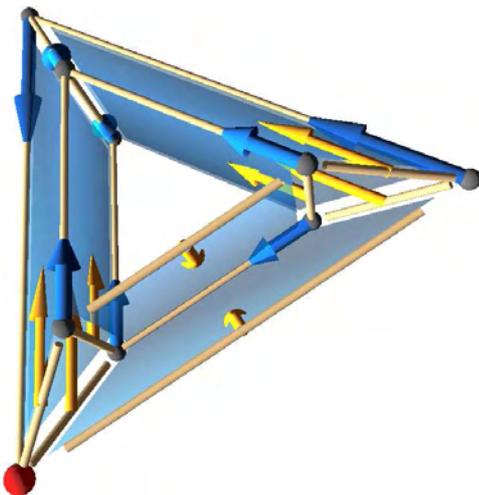
3.14(b): Primeiros 3 cancelamentos:  $v_0$  com  $e_1$ ,  $v_4$  com  $e_0$ ,  $v_3$  com  $e_{10}$ .



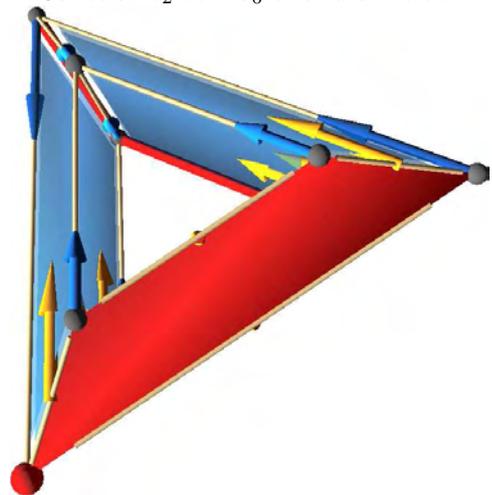
3.14(c): 4 cancelamentos:  $e_5$  com  $f_1$ ,  $e_8$  com  $f_2$ ,  $e_{12}$  com  $f_4$ ,  $e_{14}$  com  $f_5$ .



3.14(d): 4 cancelamentos:  $v_1$  com  $e_3$ ,  $v_2$  com  $e_{17}$ ,  $v_7$  com  $e_{10}$ ,  $v_8$  com  $e_{13}$ . Cancelar  $v_2$  com  $e_6$  criaria um ciclo.



3.14(e): 4 cancelamentos:  $e_2$  com  $f_0$ ,  $e_9$  com  $f_3$ ,  $e_{15}$  com  $f_8$ ,  $e_{16}$  com  $f_7$ .



3.14(f): Os outros cancelamentos criariam ciclos, e então  $v_6$ ,  $e_6$ ,  $e_7$  e  $f_6$  ficam críticas.

Figura 3.14: O algoritmo guloso num modelo de toro.

**Algoritmo guloso.** Já que a construção gulosa pode gerar qualquer gradiente discreto, ela depende fortemente do seu único parâmetro: a função `peso_cancelamento` que induz a ordem para considerar os cancelamentos locais. A construção simplesmente ordena todos os cancelamentos locais com peso finito e testa cada um deles sequencialmente (algoritmo 3.5 e figura 3.14). Como um cancelamento  $(\tau, \sigma)$  impede qualquer cancelamento envolvendo  $\tau$  ou  $\sigma$ , o algoritmo pode ser acelerado considerando, num primeiro passo, os cancelamentos com peso menor que um certo limite, depois os cancelamentos ainda válidos com peso menor que um segundo limite e assim por diante. Esta melhoria reduz o custo de ordenar os cancelamentos, pois a fila de prioridade não precisa ordenar os pares invalidados em passos anteriores (figura 3.12).

---

**Algoritmo 3.5 guloso(peso\_cancelamento) :** construção gulosa de  $\mathcal{V}$

---

```

1: fila_prioridade  $\{\mathbb{R} \times K \times K\} \leftarrow \emptyset$  // Inicia a fila de prioridade
2: para  $\sigma \in K$  faz // Para cada célula de  $K$ 
3:    $\sigma.bacia \leftarrow \sigma$  // Inicia a estrutura de dados Junta & Busca
4:    $\sigma.casad \leftarrow 0$  // Inicia  $\mathcal{V}$ 
5:   para  $\tau \in \sigma.bord$  faz // Para cada célula do bordo de  $\sigma$ 
6:      $w \leftarrow \text{peso\_cancelamento}(K, (\tau, \sigma))$  // Calcula o peso de um
       cancelamento local
7:     se  $w \neq \infty$  então // Permite selecionar os casamentos
8:       fila_prioridade.insere  $((w, \tau, \sigma))$  // Ordena os cancelamentos locais
9:     fim se
10:  fim para
11: fim para
12:
13: enquanto  $(w, \tau, \sigma) \leftarrow \text{fila\_prioridade.topo}$  faz // Atravessa a fila de
    prioridade
14:  se  $\sigma.casad = 0$  e  $\tau.casad = 0$  e não cria_ciclo  $((\tau, \sigma))$  então // o
    cancelamento é válido
15:     $\sigma.casad \leftarrow \tau$  // Define o gradiente
16:     $\tau.casad \leftarrow \sigma$  // Define o gradiente
17:    para  $\tau' \in \sigma.bord$  faz // Para cada célula do bordo de  $\sigma$ 
18:      junta  $(\tau', \tau)$  // atualiza a estrutura de dados Junta & Busca
19:    fim para
20:    para  $\sigma' \in \tau.estr$  faz // Para cada célula no co-bordo de  $\tau$ 
21:      se  $\sigma'.casad.dim = \tau.dim$  então //  $\sigma'$  pertence à camada
22:        junta  $(\sigma'.casad, \tau)$  // atualiza a estrutura de dados Junta & Busca
23:      fim se
24:    fim para
25:  fim se
26: fim enquanto

```

---

**Teste de aciclicidade.** Para testar se o cancelamento  $(\tau < \sigma)$  criaria um hipercaminho fechado, o algoritmo verifica se a bacia de  $\tau$ , e depois o cancelamento já não contém um nó incidente a  $\sigma$  (figura 3.15). Se a camada contém apenas linhas regulares, o teste é o mesmo que o algoritmo de extração de árvores geradoras.

---

**Algoritmo 3.6**  $\text{cria\_ciclo}((\tau < \sigma))$  : verifique se  $(\tau < \sigma)$  cria um ciclo em  $\mathcal{V}$

---

```

1: conjunto  $\{K\} \leftarrow \emptyset$  // Recupera a bacia de  $\sigma$  depois do cancelamento
2: para  $\sigma' \in \tau.\text{estr}$  faz // Para cada célula do co-bordo de  $\tau$ 
3:    $\tau' \leftarrow \sigma'.\text{casad}$  // Fonte de  $\sigma'$ 
4:   se  $\tau'.\text{dim} = \tau.\text{dim}$  então //  $\tau'$  pertence à camada
5:     conjunto.inserere (busca( $\tau'$ )) // Insere a bacia de  $\tau'$ 
6:   fim se
7: fim para
8:
9: para  $\tau' \in \sigma.\text{bord}$  faz // Para cada célula do bordo de  $\sigma$ 
10:  se  $\tau' \neq \tau$  e  $\tau'.\text{casad}.\text{dim} = \sigma.\text{dim}$  então //  $\tau'$  pertence à camada
11:    $\rho \leftarrow \text{busca}(\tau')$  // Recupera a bacia de  $\tau'$ 
12:   se  $\rho \in \text{conjunto}$  então // A bacia  $\rho$  contém um nó incidente a  $\tau$ 
13:     retorna verdadeiro // O cancelamento criaria um ciclo
14:   fim se
15: fim se
16: fim para
17: retorna falso // O cancelamento é válido

```

---

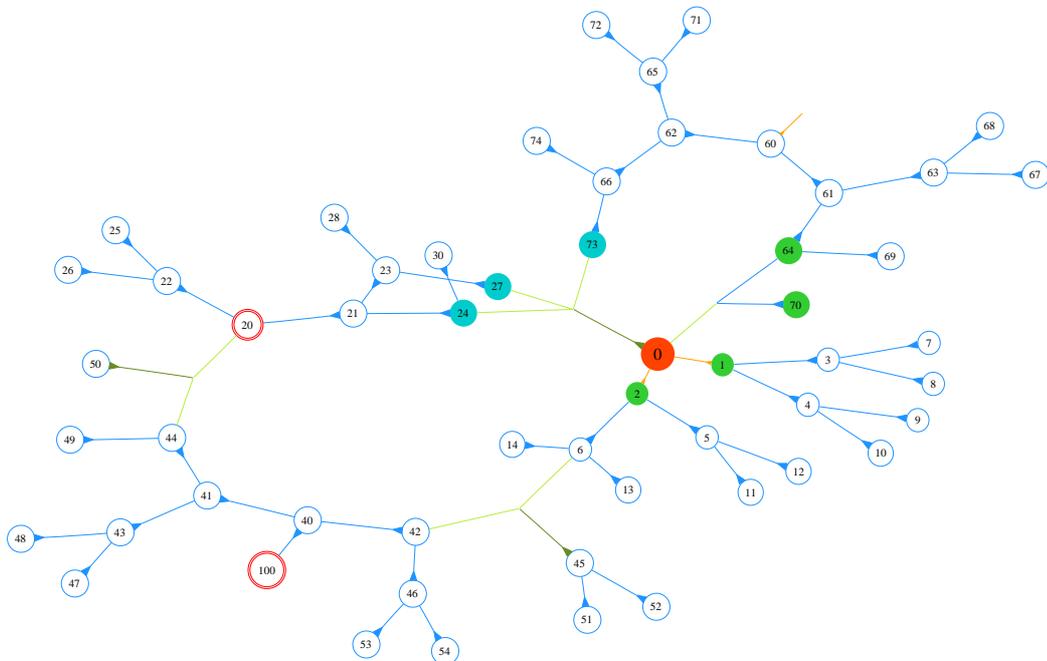
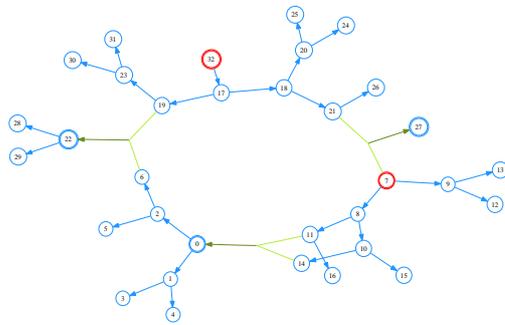
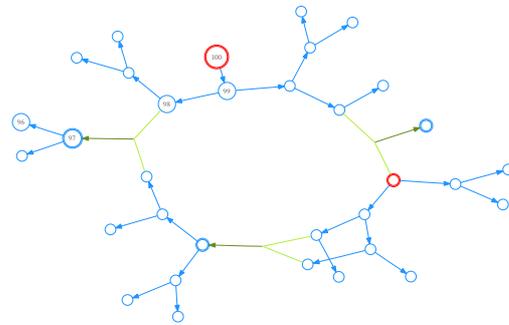


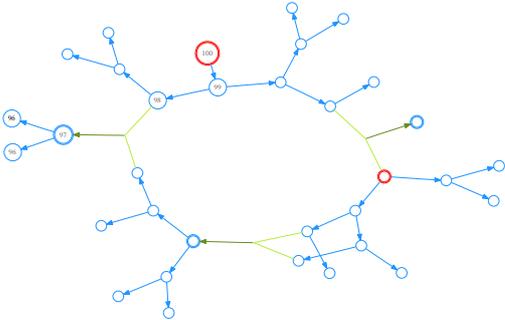
Figura 3.15: O cancelamento do nó  $\sigma = 0$  e da hiperlinha  $\tau = \{0, 24, 27, 73\}$  criaria um ciclo, pois o nó 73 fica no mesmo componente que os nós 64 e 70. Sem o nó 73 na hiperlinha  $\tau$ , o cancelamento teria sido válido.



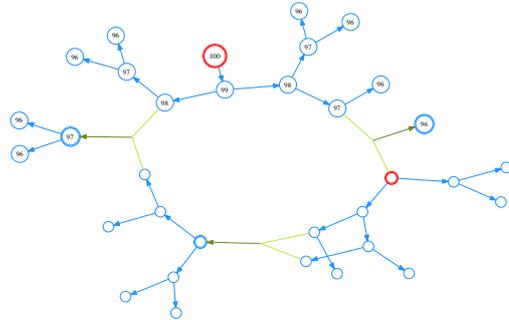
3.16(a): Têm quatro raízes: 7 e 32, 22 e 27.



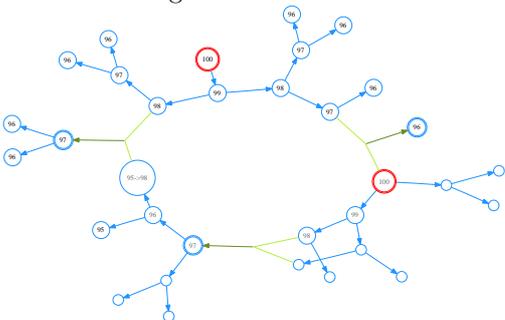
3.16(b): Começando do nó 32: a pilha, até linha 12, contém um ramo só.



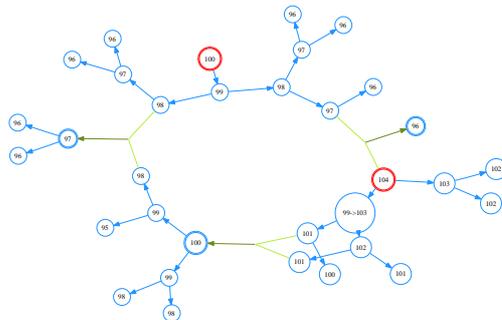
3.16(c): Depois desempilha, confirma o valor 96 e segue.



3.16(d): Completa o componente do nó 32.



3.16(e): Começando do nó 7: o ramo atinge o nó 6, que já tem valor, então aumenta o valor guardado de  $m$ .



3.16(f): Completa o componente do nó 7: os valores precisam ser aumentados de novo na passagem do nó 10 para o nó 8, mas não do nó 27 para o nó 7.

Figura 3.16: Exemplo da execução de `grad2fun` (algoritmo 3.7).

**Algoritmo 3.7** grad2fun : calcula  $f$  a partir de  $\mathcal{V}$ 


---

```

1: para  $p \in [1 \dots \dim K]$  faz // Para cada hiperfloresta de camada
2:    $m \leftarrow 2 \cdot \text{card } K^p$  // Valor grande para separar as camadas
3:   para  $\sigma \in \{\text{raízes de } \mathcal{L}_{p(p-1)}, <\}$  faz // Recupera a menor raiz
4:      $\text{pilha} \{\text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p \times \text{Prim}_{p-1} \cup \{0\}\} \leftarrow \{(\sigma, 0)\}$  // Pilha para
       atravessar a camada
5:     enquanto  $\text{pilha} \neq \emptyset$  faz // Atravessa o componente regular
6:        $\sigma \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera a primeira célula do caminho
7:       enquanto  $\exists \tau < \sigma, \text{não\_marcado}(\tau)$  faz // Ainda não é folha
8:          $\sigma \leftarrow \tau.\text{casad}$  // Completa o passo do gradiente
9:          $\text{pilha.insere}((\sigma, \tau))$  // Armazena o passo do gradiente
10:         $\text{marca}(\sigma); \text{marca}(\tau)$  // Marca o passo
11:         $m \leftarrow m - 1$  // Desce um nível na árvore
12:      fim enquanto
13:      // Chegou numa folha
14:       $(\sigma, \tau) \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera o último passo do gradiente
15:       $M = \max \text{val} \{\tau' < \sigma, \text{marcado}(\tau'), \tau' \in \mathcal{L}_{p(p-1)}, \tau' \text{ não regular}\}$ 
       // Máximo das hiperlinhas já visitadas
16:       $m \leftarrow \max(m, M + 2)$  // Mantém  $f$  crescente
17:      se  $\tau \neq 0$  então // Célula regular
18:         $\sigma.\text{val} \leftarrow m; \tau.\text{val} \leftarrow m$  // Define o valor no par
19:      fim se
20:       $m \leftarrow m + 1$  // Sobe um nível na árvore
21:    fim enquanto
22:  fim para
23: fim para
24:
25: para  $\rho \in K$  faz // Para as arestas críticas sem imagem por  $f$ 
26:   se  $\rho.\text{val} = \text{indefinido}$  então //  $\rho$  não tem valor definido
27:      $\rho.\text{val} = \max \text{val} \{\text{Dual}_{\dim \rho} \cup \text{Crit}_{\dim \rho}\} + 1$  // Define o valor crítico
28:   fim se
29: fim para

```

---

**Integração do gradiente.** O último passo do algoritmo é gerar uma função de Morse discreta a partir do gradiente. Como já sabemos, há um número infinito de funções de Morse discretas correspondendo a um gradiente, pois podemos por exemplo escalonar qualquer componente conexo. Porém, essas funções de Morse discretas devem ser crescentes ao longo do gradiente. Neste sentido, a construção do algoritmo 3.7 é a mais simples, dando como valor a cada célula a sua profundidade na hiperfloresta de camada (figura 3.16). O algoritmo dá valores primeiro a cada nó dos componentes regulares e o mesmo valor à linha destino deste nó. Ao encontrar uma hiperlinha não regular entrando num componente regular, ele segue aquela linha para processar em prioridade os componentes regulares abaixo dela. Por isso o procedimento deve ocorrer das folhas para as raízes, para manter um nó maior que os seus filhos.

### 3.2.3

#### Heurística para funções de Morse ótimas

Em (Lewiner, 2002), o nosso objetivo era definir funções de Morse discretas ótimas, tendo o menor número possível de células críticas. Este problema foi provado NP-difícil (Lewiner *et al.*, 2003b, Joswig & Pfetsch, 2005). Podemos escrever um algoritmo exponencial simples testando todos os casamentos possíveis, ou de um jeito mais elegante usando programação inteira (Joswig & Pfetsch, 2005). Porém, o algoritmo guloso aqui apresentado pode ser usado para calcular uma função de Morse discreta com muito poucas células críticas (algoritmo 3.8). Nos modelos de (Hachimori Models), este algoritmo sempre conseguiu o resultado ótimo em tempo menos do que quadrático. Além disso, foi provado conseguir o ótimo para superfícies em tempo quase linear (Lewiner *et al.*, 2003a).

Já que as partes regulares dos hipergrafos são mais fáceis de se tratar, o algoritmo chama primeiro a função **guloso** em cada camada separadamente, considerando apenas as linhas regulares (figura 3.17). Depois, poda o hipergrafo de camada. Se não há mais folhas numa camada não vazia, tem um ciclo de cancelamentos válidos. Este ciclo pode ser quebrado arbitrariamente (aí esta a heurística), usando o casamento com o maior **peso\_cancelamento**. Para conseguir isto, chamamos “**uma vez**” o algoritmo guloso, onde o comando **uma vez** na linha 3.8 do algoritmo significa que **guloso** faz apenas um cancelamento e retorna.

---

**Algoritmo 3.8** *ótima(peso\_cancelamento)* : Construção de um gradiente discreto ótimo

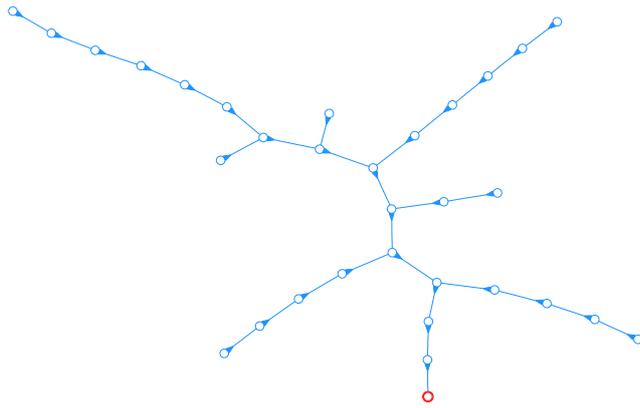
---

```

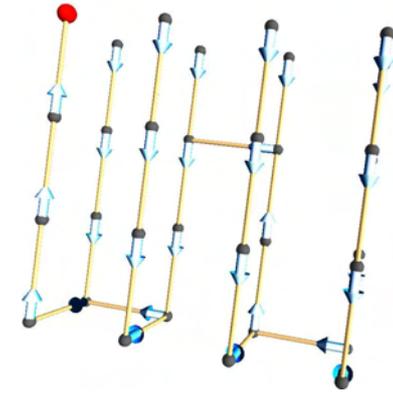
1: para  $d \in \{1, \dots, \dim K\}$  faz           // Trata cada camada separadamente
2:   define  $\text{peso}(K, (\tau, \sigma)) \leftarrow$  // Olha apenas às linhas regulares
       $\begin{cases} \infty & \text{se } \sigma.\text{dim} \neq d \\ \infty & \text{se } \sigma \text{ é uma linha regular de } \mathcal{L}_{(d-1)d} \\ \text{peso\_cancelamento}(K, (\tau, \sigma)) & \text{caso contrário} \end{cases}$ 
3:   guloso(peso)           // Construção dos componentes regulares de  $\mathcal{L}_{(d-1)d}$ 
4: fim para
5:
6: repete                       // Redução e passo guloso
7:   define  $\text{peso}(K, (\tau^{d-1}, \sigma^d)) \leftarrow$  // Redução
       $\begin{cases} \text{peso\_cancelamento}(K, (\tau, \sigma)) & \text{se } \tau \text{ é uma folha de } \mathcal{L}_{(d-1)d} \\ \text{peso\_cancelamento}(K, (\tau, \sigma)) & \text{se } \sigma \text{ é uma folha de } \mathcal{L}_{d(d-1)} \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$ 
8:   guloso(peso)           // Redução na camada primal e dual
9:   uma vez guloso(peso_cancelamento) // Destrua ciclos de cancelamentos
10: até Não ter mais cancelamentos locais válidos

```

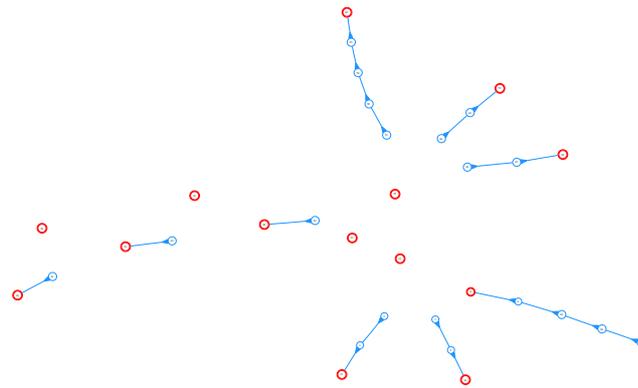
---



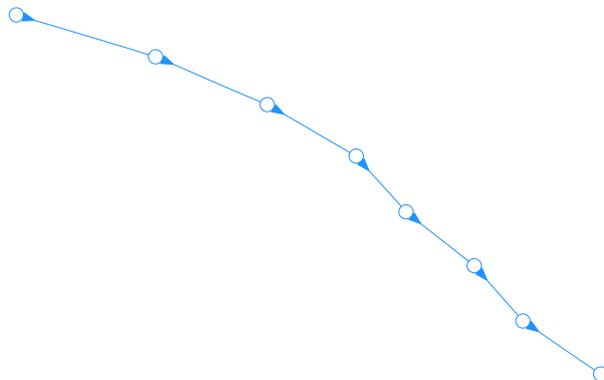
3.17(a): Primeira chamada a guloso com  $d = 1$  (camada  $\mathcal{L}_{01}$ ).



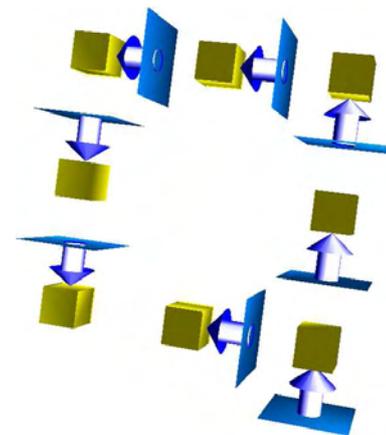
3.17(b): Camada  $\mathcal{L}_{01}$  no toro.



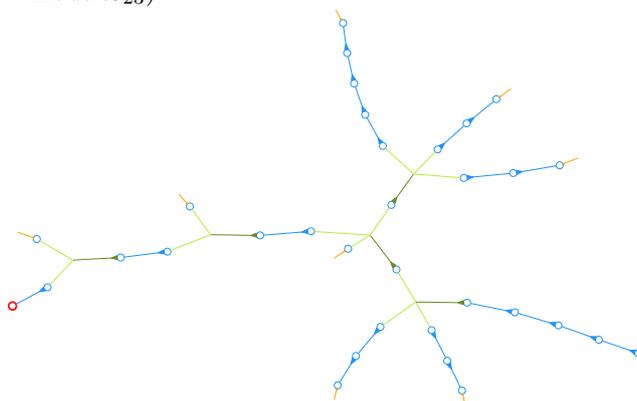
3.17(c): Segunda chamada a guloso com  $d = 2$  (camada  $\mathcal{L}_{12}$ ).



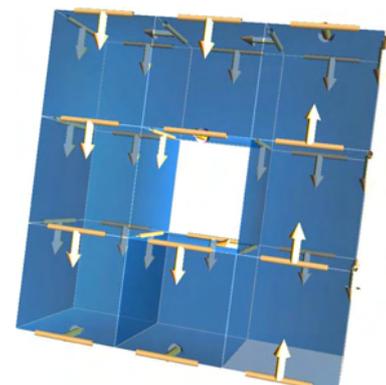
3.17(d): Terceira chamada a guloso com  $d = 3$  (camada  $\mathcal{L}_{23}$ ).



3.17(e): Camada  $\mathcal{L}_{23}$  no toro.



3.17(f): Última chamada a guloso: podando a camada  $\mathcal{L}_{12}$ .



3.17(g): Camada  $\mathcal{L}_{12}$  no toro.

Figura 3.17: Exemplo da execução de ótima (algoritmo 3.8) num toro sólido.

### 3.2.4 Complexidade

O teste de aciclicidade do algoritmo 3.6 executa-se em tempo  $O(s \cdot \log s)$ , onde  $s$  é o tamanho médio do bordo e do co-bordo de uma célula. Suporemos que para um complexo  $K$ , este tamanho é limitado por uma pequena constante. Isso implica que o algoritmo 3.6 tem complexidade média constante.

A estrutura **Junta & Busca** dos algoritmos 3.3 e 3.4 tem complexidade  $O(\alpha(n))$ , onde  $\alpha(n)$  é a função de Ackermann inversa (Tarjan, 1975). Na verdade, esta função tem valor menor que 5 para qualquer valor de entrada imaginável (tabela 3.18). Por isso, a complexidade da estrutura **Junta & Busca** é freqüentemente qualificada de *quase constante*.

$n \in$	$\alpha(n)$
$\{1, 2, 3\}$	1
$\{4, 5, 6, 7\}$	2
$\{8, \dots, 61\}$	3
$\left\{62, \dots, 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} - 3\right\}$	4

Tabela 3.18: Valores da função de Ackermann inversa.

A construção gulosa do algoritmo 3.5 cria primeiro a fila de prioridade, e depois chama para cada par candidato a casar o teste de aciclicidade do algoritmo 3.6, e eventualmente  $O(s)$  vezes a função **junta**. Já que consideramos  $s$  constante em média, a segunda parte do algoritmo é quase linear. Se o **peso\_cancelamento** não importa, por exemplo se **peso\_cancelamento**  $(K, (\tau, \sigma))$  é constante, a fila de prioridade é criada em tempo linear com respeito ao número de pares de células incidentes  $O(s \cdot \#K) \approx O(\#K)$ . Se o **peso\_cancelamento** é importante, a fila de prioridade tem complexidade  $O(\#K \cdot \log \#K)$ .

Finalmente, a complexidade da construção ótima é *a priori* a mesma que a construção gulosa, ou seja,  $O(\#K \cdot \log \#K)$  se o peso de cancelamento importa e  $O(\#K \cdot \alpha(\#K))$  caso contrário. Porém, o “**repete**” do algoritmo pode precisar de um tempo quadrático no número de cancelamentos que restaram. Observe que tem no máximo  $h$  cancelamentos restantes, onde  $h$  é o número de hiperlinhas não regulares. A complexidade é então linear no geral, e quadrática no pior caso (Lewiner, 2002).

### 3.2.5 Aplicação à compressão volumétrica

Entre as diferentes estratégias para comprimir malhas poliedrais, a maioria dos esquemas eficientes (Rossignac, 1999, Lopes *et al.*, 2002,

Lewiner *et al.*, 2004, Touma & Gotsman, 1998, Alliez & Desbrun, 2001, Kälberer *et al.*, 2005) para superfícies codifica a conectividade de uma malha por um percurso equivalente à camada dual  $\mathcal{L}_{d(d-1)}$  de um gradiente discreto  $\mathcal{V}$ . As raízes da camada são as partes mais caras de se codificar. Para minimizar estes elementos, o algoritmo tende a otimizar  $\mathcal{V}$ , pois cada célula crítica é uma raiz. No caso de superfície, provamos em (Lewiner *et al.*, 2003a) que qualquer floresta geradora chega ao ótimo.

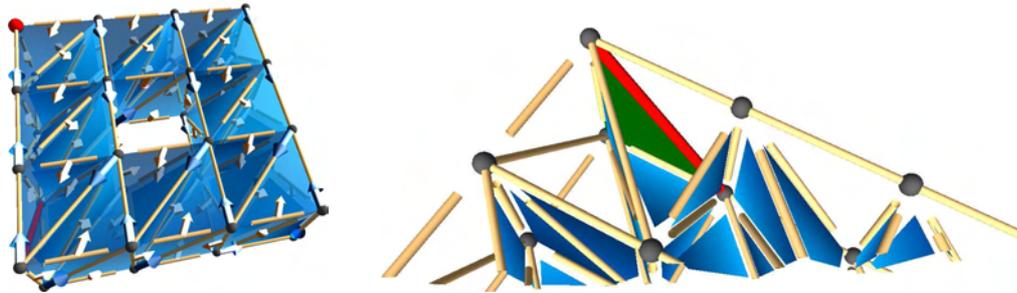


Figura 3.19: Por causa da aresta crítica (em vermelho), o triângulo verde tem que ser uma célula dual, isolada dentro da hiperfloresta dual. Este triângulo custará caro para codificar.

Porém para 3-variedades, o problema é NP-difícil, e requer alguma heurística para ser resolvido rapidamente. A estratégia do algoritmo 3.8 é similar para este caso particular àquela usada por Grow & Fold (Szymczak & Rossignac, 2000), como foi descrito em (Lewiner *et al.*, 2004). Só que esta heurística de fato se generaliza para dimensões maiores, e para complexos celulares não variedades, não simpliciais e não puros, o que poderá ser útil para outros algoritmos de compressão.

### 3.3

#### Bacias do fluxo e componentes de hipergrafos

A representação de um gradiente discreto por hiperflorestas simplificou a construção algorítmica de funções de Morse discretas. De fato, esta representação tornou-se mais significativa que apenas uma estrutura de dados eficiente. Esta seção mostra a relação estreita entre os componentes regulares de uma camada  $\mathcal{L}_{p(p-1)}(\mathcal{V})$  (seção 3.1.3 *Hiperfloresta*) e as bacias instáveis do fluxo  $W_{\mathcal{V}}^u(\sigma^p)$  (seção 2.7.2 *Cadeias invariantes*). Na verdade, a estrutura de dados Junta & Busca representa quase explicitamente estas bacias instáveis  $W_{\mathcal{V}}^u$ . Isto ajuda na representação da decomposição de Morse–Smale e no cálculo da homologia de Witten. Para calcular as bacias instáveis, consideraremos apenas camadas duais. As bacias estáveis podem ser obtidas da mesma maneira usando camadas primais, embora elas não sejam diretamente definidas nos trabalhos originais de Forman.

### 3.3.1

#### Imagem pelo fluxo de uma célula crítica ou dual

Considere um nó  $n$  da camada dual  $\mathcal{L}_{p(p-1)}(\mathcal{V})$ . Este nó representa uma célula  $\sigma^p$  que é ou dual ou crítica. Os *filhos* de  $n$  são os nós  $n'$  de  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$  que são fontes das linhas incidentes a  $n$ :  $n \rightsquigarrow n'$  se  $\exists l : n > l$  e  $(l, n') \in \mathcal{V}$ . Diremos que  $n$  é o *pai* dos nós  $n'$ . O *filho iterado* de um nó  $n$  é ou um filho direto de  $n$  ou o filho de um filho iterado de  $n$ . Agora vamos provar a seguinte proposição:

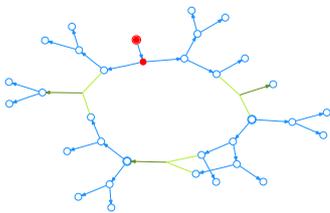
**Proposição 3.2** *A imagem pelo fluxo  $\Phi(\sigma^p)$  de  $\sigma^p$  é soma dos filhos de  $n$  mais o próprio  $n$  se  $\sigma^p$  é crítica.*

*Prova.* O fluxo de  $\sigma^p$  é definido na seção 2.7.2 *Cadeias invariantes* por:

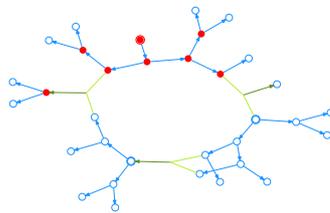
$$\Phi(\sigma^p) = \sigma^p + \mathbf{V}(\partial_p(\sigma^p)) + \partial_{p+1}(\mathbf{V}(\sigma^p)) \quad (3-1)$$

Que  $\sigma^p$  seja dual ou crítica,  $\mathbf{V}(\sigma^p) = 0$ , o que simplifica o termo direito da equação. Agora, o bordo  $\partial_p(\sigma^p)$  de  $\sigma^p$  é soma de células  $\tau^{p-1}$  que ou pertencem a  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$  ou a  $\mathcal{L}_{(p-1)(p-2)}$ . Este último caso implica que  $\tau^{p-1}$  é dual ou crítica, o que implica que sua imagem pelo gradiente  $\mathbf{V}$  é nula. Assim obtemos:

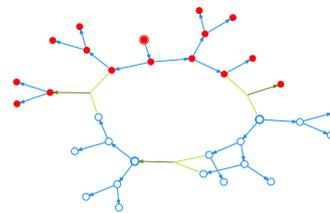
$$\Phi(n) = n + \mathbf{V} \left( \sum_{l \in \text{Prim}_{(p-1)}, l < n} [n : l] \cdot l \right) \quad (3-2)$$



3.20(a): 1 iteração.



3.20(b): 3 iterações.



3.20(c): 4 iterações.

Figura 3.20: Fluxo iterado de uma célula crítica numa camada dual: a célula crítica é incluída na sua própria imagem.

**Imagem de uma célula crítica.** Pela definição de filho, cada filho de  $n$  é imagem por  $\mathbf{V}$  de um termo da soma da equação (3-2). Por um lado, se  $n$  é crítico, ele não é imagem de nenhuma linha, e será então parte da sua imagem pelo fluxo (figura 3.20). Por outro lado, cada termo da soma da equação (3-2) é transformado por  $\mathbf{V}$  num filho de  $n$ . Temos então:

$$\Phi(n) = n + \sum_{n' \rightsquigarrow n} [n : l] \cdot [n' : l] \cdot n' \quad (3-3)$$

O coeficiente de cada filho  $n'$  corresponde de fato à multiplicidade do caminho gradiente  $\mu(\langle n \ l \ n' \rangle)$ .

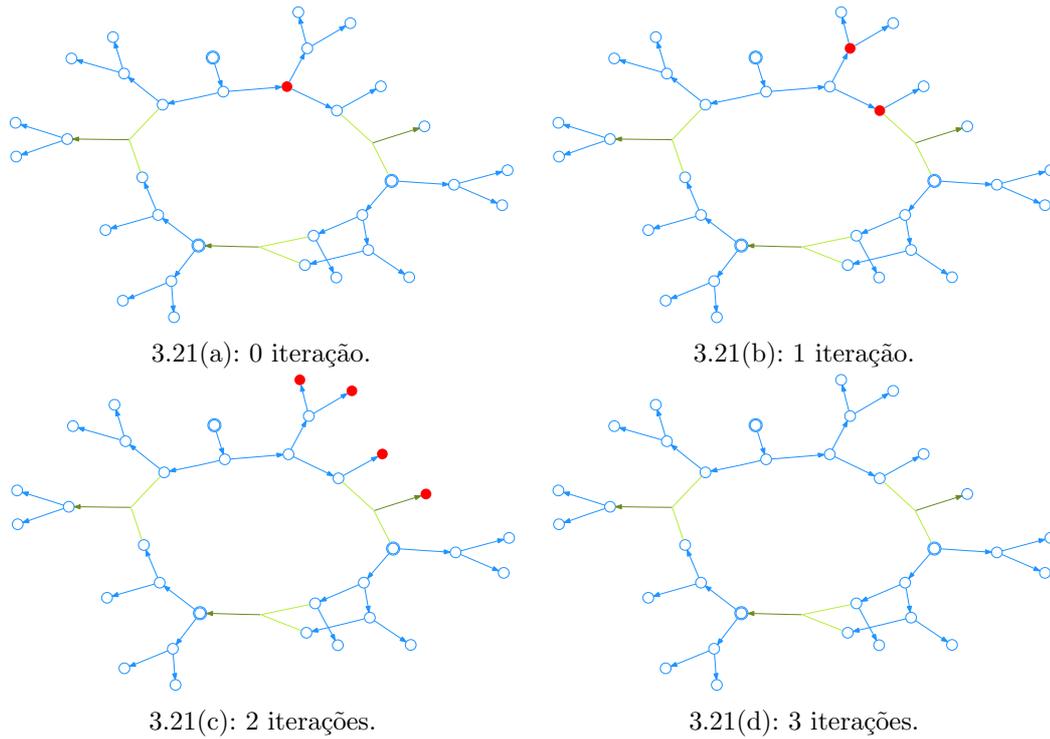


Figura 3.21: Fluxo iterado de uma célula dual: a imagem se anula depois de um número de iterações igual à profundidade do componente conexo.

**Imagem de um nó dual.** Se o nó  $n$  não é crítico, é imagem de alguma linha  $l_n$  que aparece na soma da equação (3-2). Os outros termos da soma se comportam como no caso crítico:

$$\Phi(n) = n + [n : l_n] \cdot \mathbf{V}(l_n) + \sum_{n' \leftarrow n} \mu(\langle n \ l \ n' \rangle) \cdot n' \quad (3-4)$$

Pela orientação do gradiente, os termos com  $n$  se cancelam (figura 3.21), e obtemos:

$$\Phi(n) = \sum_{n' \leftarrow n} \mu(\langle n \ l \ n' \rangle) \cdot n' \quad (3-5)$$

■

Podemos deduzir deste cálculo o resultado de (Forman, 1995):

**Corolário 3.3** *O fluxo iterado de um nó dual vai para zero:*

$$\sigma \in \text{Dual}(\mathcal{V}) \Rightarrow \Phi^\infty(\sigma) = 0 .$$

*Prova.* Iterando a equação (3-5), obtemos:

$$\Phi^k(\sigma^p) = \sum_{n_0 \leftarrow \sigma^p} \sum_{n_1 \leftarrow n_0} \dots \sum_{n_k \leftarrow n_{k-1}} \mu(\langle \sigma^p \ n_0 \ n_1 \dots n_k \rangle) \cdot n_k \quad (3-6)$$

Como não existe hipercaminho fechado numa hiperfloresta, o comprimento do hipercaminho começando por  $\sigma^p$  é limitado por um certo  $k$ . Com a notação

da equação (3-6), não tem nenhum nó  $n_{k+1}$  filho de  $n_k$ , e a soma de  $\Phi^{k+1}(\sigma^p)$  não contém mais termo. ■

### 3.3.2 Bacias discretas estáveis e instáveis

Pelos resultados acima, já podemos calcular as bacias instáveis diretamente pela representação por camadas.

**Teorema 3.4** *As bacias instáveis  $\Phi^\infty(\sigma^p) \in C_p^\Phi$  de uma célula crítica  $\sigma^p$  contêm o componente regular de  $\sigma^p$  em  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$  e estão contidas no componente conexo de  $\sigma^p$  em  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$ .*

*Prova.* O teorema é uma simples consequência das proposições 3.1 e 3.2. Pela proposição 3.2, a imagem pelo fluxo de uma célula crítica contém a própria célula crítica. Então, os elementos da imagem se acumulam, e temos que:

$$\Phi^k(\sigma^p) = \sigma^p + \sum_{n_0 \leftarrow \sigma^p} \mu(\langle \sigma^p \dots n_0 \rangle) \cdot \left( n_0 + \sum_{n_1 \leftarrow n_0} \mu(\langle n_0 n_1 \rangle) \cdot \left( n_1 + \dots \sum_{n_k \leftarrow n_{k-1}} \mu(\langle n_{k-1} n_k \rangle) \cdot n_k \right) \right) \quad (3-7)$$

Pela última parte da proposição 3.1, os pais dos nós do componente regular de  $\sigma^p$  também pertencem ao componente regular de  $\sigma^p$ . Então dentro da soma não existem cancelamentos de termos pertencendo ao componente regular de  $\sigma^p$ . E pela equação (3-7), a última parte do teorema é óbvia. ■

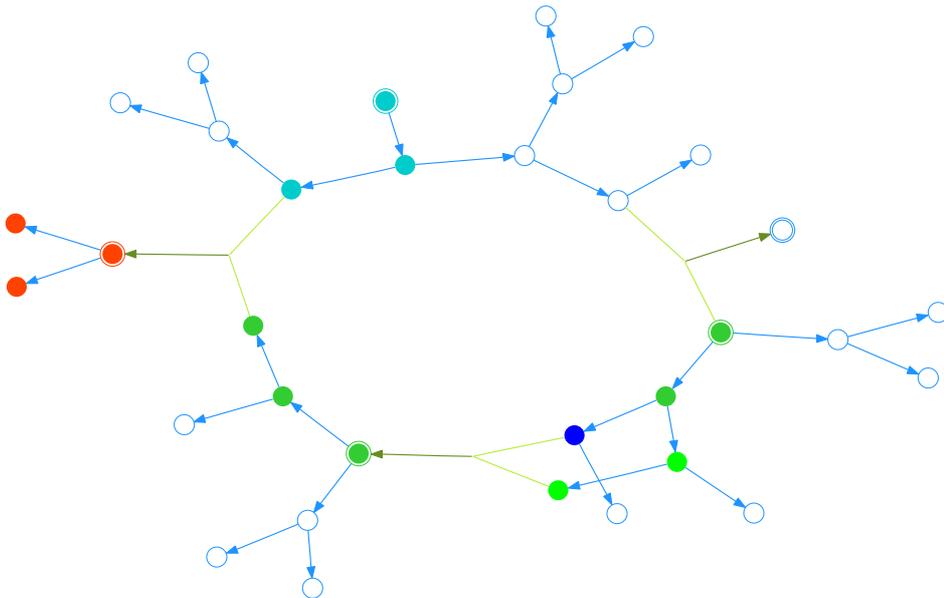


Figura 3.22: Caminhos integrais de ambos os nós 7 (em verde) e 32 (em azul) que se juntam na raiz 22 (em vermelho).

**Fusão de caminhos integrais.** Observe que há uma diferença significativa entre as teorias de Morse suave e discreta: uma célula pode pertencer a várias bacias estáveis ao mesmo tempo (figura 3.22). Este fato é devido a definição de caminho integral, que permite que dois caminhos se juntem. No mundo suave, a unicidade da solução de equações diferenciais ordinárias assegura que duas curvas integrais, mesmo arbitrariamente próximas, não se juntem. No mundo discreto, é óbvio que os caminhos integrais não podem ficar arbitrariamente próximos. Em particular, isso implica que um nó pode ser o filho iterado de uma célula crítica e não pertencer a sua bacia instável. Isto ocorre, por exemplo, quando um nó está no encontro de dois caminhos integrais, e que a multiplicidade do primeiro é oposta à multiplicidade do segundo. Porém, isso resolve de graça o caso dos ciclos de homologia que compartilham células.

**Bacias estáveis.** As considerações deste capítulo aplicam-se diretamente às bacias estáveis, se considerarmos as camadas primais no lugar das duais. Para variedade, isto também pode ser provado considerando *variedades duais* com a função de Morse discreta  $-f$ , o que corresponde a inverter cada par em  $\mathcal{V}$ . As camadas duais tornam-se primais e as bacias instáveis viram estáveis.

**Teorema 3.5** *A bacia estável de uma célula crítica  $\sigma^p$  contém o componente regular de  $\sigma^p$  em  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$  e está contida no componente conexo de  $\sigma^p$  em  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$ .*

### 3.3.3

#### Imagem pelo fluxo de uma célula primal

A camada primal simplificou a expressão do fluxo de uma célula dual, pois a imagem de um nó dual é a soma dos seus filhos na camada dual  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$ . Obtemos um resultado parecido para as células primais, e usaremos então a camada primal  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ . As camadas primais e duais diferem num ponto, comentado na proposição 3.1: a orientação das camadas duais aponta para as raízes, enquanto que no caso das camadas primais vai para fora das raízes (figura 3.23). Isto significa, em particular, que o filho de uma célula primal pode ser uma célula crítica, e a imagem pelo fluxo iterado pode não sumir.

Visto que a imagem de uma célula por  $\mathbf{V}$  é sempre uma célula dual (seção 3.1.1 *Classificação de células*), podemos reescrever a equação (3-1) como segue:

$$\Phi(\tau^{p-1}) \cong \tau^{p-1} + \partial_p(\mathbf{V}(\tau^{p-1})) + \text{Dual}_{p-1} \quad (3-8)$$

Pelo corolário 3.3, os termos dentro de  $\text{Dual}_{p-1}$  irão sumir quando iterar o fluxo. Observe que  $\mathbf{V}(\tau^{p-1})$  é a linha  $l_n$  que tem o nó  $n$  representando  $\tau^{p-1}$  como fonte. O bordo de  $l_n$  é a soma de células duais, o próprio  $n$  e os filhos de

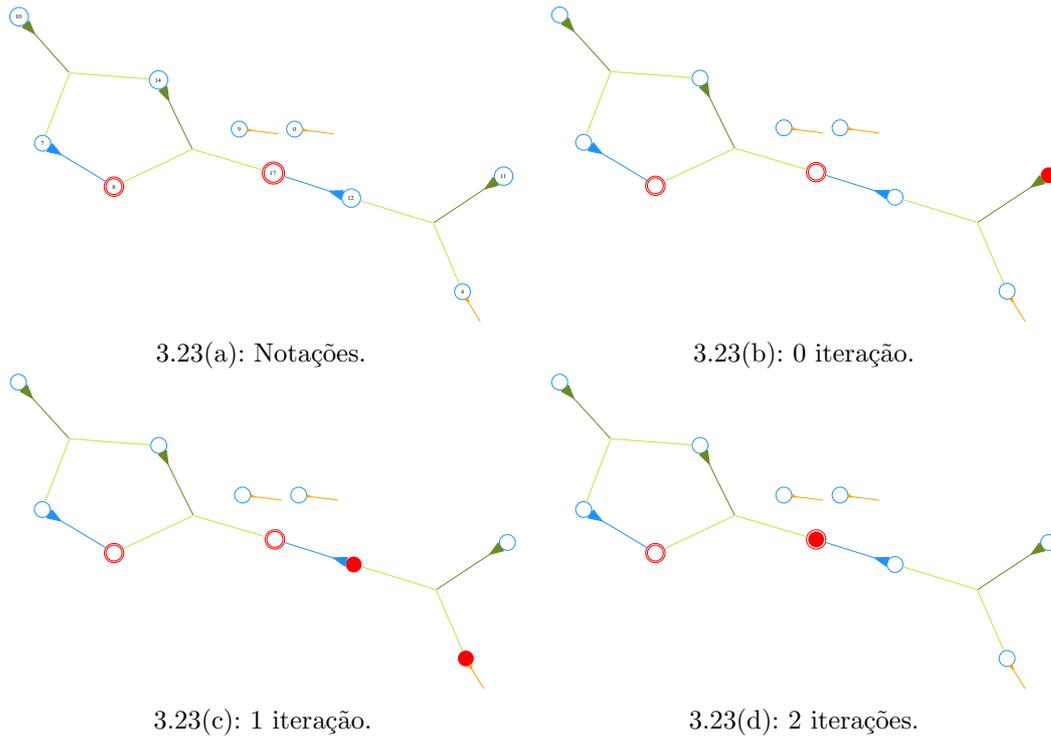


Figura 3.23: Iterações do fluxo na camada  $\mathcal{L}_{12}$  da figura 3.14: enquanto o fluxo do nó 4 se anula, o fluxo do nó 11 atinge a aresta crítica 17.

$n$  em  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ :

$$\Phi(n) = n - [l_n : n] \cdot [l_n : n] \cdot n + \sum_{n' \rightsquigarrow n} \mu(\langle n \rightsquigarrow n' \rangle) \cdot n' \quad (3-9)$$

Os dois primeiros termos se anulam. Se  $n$  não possui filho iterado crítico, o seu fluxo iterado irá sumir.

**Teorema 3.6** *O fluxo iterado de uma  $(p - 1)$ -célula primal  $n$  some se não possuir filho iterado crítico. No caso geral, o fluxo iterado de  $n$  é a soma dos fluxos iterados dos seus filhos iterados críticos:*

$$\Phi^\infty(n) = \sum_{\rho \in \text{Crit}_{p-1} \langle n \rightsquigarrow n_0 \dots n_k \rightsquigarrow \rho \rangle} \sum \mu(\langle n \rightsquigarrow n_0 \dots n_k \rightsquigarrow \rho \rangle) \cdot \Phi^\infty(\rho) \quad (3-10)$$

Este resultado permite um cálculo acelerado da decomposição de um ciclo na base da homologia de Morse–Witten. Em particular, como  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$  é uma hiperfloresta, os nós indo para uma célula crítica são facilmente identificados. O único problema acontece quando dois hipercaminhos chegam ao mesmo nó crítico, e o cancela. Isto requer a presença de uma junção de caminhos, que só pode ocorrer nas hiperlinhas não regulares. E é por isso que nos concentraremos primeiro nas partes regulares das camadas, em particular, para as provas do último capítulo.



## 4

### Cálculo da homologia

A homologia é um invariante combinatório básico dos objetos geométricos. Em particular, para complexos celulares em altas dimensões, oferece uma classificação simples que ajuda distinguir modelos, validá-los e até corrigí-los. Porém, o custo do cálculo da homologia ainda é um obstáculo quando se trata de grande quantidade de dados. O método clássico para calcular a homologia é baseado na forma normal de Smith (Dumas *et al.*, 2003). Este método é um derivado do pivoteamento de Gauß, o que o torna muito caro quando o tamanho do complexo aumenta. Em certos casos restritos as sub-triangulações de  $S^3$ , os números de Betti em  $\mathbb{Z}_2$  podem ser calculados usando seqüências de Mayer-Vietoris em tempo  $O(\#K \cdot \alpha(\#K))$  (Delfinado & Edelsbrunner, 1993, Dey & Guha, 1998). Uma base de geradores da homologia pode ser obtida para este caso específico com a mesma complexidade.

Este cálculo da homologia era no início só uma tentativa para definir rigorosamente as células críticas do complexo de Morse geométrico do próximo capítulo. Porém, os algoritmos introduzidos aqui são mais eficientes que a maioria dos algoritmos conhecidos. Em particular, calculam os números de Betti com a mesma complexidade que (Delfinado & Edelsbrunner, 1993, Dey & Guha, 1998), mas sem restrição sobre o complexo nem sobre o anel de coeficientes. Eles calculam também os grupos de homologia inteiros em qualquer anel, provêem uma base explícita para estes grupos no complexo celular e calculam a decomposição de qualquer ciclo nesta base. A primeira parte deste capítulo apresenta as ferramentas que serão usadas pela segunda parte, detalhando estes algoritmos.

#### 4.1

##### Ferramentas algébricas e combinatórias

A homologia pode ser inteiramente deduzida das formas normal de Smith dos operadores de bordo. Apesar das otimizações desenvolvidas para esta normalização (por exemplo usando (Dumas *et al.*, 2003)), ainda é uma operação cara. Em particular para calcular a homologia de modelos geométricos reais,

que tem usualmente milhares de células, este cálculo pode impedir qualquer aplicação, mesmo quando a topologia do modelo é trivial! Propomos aqui reduzir drasticamente a complexidade desta operação, calculando a homologia no complexo de Morse em vez de calculá-lo no complexo inteiro. Sabemos da seção 2.8.2 *Homologia de Witten* que as duas são equivalentes, mas o complexo de Morse é usualmente muito menor. Em particular para modelos geométricos usuais com milhares de células, se a topologia for trivial o complexo de Morse terá apenas algumas células.

#### 4.1.1

##### Forma normal de Smith

Considere um complexo celular  $K$  e um anel  $\mathbb{K}$  para os coeficientes das cadeias. Para fixar as idéias podemos considerar  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ , mas o capítulo todo vale para qualquer anel calculável. Como o módulo das cadeias é um módulo livremente gerado pelas células de  $K$ , o operador de bordo  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  pode ser representado por uma matriz retangular  $\mathbf{B}_p$  de tamanho  $\#_{p-1} \times \#_p$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$ . Por exemplo, o operador de bordo de uma aresta  $\sigma$  é a diferença das suas extremidades  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Isto significa que na matriz de  $\partial_1$ , a linha indexada por  $\sigma$  terá exatamente duas entradas não nulas:  $+1$  para  $\tau_2$  e  $-1$  para  $\tau_1$ .

Os grupos de homologia de  $K$  são  $H_p = \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$ . Tentaremos agora achar uma base para  $C_p$  na qual ambos  $\ker \partial_p$  e  $\text{Im } \partial_{p+1}$  sejam diagonais. A ferramenta para conseguir isto é a forma normal de Smith: uma conjugação de matrizes obtida por operações de Gauß nas linhas e colunas para deixar a matriz diagonal. Os coeficientes da diagonal serão zeros ou elementos de  $\mathbb{K}$  totalmente ordenados por divisão. Mais precisamente, a forma normal de uma matriz  $\mathbf{M}_{m \times n}$  é dada por duas matrizes inversíveis  $\mathbf{P}_{m \times m}$  e  $\mathbf{Q}_{n \times n}$  tal que:

$$\mathbf{P}_{m \times m} \cdot \mathbf{M}_{m \times n} \cdot \mathbf{Q}_{n \times n} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_r & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{com } 0 \neq k_1 \mid k_2 \mid \dots \mid k_r$$

Com esta forma normal de Smith, vamos construir uma base  $\{\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_{\#_p}\}$  de  $C_p$  de tal forma que  $\ker \partial_p$  seja gerada por  $\{\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_r\}$  e que  $\text{Im } \partial_{p+1}$  seja gerado por  $\{\mathbf{c}_{r+1} \cdots \mathbf{c}_{\#_p}\}$ . Seja  $\mathbf{P}_{\#_{p-1} \times \#_{p-1}}$  e  $\mathbf{Q}_{\#_p \times \#_p}$  as matrizes da forma normal de Smith de  $\mathbf{B}_p$ :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (\#_p - r)} \\ \mathbf{0}_{(\#_{p-1} - r) \times r} & \mathbf{0}_{(\#_{p-1} - r) \times (\#_p - r)} \end{bmatrix}.$$

Observe que  $\mathbf{K}$  é diagonal. Como  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ , temos  $\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{B}_{p+1} = 0$ . Então  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \mathbf{B}_{p+1} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{p+1} = 0 \quad \text{e então} \quad \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{p+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times \#_{p+1}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{p+1} \end{bmatrix}$$

Podemos aplicar a forma normal de Smith de novo, sobre  $\tilde{\mathbf{B}}_{p+1}$ , que tem tamanho  $(\#_p - r) \times \#_{p+1}$ , usando as matrizes  $\tilde{\mathbf{P}}_{(\#_p - r) \times (\#_p - r)}$  e  $\tilde{\mathbf{Q}}_{\#_{p+1} \times \#_{p+1}}$ :

$$\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{p+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{r} \times \tilde{r}} & \mathbf{0}_{\tilde{r} \times (\#_{p+1} - \tilde{r})} \\ \mathbf{0}_{(\#_p - r - \tilde{r}) \times \tilde{r}} & \mathbf{0}_{(\#_p - r - \tilde{r}) \times (\#_{p+1} - \tilde{r})} \end{bmatrix}.$$

Observe que  $\tilde{\mathbf{K}}$  também é diagonal. Seja  $\mathbf{R}_{\#_p \times \#_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix}$ . Podemos então escrever:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{p+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times \tilde{r}} & \mathbf{0}_{r \times (\#_{p+1} - \tilde{r})} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{r} \times \tilde{r}} & \mathbf{0}_{\tilde{r} \times (\#_{p+1} - \tilde{r})} \\ \mathbf{0}_{(\#_p - r - \tilde{r}) \times \tilde{r}} & \mathbf{0}_{(\#_p - r - \tilde{r}) \times (\#_{p+1} - \tilde{r})} \end{bmatrix}.$$

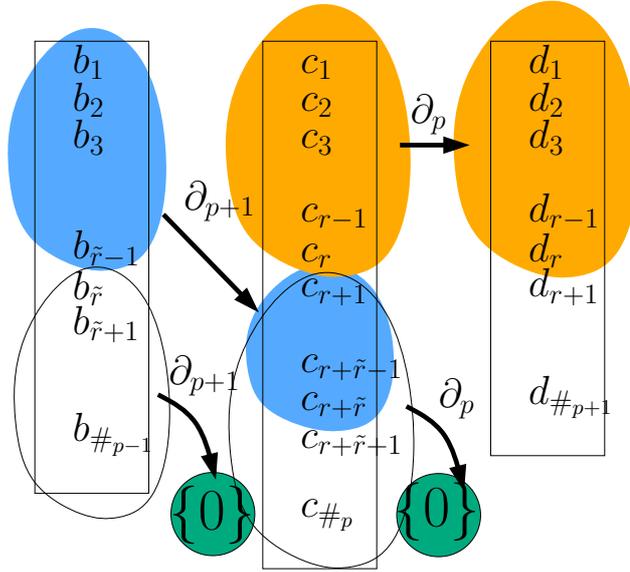


Figura 4.1: Duas formas normais de Smith são usadas para decompor o operador de bordo.

Podemos agora construir as bases  $\{\mathbf{d}_i\}$ ,  $\{\mathbf{c}_i\}$  e  $\{\mathbf{b}_i\}$  para  $C_{p-1}$ ,  $C_p$  e  $C_{p+1}$  respectivamente (figura 4.1). Sejam  $\{\tau_i\} = \{\tau^{p-1} \in K\}$ ,  $\{\sigma_i\} = \{\sigma^p \in K\}$  e  $\{\rho_i\} = \{\rho^{p+1} \in K\}$  as bases canônicas de  $C_{p-1}$ ,  $C_p$  e  $C_{p+1}$ . Então  $\mathbf{d}_i = \mathbf{P}^{-1} \cdot [\tau_j]_j$ ,  $\mathbf{c}_i = \mathbf{Q}\mathbf{R}^{-1} \cdot [\sigma_j]_j$  e  $\mathbf{b}_i = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot [\rho_j]_j$ .

Podemos escrever  $\partial_p$  e  $\partial_{p+1}$  com essas bases:

$$\begin{aligned}\partial_p(\mathbf{c}_i) &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}) \cdot \mathbf{B}_p \cdot (\mathbf{QR}^{-1}\sigma_i) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r \times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \sigma_i \\ &= \begin{cases} k_i \mathbf{d}_i & i \leq r \\ 0 & i > r \end{cases} \\ \partial_{p+1}(\mathbf{b}_i) &= (\mathbf{QR}^{-1} \cdot \mathbf{RQ}^{-1}) \cdot \mathbf{B}_{p+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} \tau_i = \mathbf{QR}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \tau_i \\ &= \begin{cases} \tilde{k}_i \mathbf{c}_{r+i} & i \leq \tilde{r} \\ 0 & i > \tilde{r} \end{cases}.\end{aligned}$$

O grupo de homologia  $H_p = \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$  pode então ser escrito usando os coeficientes de  $\mathbf{K}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}$ :  $H_p = \langle \mathbb{K}_{\tilde{k}_1} \mathbf{c}_{r+1}, \mathbb{K}_{\tilde{k}_2} \mathbf{c}_{r+2}, \dots, \mathbb{K}_{\tilde{k}_{\tilde{r}}} \mathbf{c}_{r+\tilde{r}} \rangle$ . Observe que com  $\partial_p(\mathbf{c}_i) = 0$  para  $i > r$ , as cadeias  $\mathbf{c}_i$  da base são ciclos para  $i > r$ .

#### 4.1.2

##### Operador de bordo no complexo de Morse

Considere agora um complexo celular  $K$ , com um gradiente discreto  $\mathcal{V}$  definido nele.  $\mathcal{V}$  não é necessariamente ótimo, mas o cálculo da homologia será mais eficiente se ele tiver menos células críticas. Queremos calcular explicitamente o operador de bordo  $\tilde{\partial}_p : M_p \rightarrow M_{p-1}$  no complexo de Morse, onde  $M_p$  é o módulo livre gerado pelas  $p$ -células críticas de  $\mathcal{V}$ . Lembrando do diagrama de seção 2.8.2 *Homologia de Witten*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{0\} & \xleftarrow{\partial_0} & C_0 & \xleftarrow{\partial_1} & C_1 & \xleftarrow{\partial_2} & C_2 & \xleftarrow{\partial_3} & \dots & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & \{0\} \\ & & \Phi^\infty \downarrow & \text{Id} \uparrow & \Phi^\infty \downarrow & \text{Id} \uparrow & \Phi^\infty \downarrow & \text{Id} \uparrow & & & \Phi^\infty \downarrow & \text{Id} \uparrow & \\ \{0\} & \xleftarrow{\tilde{\partial}_0} & C_0^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} & C_1^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_2} & C_2^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_3} & \dots & \xleftarrow{\tilde{\partial}_n} & C_n^\Phi & \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} & \{0\} \\ & & \cap \downarrow & \Phi^\infty \uparrow & \cap \downarrow & \Phi^\infty \uparrow & \cap \downarrow & \Phi^\infty \uparrow & & & \cap \downarrow & \Phi^\infty \uparrow & \\ \{0\} & \xleftarrow{\tilde{\partial}_0} & M_0 & \xleftarrow{\tilde{\partial}_1} & M_1 & \xleftarrow{\tilde{\partial}_2} & M_2 & \xleftarrow{\tilde{\partial}_3} & \dots & \xleftarrow{\tilde{\partial}_n} & M_n & \xleftarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} & \{0\} \end{array}$$

podemos definir  $\tilde{\partial}$  como  $\tilde{\partial}_p(\sigma^p) = \partial_p(\Phi^\infty(\sigma^p)) \cap M_{p-1}$ . Já que o operador de bordo comuta com o fluxo ( $\partial_p \circ \Phi = \Phi \circ \partial_p$ ), usaremos a seguinte fórmula para o operador de bordo em  $M_p$ :  $\tilde{\partial}_p(\sigma^p) = \Phi^\infty(\partial_p(\sigma^p)) \cap M_{p-1}$ .

Em termos de camadas de  $\mathcal{V}$ , o bordo de uma  $p$ -célula crítica é soma de  $(p-1)$ -células primais, duais ou críticas. Pelo corolário 3.3, o fluxo iterado de uma célula dual some. Pela equação (3-3) da seção 3.3.1 *Imagem pelo fluxo de uma célula crítica ou dual*, a única célula crítica no fluxo iterado de uma célula

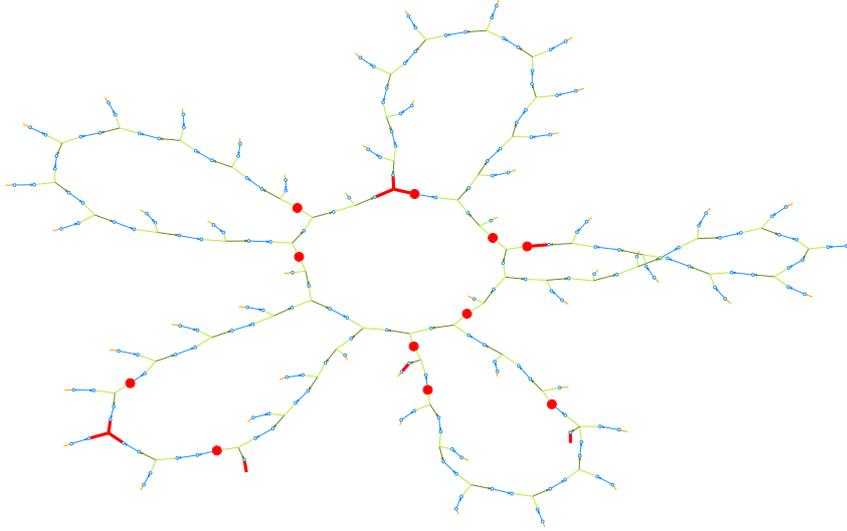


Figura 4.2: O operador de bordo pode ser lido diretamente na camada olhando para as conexões entre as células críticas sendo nós (em vermelho) e as células críticas sendo linhas (em vermelho).

crítica  $\tau^{p-1}$  é a própria  $\tau^{p-1}$ . Podemos então calcular o operador de bordo de uma célula crítica  $\sigma^p$  diretamente na camada  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ , usando o teorema 3.6:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_p(\sigma^p) = & \sum_{\tau^{p-1} \in \partial_p(\sigma^p) \cap \text{Crit}_{p-1}} [\sigma^p : \tau^{p-1}] \tau^{p-1} + \\ & \sum_{n \in \partial_p(\sigma^p) \cap \text{Prim}_{p-1}} \sum_{\rho \in \text{Crit}_{p-1}} \sum_{\langle n \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \rho \rangle} \mu(\langle n \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \rho \rangle) \cdot \rho \end{aligned} \quad (4-1)$$

Embora equação (4-1) parece complexa, ela é facilmente implementada pelo algoritmo 4.1 (figura 4.3). Como a nossa representação de  $\mathcal{V}$  na estrutura 3.1 liga cada célula a sua raiz, é mais simples obter o pai iterado de uma célula que o seu filho iterado. Então, calcularemos a matriz de bordo  $\mathbf{B}_p$  pelo co-bordo  $\partial^p$ , cuja matriz é a transposta  $\mathbf{B}_p^T$  de  $\mathbf{B}_p$ . Precisamos modificar a função junta (algoritmo 3.3) para armazenar já na criação do gradiente a multiplicidade do único caminho de uma célula para a sua raiz:

$$(\sigma.\text{bacia})_\mu = \sum_{\langle \sigma \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \sigma.\text{bacia} \rangle} \mu(\langle \sigma \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \sigma.\text{bacia} \rangle) \quad .$$

---

**Algoritmo 4.1**  $\text{bordo}(p)$  : operador de bordo no complexo de Morse de  $\mathcal{V}$

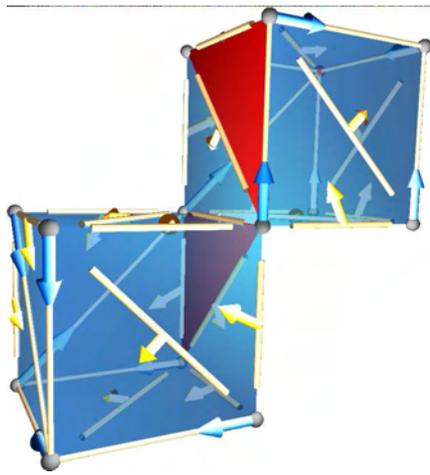
---

```

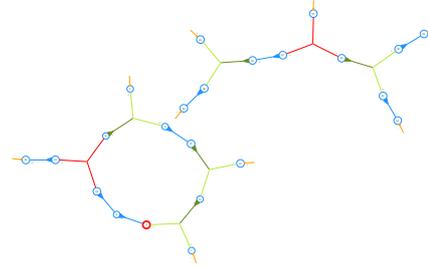
1: se  $\text{card}(\text{Crit}_p) \cdot \text{card}(\text{Crit}_{p-1}) = 0$  então // Caso trivial
2:   retorna  $\emptyset$ 
3: fim se
4:  $\mathbf{B}_p \leftarrow 0_{\mathbb{K}}$  // Matriz vazia
5: para  $\tau \in \text{Crit}_{p-1}$  faz // Para as  $(p-1)$ -células críticas
6:   pilha  $\{\text{Dual}_{p-1} \cup \text{Crit}_{p-1} \times \mathbb{K}\} \leftarrow \{(\tau, 1_{\mathbb{K}})\}$  // Guarda os hipercaminhos
7:   enquanto pilha  $\neq \emptyset$  faz // Atravessa um hipercaminho
8:      $(\tau', \mu) \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera a primeira célula do caminho
9:     para  $\sigma \in \tau'.\text{estr} \cap (\text{Prim}_p \cup \text{Crit}_p)$  faz // Para cada célula primal ou
       crítica do co-bordo de  $\tau'$ 
10:       $\rho \leftarrow \sigma.\text{bacia}$  // Acesse à raiz
11:       $\mu' \leftarrow \mu \cdot (\sigma.\text{bacia})_{\mu} \cdot [\sigma : \tau']$  // Multiplicidade do caminho
12:      se  $\rho \in \text{Crit}_p$  então // A raiz é crítica
13:         $\mathbf{B}_p[\tau][\rho] \leftarrow \mu' +_{\mathbb{K}} \mathbf{B}_p[\tau][\rho]$  // Adiciona à matriz
14:      continue // Fim do hipercaminho
15:    fim se
16:     $\rho' \leftarrow \rho.\text{casad}$  // Única linha saindo do hipercaminho
17:     $\mu' \leftarrow [\rho : \rho'] \cdot \mu'$  // Multiplicidade do caminho
18:    se  $\rho' \neq \tau'$  então // A extensão do caminho é válida
19:      pilha.insere( $(\rho', \mu')$ ) // Guarda a extensão do caminho antes da
        próxima  $\sigma$ 
20:    fim se
21:  fim para
22: fim enquanto
23: fim para
24: retorna  $\mathbf{B}_p$  // Resultado

```

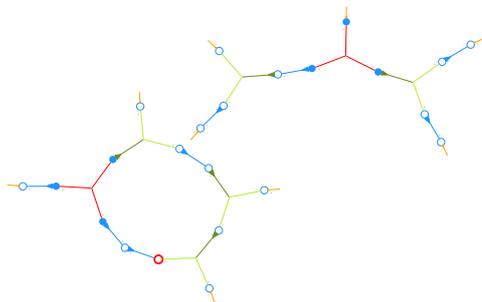
---



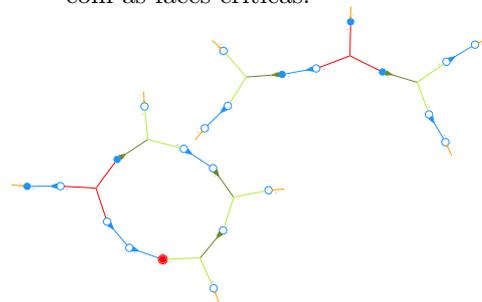
4.3(a): Modelo original.



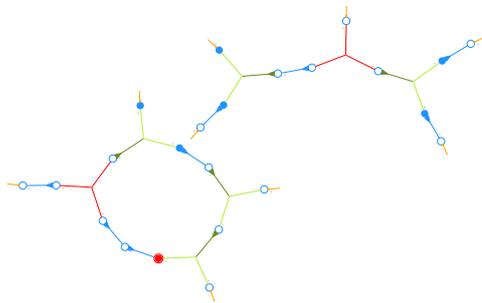
4.3(b): Etiquetas da camada  $\mathcal{L}_{12}$  com as faces críticas.



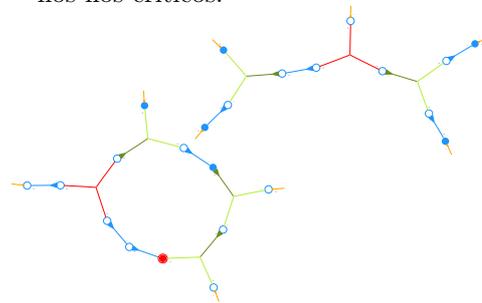
4.3(c): Percorre a estrela das linhas críticas.



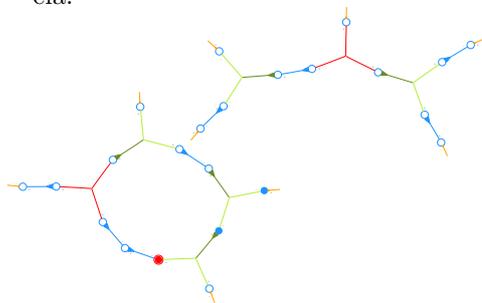
4.3(d): Passa para a raiz das arestas críticas: há uma incidência negativa nos nós críticos.



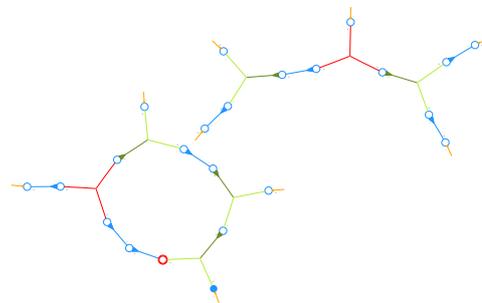
4.3(e): Se a célula ativa não for crítica, itera na célula casada com ela.



4.3(f): Passa para a raiz de novo.



4.3(g): Itera: a linha de cima tem um bordo vazio no complexo de Morse.



4.3(h): A hiperlinha casada cancela a incidência com o nó crítico por uma incidência positiva.

Figura 4.3: Exemplo da execução de bordo (algoritmo 4.1): a execução parece sincrônica, mas uma pilha permite tratar cada parte separadamente.

## 4.2

### Cálculo completo da homologia

Os algoritmos que nós vamos ver agora são aplicações diretas da seção 2.8 *Complexos de Morse*, usando a construção ótima da seção 3.2.3 *Heurística para funções de Morse ótimas* para reduzir os custos computacionais. Eles calculam primeiro um gradiente discreto ótimo, e depois calculam a homologia sobre o complexo de Morse gerado. Como este complexo de Morse é geralmente composto de apenas algumas células, qualquer algoritmo será quase instantâneo. Estes algoritmos funcionam de fato com qualquer gradiente discreto, mas serão mais eficientes com os gradientes ótimos. Por exemplo, para usar o método com a forma normal de Smith, tudo que precisamos é a representação matricial do operador de bordo que acabamos de calcular. Depois, o fluxo iterado liga de volta a homologia do complexo de Morse no complexo original. Pode ser calculado eficientemente na estrutura de hipergrafo do último capítulo usando os resultados da equação (3-3), corolário 3.3 e teorema 3.6.

#### 4.2.1

#### Números de Betti e torção

---

**Algoritmo 4.2**  $\text{homologia}(\mathbb{K})$  : calcula os grupos de homologia

---

```

1: ótima(0) // Calcula um gradiente discreto ótimo
2:  $\mathbf{B}_{-1} \leftarrow 0_{\mathbb{K}}$  // Para normalização conjunta
3: para  $p \in \{0, \dots, \dim K\}$  faz // Matrizes dos operadores de bordo
4:    $\mathbf{B}_p \leftarrow \text{bordo}(p)$  // Matriz inicial
5:    $(\tilde{\mathbf{B}}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p) \leftarrow \text{smith}(\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_{p-1})$  // Forma normal na base  $\mathbf{B}_{p-1}$ 
6:    $r_p = \text{posto } \tilde{\mathbf{B}}_p$  // Posto do operador de bordo
7:   para  $i \in \{r_{p-1}, \dots, r_{p-1} + r_p\}$  faz // Grupo de homologia
8:      $\mathbf{c}_{p-1,i} = \mathbf{Q}_{p-1} \mathbf{P}_p^{-1} \cdot [\sigma_j]_j$  // Calcula a base
9:      $k_{p-1,i} = \tilde{\mathbf{B}}_p[i][i]$  // Calcula a base
10:  fim para
11:   $\beta_{p-1} = \text{card} \{k_{p-1,i} = 1_{\mathbb{K}}, i \in \{r_{p-1}, \dots, r_{p-1} + r_p\}\}$  // Números de Betti
12: fim para
13: retorna  $\left\{ H_p = \langle \mathbb{K}_{k_{p,1}} \mathbf{c}_{p,r_p+1}, \dots, \mathbb{K}_{k_{p,r_{p+1}}} \mathbf{c}_{p,r_p+r_{p+1}} \rangle, p \in \{0, \dots, \dim K\} \right\}$ 

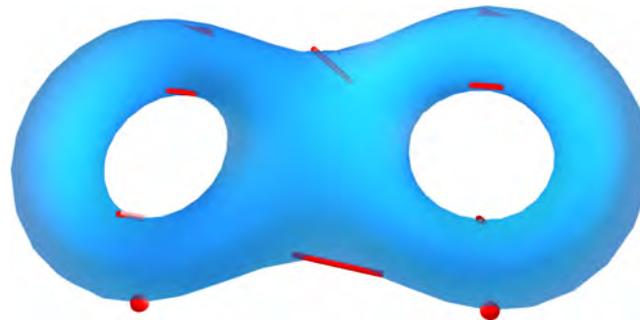
```

---

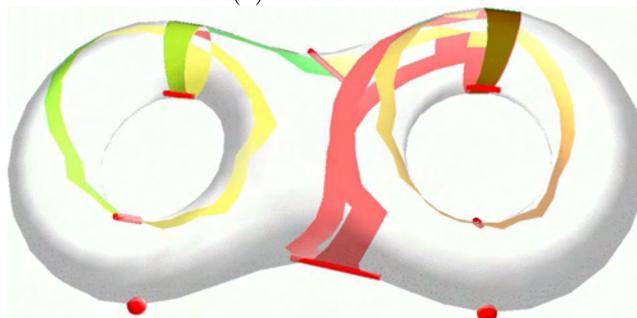
Se só precisamos dos números de Betti sobre  $\mathbb{Z}_2$  ou  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ , não precisamos calcular a forma normal de Smith inteira, pois não tem torção. Neste caso, é suficiente calcular os postos de  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{B}_{p+1}$  para obter  $\beta_p = \text{posto } \mathbf{B}_p - \text{posto } \mathbf{B}_{p+1}$ . No caso geral, o grupo de homologia completo é composto de uma parte livre de grau  $\beta_p$  mais uma torção que pode ser calculado pelo algoritmo 4.2. Observe que, embora o algoritmo chama a função ótima, funciona mesmo quando o gradiente não é ótimo.

A complexidade do algoritmo 4.2 é a da função ótima,  $O(\#K \cdot \alpha(\#K))$  (seção 3.2.4 *Complexidade*) mais a complexidade da forma normal de Smith nas células críticas, que é no pior caso  $O(m_p^3)$ . Observe que este algoritmo calcula os números de Betti, a torção e um conjunto de geradores da homologia do complexo de Morse.

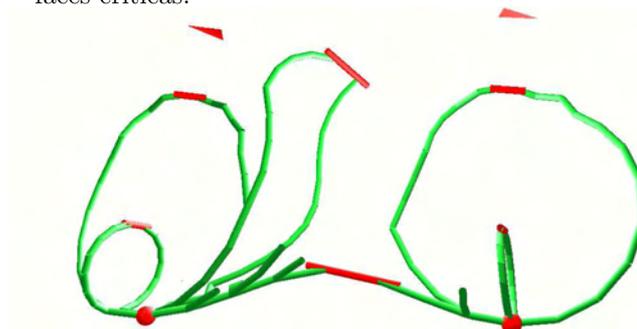
### 4.2.2 Geradores



4.4(a): Células críticas.



4.4(b): Fluxo iterado podado calculado nas duas faces críticas.



4.4(c): Fluxo iterado podado calculado nas seis arestas críticas.

Figura 4.4: Imagens parcialmente podadas das faces e arestas críticas num toro duplo pelo fluxo iterado.

Os elementos  $\mathbf{c}_{p-1,i}$  são geradores da homologia no complexo de Morse: nos casos simples,  $\mathbf{c}_{p-1,i}$  é apenas uma célula crítica. Para obter um conjunto de geradores do complexo original, é preciso mandar estes ciclos no complexo original  $K$ . Sabemos da seção 2.8.2 *Homologia de Witten* que este processo envolve

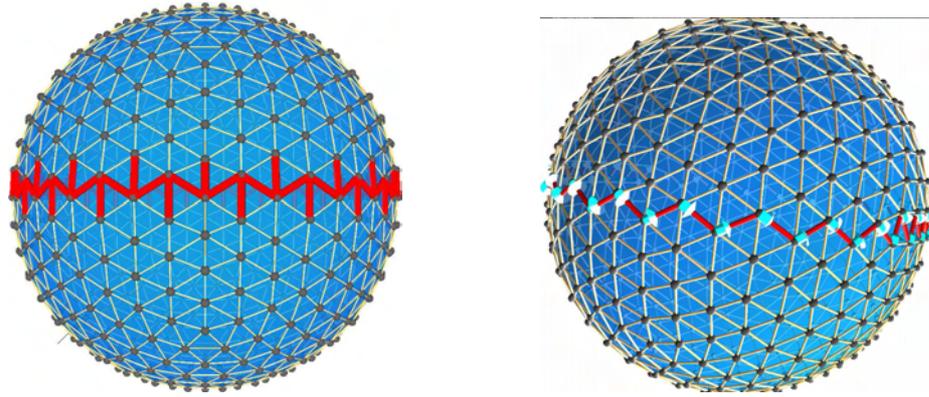


Figura 4.5: Podando uma cadeia para obter um ciclo.

---

**Algoritmo 4.3**  $\text{geradores}(\mathbf{c}_{p,i})$  : calcula um conjunto de geradores no complexo celular de origem

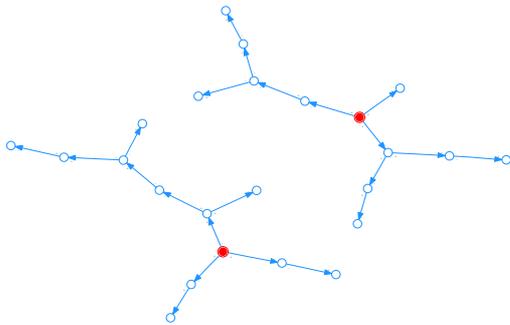
---

```

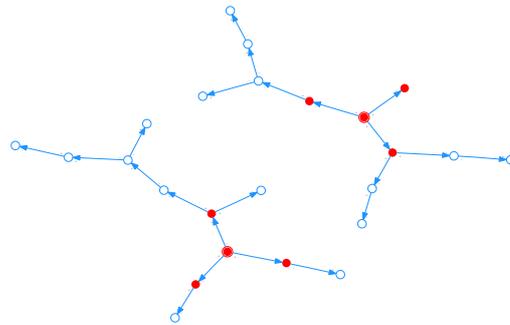
1: // Cálculo do fluxo iterado
2: pilha  $\{\text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p \times \mathbb{K}\} \leftarrow \emptyset$  // Guarda a frente do fluxo
3: para  $(\sigma, \mu) \in \mathbf{c}_{p,i}$  faz // Pra cada célula da cadeia
4:   pilha.inserere  $((\sigma, \mu))$  // Cadeia inicial
5: fim para
6:  $\mathbf{b} \leftarrow 0$  // Fluxo iterado de  $\mathbf{c}_{p,i}$ 
7: enquanto pilha  $\neq \emptyset$  faz // Itera o fluxo
8:    $(\sigma, \mu) \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera a primeira célula da cadeia
9:    $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} + \mu \cdot \sigma$  // Adiciona a cadeia invariante
10:  para  $\tau \in \sigma.\text{bord} \cap \text{Prim}_p$  faz // Elo de  $\sigma$  em  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$ 
11:     $\sigma' \leftarrow \tau.\text{casad}$  // Único nó saindo da hiperlinha
12:     $\mu \leftarrow [\tau : \sigma] \cdot [\tau : \sigma'] \cdot \mu$  // Multiplicidade do caminho
13:    pilha.inserere  $((\sigma', \mu))$  // Armazena para extensão do caminho
14:  fim para
15: fim enquanto
16:
17: // Poda da cadeia invariante
18: booleano invariante  $\leftarrow \text{falso}$  // Marca invariância
19: repete
20:   booleano invariante  $\leftarrow \text{verdadeiro}$  // Ainda não mudou
21:   para  $\tau \in \partial \mathbf{b}$  faz // células que impedem  $\mathbf{b}$  de ser um ciclo
22:      $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} \setminus \tau.\text{estr}$  // Remove o gerador do bordo trivial
23:     invariante  $\leftarrow \text{falso}$  // Invariante quando  $\partial \mathbf{b} = 0$ 
24:   fim para
25: até invariante // Podado

```

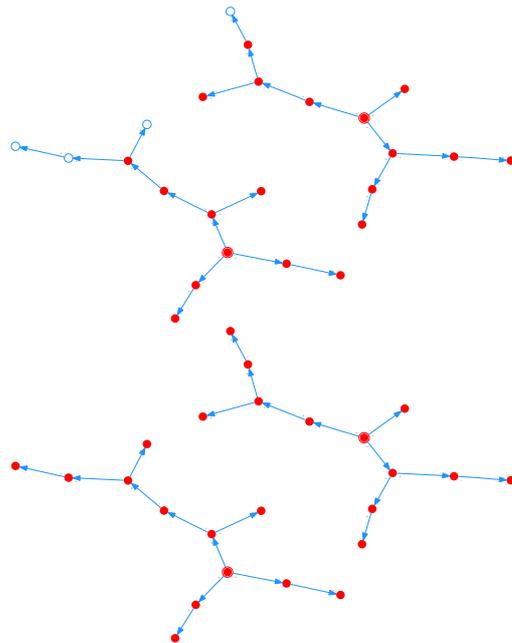
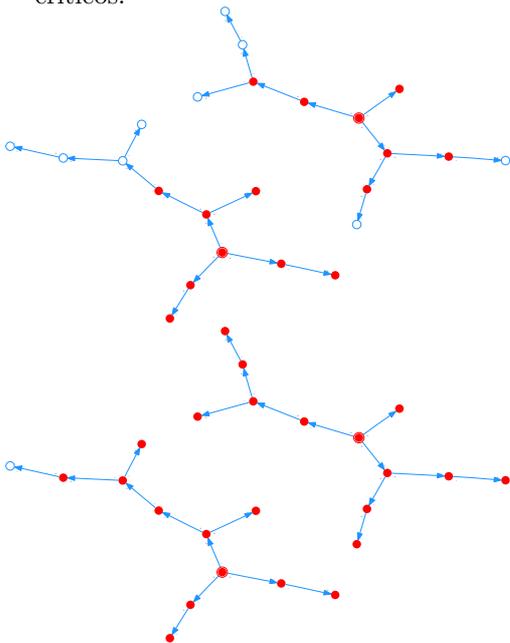
---



4.6(a): Na camada  $\mathcal{L}_{21}$  da figura 4.3(a), as cadeias invariantes começam nos nós críticos.



4.6(b): Adicionando os filhos (com sinal) às cadeias invariantes.



4.6(f): A cadeia invariante resultante já é podada neste exemplo simples.

Figura 4.6: Exemplo da execução de geradores (algoritmo 4.3).

o fluxo iterado  $\Phi^\infty$ . Uma cadeia invariante  $\Phi^\infty(\mathbf{c}_{p-1,i})$  sempre contém um gerador da homologia no complexo original (figura 4.4), mas no geral ele contém outras células e por isso pode não ser um ciclo:  $\partial_p(\Phi^\infty(\mathbf{c}_{p-1,i})) \neq 0$ . Para obter um conjunto de geradores no complexo original, o método mais simples é pôr as cadeias invariantes  $\Phi^\infty(\mathbf{c}_{p-1,i})$  até que elas se tornem ciclos (figura 4.5). A cada passo da redução, uma célula é retirada da cadeia  $\Phi^\infty(\mathbf{c}_{p-1,i})$  se for adjacente a apenas uma outra célula de  $\Phi^\infty(\mathbf{c}_{p-1,i})$ . Algoritmo 4.3 e figura 4.6 ilustram esse processo.

### 4.2.3

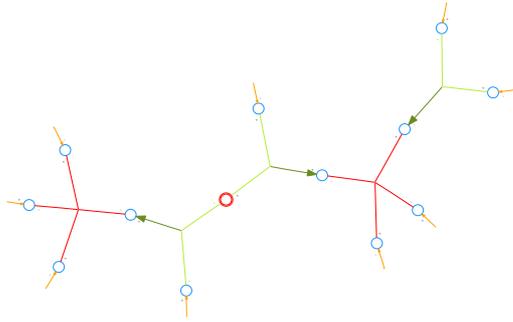
#### Decomposição de ciclos

Com este cálculo dos grupos de homologia, podemos dar uma primeira classificação de complexos celulares qualquer. O próximo passo seria caracterizar elementos sobre estes complexos. Por exemplo, se queremos relacionar duas formas, relacionaríamos primeiro os elementos topológicos, e depois os outros elementos como os geométricos. Para manter um relacionamento geométrico deste coerente com o relacionamento topológico, é preciso calcular a topologia destes elementos geométricos. Se o elemento é uma curva fechada numa superfície, como um conjunto de arestas vivas, não podemos relacionar uma curva que dá duas voltas numa alça com uma curva que completa apenas uma volta. Este tipo de caracterização pode ser feita usando a homologia, calculando a decomposição destas curvas.

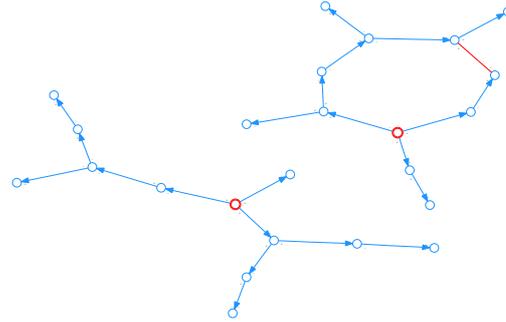
O método para calcular a decomposição dos ciclos é baseado na mesma idéia que para calcular os geradores. Dada uma cadeia  $\mathbf{c}_p$ , aplicamos o operador de bordo para ver se é um ciclo:  $\partial_p(\mathbf{c}_p) = 0$ . Se for, mandamos este ciclo no complexo de Morse usando  $\Phi^\infty$ , e calculamos a homologia deste multiplicando pelas matrizes das formas normais de Smith. Como cada uma destas operações é linear no módulo de cadeias, pré-calculamos para cada célula a sua imagem por  $\Phi^\infty$  aplicando as transformações de Smith. Pelo corolário 3.3 a imagem das células duais por  $\Phi^\infty$  some. Então, uma vez que a cadeia é identificada como ciclo, basta olhar as células primais e críticas. A única célula crítica na imagem do fluxo iterado de uma célula crítica  $\sigma$  é a própria  $\sigma$ , e então o caso das células críticas é obvio. Finalmente, usando teorema 3.6, o fluxo de uma célula primal só não some quando possui um filho iterado crítico na camada  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ . Por isso, basta olhar os ancestrais dos nós críticos nas camadas  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ .

A decomposição em ciclo é, depois, obtida somando todos os termos pré-calculados das células do ciclo. O algoritmo completo é então linear no tamanho da cadeia, e o pré-cálculo é linear no tamanho do complexo.

A integração disso tudo dá um método rápido para pré-calculer a



4.7(a):  $\mathcal{L}_{10}$  com hiperlinhas críticas



4.7(b):  $\mathcal{L}_{21}$  com hiperlinhas críticas

Figura 4.7: A pré-computação de uma célula crítica é ela mesma. Nas camadas  $\mathcal{L}_{10}$  e  $\mathcal{L}_{21}$  da figura 4.3(a) com as arestas críticas, vemos claramente que cada 0-célula primal não crítica terá a classe de homologia de exatamente uma das duas 0-células críticas, enquanto somente algumas faces críticas poderão criar ciclos não triviais.

correspondência entre o complexo celular original e a base da homologia do complexo de Morse. Este procedimento é ilustrado pelo algoritmo 4.4 (figura 4.7). Repare que a parte central do algoritmo 4.4 é parecida com algoritmo 4.1, mas as camadas primais e duais são trocadas. Isto reflete o fato desta pré-computação parecer com um cálculo de co-ciclo, embora esta propriedade teórica ainda não seja clara para nós.

---

**Algoritmo 4.4** pré-computação : pré-calcula a imagem de cada célula sobre a base da homologia

---

```

1: para  $p \in \{0, \dots, \dim K\}$  faz                                     // Para cada célula de  $K$ 
2:   para  $\sigma^p \in \text{Dual}_p$  faz                                       // Células duais
3:      $\sigma^p.\text{homo} \leftarrow 0$                                        // Imagem nula no complexo de Morse
4:   fim para
5:   para  $\sigma^p \in \text{Crit}_p$  faz                                       // Células primais e críticas
6:      $\sigma^p.\text{homo} \leftarrow \mathbf{Q}_p \mathbf{P}_{p+1}^{-1} \cdot \sigma^p$            // Decomposto sobre  $\mathbf{c}_{i,p}$ 
7:     pilha  $\{\text{Prim}_p \cup \text{Crit}_p \times \mathbb{K}\} \leftarrow \{(\sigma^p, 1_{\mathbb{K}})\}$  // Armazena os ancestrais de  $\sigma^p$ 
8:     enquanto pilha  $\neq \emptyset$  faz                                       // Atravessa o hipercaminho
9:        $(\sigma', \mu) \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera a primeira célula do caminho
10:      para  $\tau^{p+1} \in \sigma'.\text{estr} \cap \text{Dual}_p$  faz // Elo de  $\sigma'$  em  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$ 
11:         $\rho^p \leftarrow \tau^{p+1}.\text{casad}$  // Único nó saindo da hiperlinha
12:         $\mu \leftarrow [\tau^{p+1} : \rho^p] \cdot [\tau^{p+1} : \sigma'] \cdot \mu$  // Multiplicidade do caminho
13:         $\rho^p.\text{homo} \leftarrow \mu \cdot \sigma^p.\text{homo} + \rho^p.\text{homo}$  // Decomposição
14:        pilha.insere  $((\rho^p, \mu))$  // Armazena a extensão do caminho
15:      fim para
16:    fim enquanto
17:  fim para
18: fim para

```

---

#### 4.2.4

##### Resultados computacionais

Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 mostram alguns dos resultados do algoritmo 4.2, usado apenas para calcular os números de Betti. Os tempos de computação incluem o processo completo, desde a geração da função de Morse ótima (sem a otimização da fila de prioridade) até o cálculo do operador de bordo e as transformações de matrizes. Em particular para os casos 3D, a coluna travas corresponde ao número de escolhas heurísticas durante o cálculo da função de Morse ótima, ou seja, o número de vezes que a linha 3.8 é chamada no algoritmo 3.8. Os modelos 2D foram escolhidos para serem representativos e de tamanho relativamente grande, ao invés dos modelos 3D que são de tamanho menor, mas que têm uma topologia complexa. Em particular, a esfera homológica de Poincaré tem uma topologia que a homologia não detecta. Mais delicado ainda, a 3-esfera não *shellable* (NC Sphere) não admite função de Morse discreta com o número mínimo de pontos críticos da homotopia suave. Mas o cálculo da homologia funciona bem até nestes modelos.

Modelo	( # <sub>0</sub> , # <sub>1</sub> , # <sub>2</sub> )	$\chi$	( $m_0, m_1, m_2$ )	( $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ )	tempo
alien 20kv	( 19198, 57552, 38368)	14	( 7, 0, 7)	( 7, 0, 7)	1.002
alien 20kv r	( 17954, 53725, 35772)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.929
alien 40kv	( 38256, 114658, 76403)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.037
ant31850	( 1147, 2783, 1850)	214	(108, 0, 106)	(108, 0, 106)	0.038
bear	( 29642, 88270, 58630)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	1.225
boris	( 11034, 33141, 22095)	-12	( 1, 14, 1)	( 1, 14, 1)	0.448
bunny-closed	( 15005, 44973, 29969)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.708
bunny	( 15000, 44786, 29783)	-3	( 1, 4, 0)	( 1, 4, 0)	0.701
bunnyR	( 34834, 104288, 69451)	-3	( 1, 4, 0)	( 1, 4, 0)	1.689
bunny r	( 99999, 299320, 199322)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	4.608
camel1	( 2579, 7458, 4884)	5	( 14, 9, 0)	( 14, 9, 0)	0.101
camel2	( 1865, 5440, 3576)	1	( 9, 8, 0)	( 9, 8, 0)	0.074
cow	( 2904, 8706, 5804)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.113
dilo	( 27174, 81516, 54356)	14	( 1, 6, 19)	( 1, 6, 19)	1.188
dino7400	( 3703, 11102, 7400)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.160
dinosaur	( 14070, 42204, 28136)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.606
feline	( 49864, 149598, 99732)	-2	( 1, 4, 1)	( 1, 4, 1)	2.168
hammerhead	( 2564, 7688, 5150)	26	( 1, 1, 26)	( 1, 1, 26)	0.106
head-dragon	( 19119, 57107, 37989)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.750
hcamel2 sl2	( 12333, 36940, 24608)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.521
hcamel2 tri	( 10033, 30008, 19976)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.444
horse	( 48485, 145449, 96966)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	2.126
hound	( 12515, 37531, 25030)	14	( 6, 19, 27)	( 6, 19, 27)	0.528
jurassic	( 5000, 13276, 8284)	8	( 27, 19, 0)	( 27, 19, 0)	0.181
mondo	( 2769, 6712, 4084)	141	(137, 15, 19)	(137, 15, 19)	0.099
octopus	( 16944, 50808, 33872)	8	( 4, 0, 4)	( 4, 0, 4)	0.745
open bunny	( 30344, 90652, 60309)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.658
pig	( 1843, 5408, 3560)	-5	( 1, 6, 0)	( 1, 6, 0)	0.073
pig2	( 3522, 10560, 7040)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.157
pig r1	( 20004, 59965, 39962)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.872
pig r2	( 20006, 59984, 39979)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.864
pig r3	( 4999, 14970, 9972)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.212
pig r4	( 50005, 149949, 99945)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.216
pig r5	(100001, 299915, 199915)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	4.508
rhino	( 8071, 24058, 16031)	44	( 26, 6, 24)	( 26, 6, 24)	0.331
snail1850	( 1013, 2879, 1849)	-17	( 6, 34, 11)	( 6, 34, 11)	0.041
triceratops	( 2832, 8490, 5660)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.113
triceratops2	( 2832, 8490, 5660)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.105

Tabela 4.8: Resultados computacionais sobre modelos clássicos de computação gráfica. Os tempos de computação estão expressos em segundos.

Modelo	( # <sub>0</sub> , # <sub>1</sub> , # <sub>2</sub> )	$\chi$	( $m_0, m_1, m_2$ )	( $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ )	time
beethoven	( 2655, 5461, 2812)	6	( 8, 4, 2)	( 8, 4, 2)	0.077
david	(24085, 71837, 47753)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.159
david100kf	(50059,150042,100000)	17	( 27, 11, 1)	(27,11, 1)	2.815
david24k	(24085, 71837, 47753)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.158
david50kf	(24988, 74985, 49988)	-9	( 1, 10, 0)	( 1,10, 0)	1.372
david r1	(30058, 90013, 59956)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.322
david r2	( 3107, 9302, 6196)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.130
david r3	(10022, 30039, 20018)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.432
david r4	(29768, 89228, 59461)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.305
david r5	(49672,148923, 99252)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.161
david r7	( 5118, 15287, 10170)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.218
david r8	( 315, 927, 613)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.012
david r9	( 30, 82, 53)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.003
david r10	(50327,150780,100454)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.258
david r11	(50327,150780,100454)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.259
david r12	(50054,150129,100076)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.224
david r13	(50352,150826,100475)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.261
egea	( 8268, 24798, 16532)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.356
egea r1	( 3133, 9259, 6127)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.129
face-o	(13746, 40895, 27150)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.567
face	(17357, 51663, 34308)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.725
gargoyle	(30059, 89998, 59940)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.353
head1 o	(16374, 49116, 32744)	2	( 1, 0, 1)	( 1, 0, 1)	0.685
holes	( 4291, 12584, 8288)	-5	( 1, 6, 0)	( 1, 6, 0)	0.181
holes r1	( 3009, 8701, 5687)	-5	( 1, 6, 0)	( 1, 6, 0)	0.124
lion-dog	(24930, 74981, 50000)	-51	( 1, 57, 5)	( 1,57, 5)	1.208
mannequin	( 1694, 5049, 3356)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.071
mannequin r1	( 8188, 24487, 16300)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.345
mannequin r2	( 7989, 23919, 15931)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.336
mannequin r3	( 7971, 23864, 15894)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.336
mannequin r4	( 3001, 8964, 5964)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.126
maxplanck	(23609, 70690, 47082)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	1.040
maxplanck5	(19767, 59199, 39433)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.855
maxplanck r	(50018,149849, 99832)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	2.271
nef-smooth	( 2615, 7740, 5126)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.108
pieta	(13940, 41856, 27904)	-12	( 1, 14, 1)	( 1,14, 1)	0.614
venus	( 711, 2106, 1396)	1	( 1, 0, 0)	( 1, 0, 0)	0.027

Tabela 4.9: Resultados computacionais sobre esculturas escaneadas. Os tempos de computação estão expressos em segundos.

Modelo	( $\#_0, \#_1, \#_2, \#_3$ )	$\chi$	$(m_0, m_1, m_2, m_3)$	$(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$	time	travas
<b>1 cube</b>	( 8, 12, 6, 1)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.003	
<b>1 cubeT</b>	( 8, 19, 18, 6)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.002	
<b>4 cubes</b>	( 18, 33, 20, 4)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.003	
<b>4 cubesT</b>	( 18, 57, 64, 24)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.004	
<b>9 cubes</b>	( 32, 64, 42, 9)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.003	
<b>9 cubesT</b>	( 32, 115, 138, 54)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.007	
<b>36 cubes</b>	( 80, 184, 141, 36)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.007	
<b>36 cubesT</b>	( 80, 361, 498, 216)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.025	
<b>360 Cubes</b>	(572,1477,1266, 360)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.263	
<b>360 CubesT</b>	(572,3103,4692,2160)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.911	
<b>solid torus</b>	( 32, 64, 40, 8)	0	( 1, 1, 0, 0)	( 1, 1, 0, 0)	0.003	
<b>solid torusT</b>	( 32, 112, 128, 48)	0	( 1, 1, 0, 0)	( 1, 1, 0, 0)	0.005	
<b>solid <math>\mathbb{S}^2</math></b>	( 64, 144, 108, 26)	2	( 1, 0, 1, 0)	( 1, 0, 1, 0)	0.007	2
<b>solid <math>\mathbb{S}^2</math> T</b>	( 64, 278, 372, 156)	2	( 1, 0, 1, 0)	( 1, 0, 1, 0)	0.017	1
<b><math>\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1</math></b>	(192, 588, 612, 216)	0	( 1, 1, 1, 1)	( 1, 1, 1, 1)	0.068	1
<b><math>\mathbb{S}^3</math></b>	(162, 522, 576, 216)	0	( 1, 0, 0, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.056	
<b><math>\mathbb{R}^3 \setminus</math> Furch</b>	(148, 292, 181, 36)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.013	
<b><math>\mathbb{R}^3 \setminus</math> FurchT</b>	(148, 509, 578, 216)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.033	
<b>Furch</b>	(600,1580,1350, 369)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.29	
<b>FurchT</b>	(600,3299,4914,2214)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	1	
<b>Bing</b>	(480,2511,3586,1554)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.123	
<b>Björner</b>	( 6, 15, 11, )	2	( 1, 0, 1, )	( 1, 0, 1, )	0.001	
<b>c ns 3</b>	( 10, 31, 22, )	1	( 1, 1, 1, )	( 1, 0, 0, )	0.002	
<b>c ns2</b>	( 13, 39, 27, )	1	( 1, 0, 0, )	( 1, 0, 0, )	0.003	
<b>c ns</b>	( 12, 37, 26, )	1	( 1, 1, 1, )	( 1, 0, 0, )	0.002	
<b>Dunce hat</b>	( 8, 24, 17, )	1	( 1, 1, 1, )	( 1, 0, 0, )	0.003	
<b>Gruenbaum</b>	( 14, 54, 70, 29)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.003	
<b>knot</b>	(380,1929,2722,1172)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.084	
<b>Lockeberg</b>	( 12, 60, 96, 48)	0	( 1, 0, 0, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.005	
<b>NC Sphere</b>	(381,2309,3856,1928)	0	( 1, 2, 2, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.142	2
<b>nonextend</b>	( 7, 19, 13, )	1	( 1, 0, 0, )	( 1, 0, 0, )	0.001	
<b>Poincaré</b>	( 16, 106, 180, 90)	0	( 1, 2, 2, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.007	3
<b>Projective</b>	( 6, 15, 10, )	1	( 1, 1, 1, )	( 1, 1, 1, )	0.003	
<b>Rudin</b>	( 14, 66, 94, 41)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.004	
<b>Simon 2</b>	( 6, 15, 10, )	1	( 1, 0, 0, )	( 1, 0, 0, )	0.002	
<b>Simon</b>	( 7, 20, 14, )	1	( 1, 0, 0, )	( 1, 0, 0, )	0.002	
<b>solid 2-torus</b>	( 6, 12, 6, )	0	( 1, 1, 0, )	( 1, 1, 0, )	0.002	
<b>walkup C</b>	( 20, 126, 212, 106)	0	( 1, 0, 0, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.006	
<b>walkup D</b>	( 16, 106, 180, 90)	0	( 1, 0, 0, 1)	( 1, 0, 0, 1)	0.006	
<b>Ziegler</b>	( 10, 38, 50, 21)	1	( 1, 0, 0, 0)	( 1, 0, 0, 0)	0.002	

Tabela 4.10: Resultados computacionais sobre modelos sólidos e os modelos de (Hachimori Models). Modelos com nome terminados por um ‘T’ são versões simpliciais dos modelos sem ‘T’. Os tempos de computação estão expressos em segundos.



## 5

### Complexos de Morse discretos geométricos

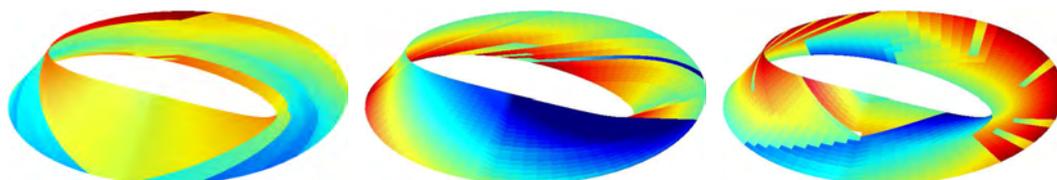
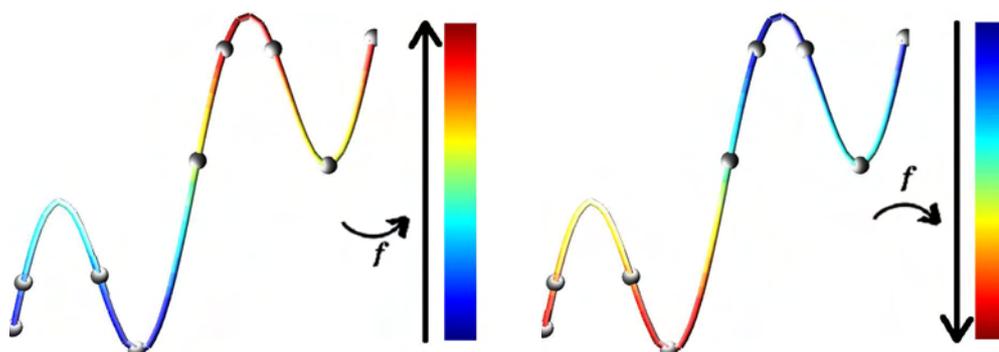


Figura 5.1: Diferentes geometrias numa faixa de Möbius: uma função de Morse discreta geométrica tem que, ao mesmo tempo, capturar a geometria e respeitar a topologia.

A definição de uma função de Morse discreta (seção 2.3.2 *Casamentos acíclicos*) não oferece uma maneira direta de transformar uma função de Morse suave  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  numa função discreta. Além disso, mesmo que  $K$  seja uma decomposição celular de uma variedade  $\mathcal{M}$ :  $|K| = \mathcal{M}$ , uma amostragem direta  $\mathfrak{f} = f|_K$  de uma função de Morse suave  $f$  não é diretamente uma função de Morse discreta. Se existisse uma tal correspondência, isso permitiria usar a teoria de Morse discreta da topologia para a geometria e vice-versa, de maneira análoga à teoria de Morse suave.



5.2(a): O complexo é bem adaptado a  $f$ : os mínimos ocorrem nos vértices e quase todos os máximos nas arestas.

5.2(b): O complexo não é nada adaptado a  $f$ : os mínimos ocorrem longe dos vértices e os máximos nos vértices.

Figura 5.2: Se o complexo não está adaptado à função geométrica, a definição de células críticas é delicada.

Esta seção é uma tentativa de definir um gradiente discreto  $\mathcal{V}$  a partir de uma função escalar dada nos vértices  $f : K^0 \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada de

“geometria” neste capítulo (figura 5.1). Garantiremos que nossa construção gera um gradiente válido e que, pelo menos no caso de superfícies, o fluxo  $\mathcal{V}$  é crescente em relação a  $f$ . Já que os pontos críticos de  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  podem não ser vértices de  $K$ ,  $|K| = \mathcal{M}$  (figura 5.2), a noção de pontos críticos é delicada no mundo discreto. A definição usual é de Banchoff (Banchoff, 1967), e está baseada na característica de Euler. Esta definição pode passar por cima de alguns pontos críticos essenciais em dimensão alta, e por isso a estenderemos naturalmente usando ou homologia (seção 4.2.1 *Números de Betti e torção*) ou diretamente a nossa construção de funções de Morse ótimas (seção 3.2.3 *Heurística para funções de Morse ótimas*). A maior vantagem desta construção sobre outras decomposições chamadas de Morse–Smale (Edelsbrunner *et al.*, 2001, Edelsbrunner *et al.*, 2003) é a simplicidade, o rigor da construção e a sua generalidade, pois a construção funciona para qualquer complexo celular finito. Além do mais, esta construção pode ser completada para garantir a posição das células críticas, apesar de termos provado que esta etapa não é necessária para superfícies refinadas. Finalmente, a teoria de Forman assegura a homologia do complexo resultante, garantindo um resultado consistente.

## 5.1

### Pontos críticos geométricos

A definição de pontos críticos deve seguir o lema de Morse: uma função suave  $f$  perto de um dos seus pontos críticos  $\mathbf{x}$  é localmente similar a uma forma quadrática deduzida da sua matriz Hessiana (seção 2.4.1 *Pontos críticos*). Em particular, perto de um ponto crítico  $\mathbf{x}$  de índice de Morse  $p$ , existe uma base ortonormal contendo  $p$  direções para as quais  $\mathbf{x}$  é um máximo local e  $n - p$  direções para as quais é um mínimo local. Por outro lado, não podemos garantir nem que  $\mathbf{x}$  é um vértice de  $K$  nem que as células incidentes a  $\mathbf{x}$  representam cada direção da base ortonormal. Um ponto crítico é então definido como uma quebra na monotonicidade de  $f$  (figura 5.3). O índice de Banchoff de um tal ponto crítico  $\mathbf{x}$  será ligado ao número de mudanças entre direções crescentes e decrescentes ao redor de  $\mathbf{x}$  (Banchoff, 1967).

#### 5.1.1

##### Definição de Banchoff e limitações

Dada uma função  $f : K^0 \rightarrow \mathbb{R}$  definida nos vértices de um complexo celular, tal que  $f$  tenha valores diferentes para vértices adjacentes, Banchoff dá a seguinte definição para os seus pontos críticos: Define a *estrela inferior*  $\text{bx}_f \tau$  de um vértice  $\tau$  como sendo o conjunto de células  $\sigma$  da estrela aberta

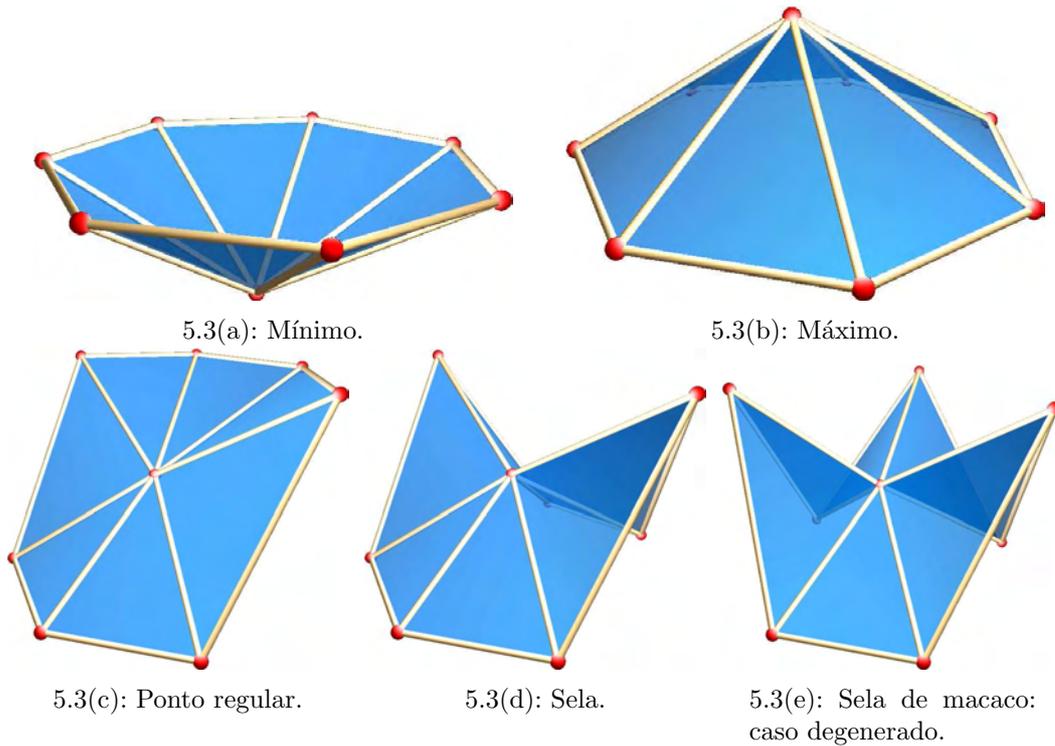


Figura 5.3: Classificação de pontos genéricos em superfícies e uma sela não genérica.

est  $\tau$  de  $\tau$  tendo as imagens  $f(\tau')$  de seus vértices  $\tau'$  inferiores ou iguais a  $f(\tau)$  (figura 5.4). Um vértice  $\tau$  é crítico se a característica de Euler da sua estrela inferior difere de um disco semi-aberto:  $\chi(\text{bx}_f \tau) \neq 0$ . O índice de Banchoff de um ponto crítico é definido por esta característica de Euler:

$$\text{idc}(\tau) = \chi(\text{bx}_f \tau) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \text{card} \{ \sigma^p > \tau, f(\sigma^p) < f(\tau) \}.$$

Observe que esta definição difere do índice de Morse  $q(\tau)$  de um ponto crítico  $\tau$ , definido pelo número de autovalores negativos da matriz Hessiana. Porém,  $\text{idc}(\tau) = (-1)^{q(\tau)}$  para pontos críticos não degenerados e Banchoff provou em (Banchoff, 1967) que este índice ainda é ligado à característica de Euler da variedade:  $\chi(K) = \sum_{\tau \in K^0} \text{idc}(\tau)$ .

Mesmo que esta definição seja simples e intuitiva, não podemos usá-la para definir rigorosamente um complexo de Morse discreto pelas razões seguintes: requer testes adicionais até para decidir se um ponto crítico é um máximo ou um mínimo, e em dimensão alta, a característica de Euler não é suficiente para detectar todos os pontos críticos, pois não determina se um complexo é homeomorfo a um disco ou não. Por isso, podem existir pontos críticos essenciais para calcular a homologia no complexo de Morse que são esquecidos pela definição de Banchoff. Em todo caso, nossa construção

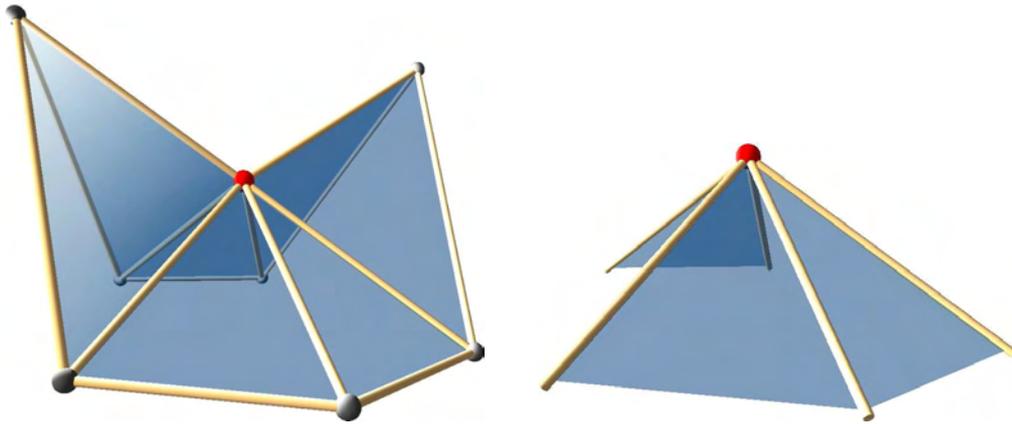


Figura 5.4: Estrela inferior de um ponto sela.

de complexos de Morse discretos pode até usar um conjunto incompleto de pontos críticos, pois ela gera automaticamente um conjunto completo de células críticas a partir destes pontos críticos.

### 5.1.2

#### Pontos críticos em dimensão alta

Usaremos duas definições diferentes de pontos críticos que coincidem nos casos práticos. A primeira é baseada no cálculo da homologia, e é definida de forma única em todos os casos. Se a homologia da estrela inferior é  $(\mathbb{K}, \{0\}, \{0\} \dots)$ , o ponto é regular. Caso contrário, é um máximo se  $\beta_0 = 0$ , um mínimo se  $\beta_{n-1} = 1$ , uma 1-sela se  $\beta_0 = 2$  e uma  $k$ -sela se  $\beta_{k-1} = 1$  (figura 5.5). Pode também ser uma sela degenerada se  $\beta_k > 1$  ou  $\beta_0 > 2$ . No caso de uma topologia muito complicada, esta definição pode passar por cima de alguns pontos críticos, por exemplo se a estrela inferior de um vértice é um disco homológico. A homologia é calculada usando o algoritmo da seção 4.2.1 *Números de Betti e torção*.

A segunda definição usa nossa heurística para definir funções de Morse ótimas (seção 3.2.3 *Heurística para funções de Morse ótimas*). Se a heurística consegue definir um gradiente discreto sem nenhum ponto crítico na estrela inferior de um vértice, este vértice será considerado regular. Caso contrário este ponto será crítico, e a sua classe é calculada da mesma maneira que na primeira definição. Repare que mesmo que a estrela inferior não seja um complexo celular, o algoritmo da seção 3.2 *Construção gulosa* se aplica diretamente. Esta definição não é tão rigorosa como a definição baseada na homologia, mas permite considerar como críticas obstruções para cancelar células como a não “shellabilidade”, elementos de homotopia não simples ou discos homológicos.

Observe que ambas definições coincidem com a definição de Banchoff para superfícies e sólidos, mas a classe do ponto crítico pode ser calculada

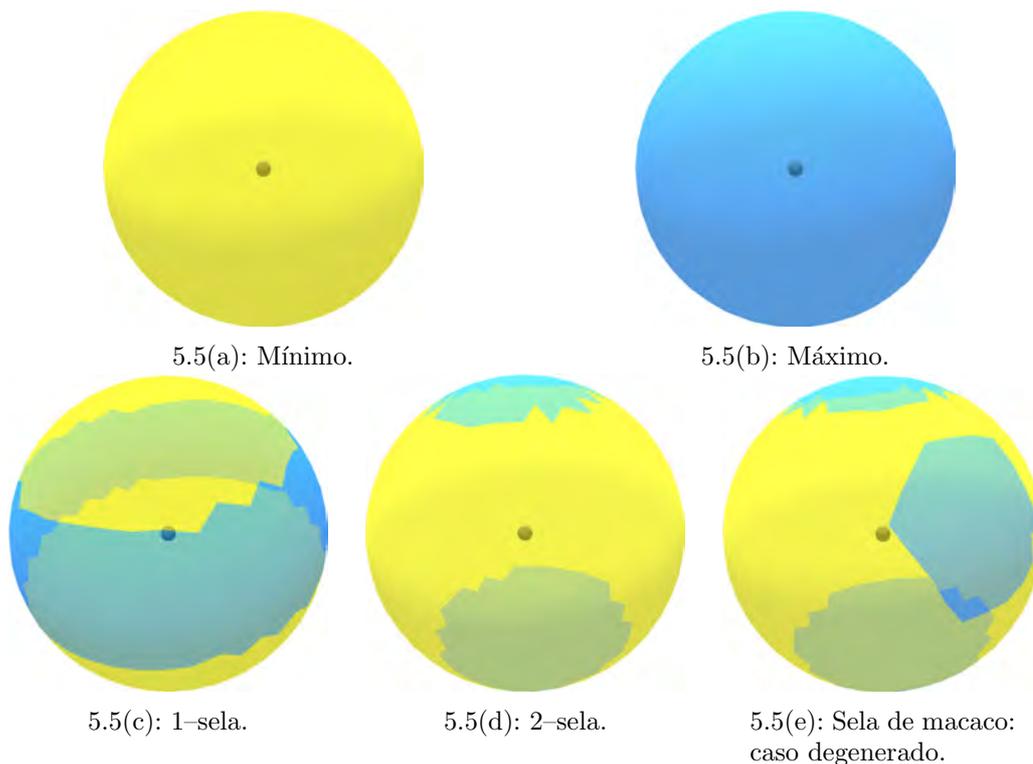


Figura 5.5: Classificação de pontos genéricos em sólidos e uma sela não genérica: o elo do ponto é mapeado sobre uma esfera, as partes em azul representam os valores superiores e em amarelo os valores inferiores ao valor do ponto.

mais facilmente.

### 5.1.3

#### Dos pontos críticos até as células críticas

Na teoria de Morse discreta, os elementos críticos são células de dimensão qualquer, ao invés de somente pontos. Embora este ponto de vista tenha gerado resultados poderosos, a detecção de células críticas em si é um pouco mais complicada que detectar pontos críticos. A parte central do nosso algoritmo de fato não precisa desta detecção, mas pode ser útil para controlar a saída do algoritmo. Consideramos dois contextos: No primeiro contexto, se a malha contém mais informações do que apenas o suporte para a geometria, por exemplo, quando for gerada para obter uma distribuição certa dos triângulos, uma célula crítica tem que ser selecionada dentro das células existentes. No segundo contexto onde temos a possibilidade de mudar a malha, criaremos células críticas diretamente a partir do ponto crítico.

A classificação dos pontos críticos é essencial para a teoria de Morse discreta, pois o índice de um ponto crítico determina a dimensão da célula crítica correspondente. Como um ponto crítico degenerado corresponde a vários pontos críticos aglomerados, o processo gerará várias células críticas para um ponto

crítico degenerado. Em particular, isto é implementado chamando várias vezes o processo para gerar células críticas a partir de pontos críticos não degenerados.

Em ambos os contextos, a parte mais simples é a detecção de mínimos, pois na teoria de Forman um mínimo é um vértice, que se identifica simplesmente com um ponto, e o nosso algoritmo coloca sempre os mínimos nos lugares certos. Um máximo  $\tau$  também é facilmente detectado, mas a célula crítica  $\sigma$  correspondente tem que ser uma célula de dimensão máxima  $n$ . Escolheremos  $\sigma$  como a célula contendo os vértices do elo de  $\tau$  com o maior valor atribuído por  $f$  figura 5.6. Formalmente, escrevendo  $\tau_1 = \operatorname{argmax} \{f(\tau'), \tau' \in K^0 \cap \text{elo } \tau\}$  e  $\tau_{i+1} = \operatorname{argmax} \{f(\tau'), \tau' \in K^0 \cap \text{elo } \tau_i \setminus \{\tau_j, j \leq i\}\}$ ,  $\sigma$  é a célula incidente aos primeiros  $\tau_i$ . Se o complexo é simplicial, podemos escrever  $\sigma = \operatorname{span}(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ .

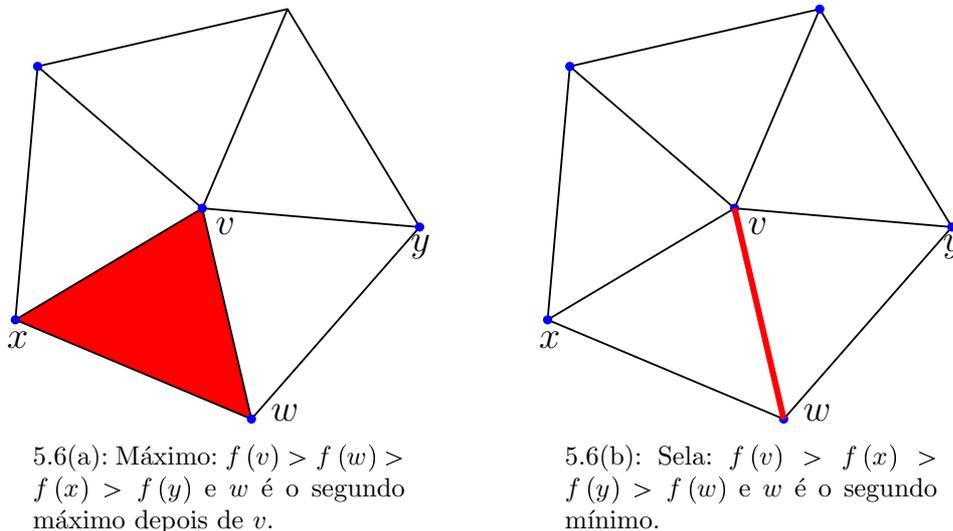


Figura 5.6: Construção de uma célula de máximo e de uma célula de sela a partir de um ponto crítico.

A construção de uma sela é baseada na seguinte observação. No caso suave, o fluxo alonga uma vizinhança da sela nas direções onde a sela é um máximo local. Este alongamento estende-se nos dois lados do ponto de sela, e a parte mais baixa é uma direção natural do fluxo. A construção de uma sela de índice  $k > 1$  é então similar à construção de um máximo, mas usando  $\operatorname{argmin}$  no lugar de  $\operatorname{argmax}$  na definição de  $\tau_i$ .

A construção de uma sela de índice 1 é um pouco mais complicada, pois a estrela inferior não é conexa. Para cada componente conexo  $i$  da estrela inferior, anotamos por  $\sigma_i$  a aresta deste componente conexo incidente ao menor vértice. Seja  $\sigma_0$  a aresta incidente ao menor vértice de toda a estrela. Então cada célula  $\sigma_i, i \neq 0$  será crítica, onde  $\sigma_0$  é excluída pois corresponde a direção

regular do fluxo figura 5.6. Esta definição inclui células degeneradas, como selas de macaco.

No segundo contexto, podemos separar o vértice, identificado com o ponto crítico, para gerar a célula crítica na direção certa. Por exemplo, um máximo  $\tau$  será substituído por uma célula de dimensão máxima  $\sigma$  tendo a mesma combinatória que a intersecção de uma pequena bola perto de  $\tau$  com a estrela de  $\tau$ . Os vértices de  $\sigma$ , ou seja, as intersecções da esfera com as arestas de est  $\tau$ , serão posicionados na mesma altura  $f(\tau)$ . Uma sela de índice  $k$  será então construída da mesma maneira, mas considerando um  $k$ -cilindro em vez de uma bola.

## 5.2 Computação

Nosso algoritmo calcula um complexo de Morse discreto geométrico usando o algoritmo guloso da seção 3.2 *Construção gulosa*. Esta parte do algoritmo é suficiente na maioria dos casos práticos testados. Porém, sozinho ele pode passar por cima de algumas células críticas, ou gerar células críticas que não correspondem à definição da seção 5.1 *Pontos críticos geométricos*. Para garantir que nenhum ponto crítico seja esquecido, a construção pode detectar independentemente os pontos críticos antes da parte gulosa do algoritmo. Estes pontos críticos são depois transformados em células críticas seguindo o procedimento da seção 5.1.3 *Dos pontos críticos até as células críticas*. Algumas células críticas podem ser geradas a mais pela construção gulosa. Isso vem geralmente de uma complexidade local da geometria ou de obstruções locais à shellabilidade. Estes pontos críticos a mais podem, na maioria dos casos, ser cancelados usando diretamente os resultados de (Forman, 1995) (seção 2.6 *Cancelamentos*). A construção é então composta dos quatro passos descritos nesta seção, mas na prática só precisa do terceiro passo. Este constrói de fato um gradiente discreto alinhado com  $f$ , e o complexo de Morse discreto pode ser lido diretamente usando o algoritmo descrito no final desta seção.

### 5.2.1 Procurando pontos críticos

Os pontos críticos podem ser identificados de três maneiras diferentes construindo a estrela inferior do candidato  $\tau$  e calculando: ou a sua característica de Euler, ou a sua homologia ou uma função de Morse discreta nela. O algoritmo 5.1 detalha o segundo caso, que usamos para os nossos resultados experimentais. O terceiro caso pode também ser calculado pelo algoritmo 5.1, mas sem calcular os números de Betti e considerando que  $\beta_p = m_p$ .

A estrela inferior não é um complexo celular, mas o algoritmo de cálculo da homologia e o algoritmo de cálculo de funções de Morse ótimas funcionam diretamente nesta estrutura, pois precisam apenas do operador de incidência para funcionar. Ou, de outro ponto de vista, isto corresponde ao cálculo no fecho abstrato da estrela inferior.

---

**Algoritmo 5.1**  $\text{pontocritico}(\tau, f)$ : verifique se  $\tau$  é crítica

---

```

1:  $L = \{\sigma > \tau, f(\sigma) < f(\tau)\}$  // Recupera a estrela inferior de  $\tau$ 
2: se  $L = \emptyset$  então // Máximo
3: retorna máximo
4: fim se
5:  $(\beta_i) \leftarrow \text{betti}(L)$  // Calcula o número de Betti de  $L$ 
6: se  $(\beta_i) = (1, 0, 0, \dots)$  então // Célula regular
7: retorna regular
8: fim se
9: se  $\beta = (1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ :  $\beta_{n-1} = 1$  então // Mínimo
10: retorna mínimo
11: fim se
12: se  $\beta = (2, 0, 0, \dots)$  então // 1-Sela
13: retorna sela(1)
14: fim se
15: se  $\beta = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ :  $\beta_{k-1} = 1$  então //  $k$ -Sela
16: retorna sela( $k$ )
17: fim se
18: retorna degenerado( $\beta_i$ )

```

---

## 5.2.2

### Seleção das células críticas

Na seção 5.1.3 *Dos pontos críticos até as células críticas* descrevemos duas maneiras de criar células críticas a partir de pontos críticos. Detalharemos aqui a primeira com a função  $\text{pontocritico}$  (algoritmo 5.1), que escolhe as células críticas dentro das células existentes. A função  $f$  é pré-calculada para cada célula pelo valor de  $f$  no seu baricentro  $f(\sigma) = \text{média}\{f(\tau), \tau \in K^0 \cap \sigma\}$ . O caso de selas de índice 1 não é descrito no algoritmo 5.2, pois a descrição da seção 5.1.3 *Dos pontos críticos até as células críticas* é mais clara, e é de fato implementado de forma mais eficiente diretamente no algoritmo 5.1.

## 5.2.3

### Construção principal

Agora vamos descrever a parte central da nossa construção de complexos de Morse discretos geométricos. Já que a construção gulosa da seção 3.2 *Construção gulosa* pode gerar *qualquer* gradiente discreto, a única parte a acertar é

**Algoritmo 5.2**  $\text{celulacritica}(f)$ : seleciona células críticas

---

```

1: para  $\tau \in K^0$  faz                                     // Para cada célula de  $K$ 
2:   etiqueta  $\leftarrow$  pontocritico( $\tau, f$ )                // Verifica se  $\tau$  é crítica
3:   se etiqueta = mínimo então                          // Mínimo
4:      $\tau.\text{val} \leftarrow \infty$                         // Marca como crítica
5:   fim se
6:
7:   se etiqueta = máximo então                          // Máximo
8:      $max \leftarrow 0$                                     // Inicia a busca
9:     para  $\sigma^1 \in \tau.\text{estr}$  faz                  // Recupera a maior aresta incidente
10:      se  $max < f(\sigma^1)$  então                    // Maior aresta
11:         $\sigma = \sigma^1$  ;  $max = f(\sigma^1)$           // Novo máximo
12:      fim se
13:    fim para
14:    para  $i \in \{2, \dots, n\}$  faz                  // Recupera a maior célula incidente
15:       $max \leftarrow 0$                                     // Inicia a busca
16:      para  $\sigma^i \in \sigma.\text{estr}$  faz              // Recupera a maior célula incidente a  $\sigma$ 
17:        se  $max < f(\sigma^i)$  então                  // Maior célula
18:           $\sigma = \sigma^i$  ;  $max = f(\sigma^i)$         // Novo máximo
19:        fim se
20:      fim para
21:    fim para
22:     $\sigma.\text{val} \leftarrow \infty$                       // Marca como crítica
23:  fim se
24:
25:  se etiqueta = sela( $k$ ),  $k \neq 1$  então              //  $k$ -Sela
26:     $min \leftarrow \infty$                                 // Inicia a busca
27:    para  $\sigma^1 \in \tau.\text{estr}$  faz                  // Recupera a menor aresta incidente
28:      se  $min > f(\sigma^1)$  então                    // Menor aresta
29:         $\sigma = \sigma^1$  ;  $min = f(\sigma^1)$           // Novo mínimo
30:      fim se
31:    fim para
32:    para  $i \in \{2, \dots, k\}$  faz                  // Recupera a menor célula incidente
33:       $min \leftarrow \infty$                                 // Inicia a busca
34:      para  $\sigma^i \in \sigma.\text{estr}$  faz              // Recupera a menor célula incidente a  $\sigma$ 
35:        se  $min > f(\sigma^i)$  então                  // Menor célula
36:           $\sigma = \sigma^i$  ;  $min = f(\sigma^i)$         // Novo mínimo
37:        fim se
38:      fim para
39:    fim para
40:     $\sigma.\text{val} \leftarrow \infty$                       // Marca como crítica
41:  fim se
42: fim para
43: (...)

```

---

a função `peso_cancelamento` (algoritmo 5.3). Tentamos várias funções de peso, mas os melhores resultados foram obtidos pela simples diferença entre a altura dos baricentros das duas células a serem canceladas. Este peso também permitiu provar os resultados da seção 5.3 *Propriedades e prova do algoritmo*, em particular a detecção automática das células críticas pela construção gulosa nos casos regulares. Porém, para casos especiais, as células críticas podem ser detectadas usando a função `celulacritica` (algoritmo 5.2). Neste caso, as células críticas selecionadas são respeitadas pelo algoritmo, mas ele pode gerar também outras células críticas, que podem por sua vez ser canceladas usando a função `cancela` (algoritmo 5.4) descrita na próxima seção.

---

**Algoritmo 5.3** `smale(f)`: construção do gradiente geométrico

---

```

1: define peso ( $K, (\tau^{p-1}, \sigma^p)$ )  $\leftarrow$  // Função geométrica
    $\begin{cases} \infty & \text{se } \sigma^p.\text{val} = \infty \\ \infty & \text{se } \tau^{p-1}.\text{val} = \infty \\ f(\sigma^p) - f(\tau^{p-1}) & \text{caso contrário} \end{cases}$ 
2: guloso(peso) // Construção do gradiente discreto de  $f$ 

```

---

#### 5.2.4

#### Otimização dos cancelamentos

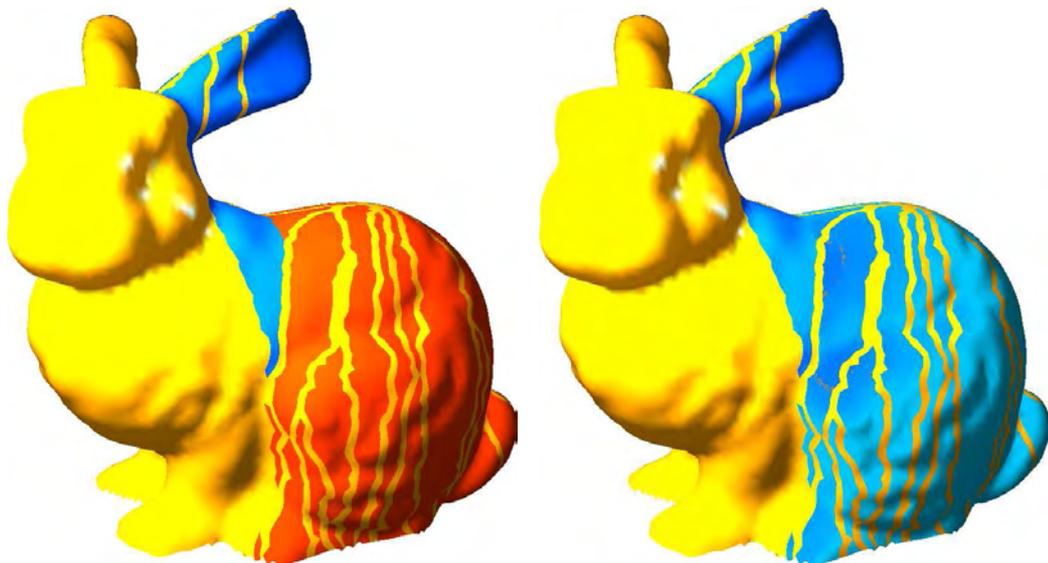


Figura 5.7: Um cancelamento corresponde a uma junção de regiões na decomposição de Morse–Smale.

O algoritmo 5.3 da seção anterior pode gerar mais células críticas do que esperado, ou por causa de ruído ou irregularidades locais do complexo, ou por causa de singularidades topológicas que não foram detectadas. No primeiro caso, é possível corrigir este comportamento cancelando pares de

células críticas (figura 5.7). Isto pode ser feito eficientemente no complexo de Morse, usando a construção do operador de bordo da seção 4.1.2 *Operador de bordo no complexo de Morse*. Um cancelamento pode ainda ser efetuado no complexo original pelo algoritmo 5.4, que também verifica se o cancelamento é válido. O processo completo de cancelamento simplesmente chama **cancela** para cada par  $(\tau^{p-1}, \sigma^p)$  de células críticas que não foram detectadas pelo algoritmo 5.2, na ordem definida por **peso\_cancelamento**. O complexo de Morse–Smale pode ser ainda simplificado do mesmo jeito, considerando todos os pares de células críticas, o que fornece uma representação hierárquica do complexo de Morse–Smale.

---

**Algoritmo 5.4**  $\text{cancela}(\tau^{p-1}, \sigma^p)$ : cancela um par de células críticas

---

```

1: caminho  $\leftarrow \emptyset$ 
2: pilha  $\leftarrow \{ \text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p \times (\text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p \times \text{Prim}_{p-1})^{\mathbb{N}} \} \leftarrow \{ \sigma^p, \emptyset \}$  // Guarda os caminhos do gradiente
3: enquanto pilha  $\neq \emptyset$  faz // Atravessa um hipercaminho
4:    $(\sigma', \textit{caminho}') \leftarrow \textit{pilha}.\textit{topo}$  // Recupera a primeira célula do caminho
5:   para  $\tau' \in \sigma'.\textit{bord} \cap (\text{Prim}_{p-1} \cup \text{Crit}_{p-1})$  faz // Para cada célula primal ou crítica no bordo de  $\sigma$ 
6:      $\textit{caminho}' \leftarrow \textit{caminho}' \cup (\sigma', \tau')$  // Estende o caminho
7:     se  $\tau' = \tau^{p-1}$  então // Atingiu o par da célula crítica
8:       se caminho  $\neq \emptyset$  então // Já achou um caminho
9:         erro // O cancelamento não é válido
10:      fim se
11:       $\textit{caminho} \leftarrow \textit{caminho}'$  // Guarda o caminho
12:    fim se
13:     $\rho \leftarrow \tau'.\textit{casad}$  // Próximo passo do gradiente
14:    se  $\rho \neq \sigma'$  então // A extensão do caminho é válida
15:      pilha.insere  $((\rho, \textit{caminho}'))$  // Guarda para o próximo caminho
16:    fim se
17:  fim para
18: fim enquanto
19:
20: para  $(\sigma', \tau') \in \textit{caminho}$  faz // Atravessa o caminho
21:    $\sigma'.\textit{casad} \leftarrow \tau'$  // Eventualmente cancela  $\sigma^p$ 
22:    $\tau'.\textit{casad} \leftarrow \sigma'$  // Eventualmente cancela  $\tau^{p-1}$ 
23: fim para

```

---

## 5.2.5

### Identificação de bacias

Uma vez que o gradiente discreto foi definido, é possível ler as bacias instáveis e estáveis diretamente na nossa estrutura de dados (seção 3.2.1 *Estrutura de dados e algoritmos básicos* e (Lewiner, 2002)). Isto completa a cons-

trução da nossa decomposição de Morse–Smale. A função `iden_bacia` (algoritmo 5.5) é quase idêntica ao cálculo do operador de bordo do algoritmo 4.1 (seção 4.1.2 *Operador de bordo no complexo de Morse*), só que atua em  $\mathcal{L}_{p(p+1)}$  ao invés de  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$ . Observe que uma célula pode pertencer a várias bacias ao mesmo tempo, como foi descrito na seção 3.3.2 *Bacias discretas estáveis e instáveis*.

---

**Algoritmo 5.5** `iden_bacia( $\sigma^p$ )`: calcula a bacia de  $\sigma$

---

```

1: se  $\sigma^p \in \text{Prim}_p$  então // Célula primal
2:   retorna iden_bacia( $\sigma^p$ .casad) // Bacia da célula dual associada
3: fim se
4:  $\mathbf{b} \leftarrow \emptyset$  // Resultado
5: pilha  $\{\text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p\} \leftarrow \{\sigma^p\}$  // Guarda o hipercaminho
6: enquanto pilha  $\neq \emptyset$  faz // Atravessa um hipercaminho
7:    $\sigma \leftarrow \text{pilha.topo}$  // Recupera a primeira célula do caminho
8:   para  $\tau \in \sigma.\text{bord} \cap \text{Prim}_{p-1}$  faz // Para cada linha de  $\mathcal{L}_{p(p-1)}$ 
9:      $\rho \leftarrow (\tau.\text{casad}).\text{bacia}$  // Passa para a raiz
10:    se  $\rho \in \text{Crit}_p$  então // Raiz crítica
11:       $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{b} \cup \rho$  // Adiciona a raiz
12:    continue // Fim do hipercaminho
13:  fim se
14:  se  $\rho \neq \sigma$  então // A extensão do caminho é válida
15:    pilha.insere( $\rho$ ) // Guarda a extensão antes da próxima  $\sigma$ 
16:  fim se
17: fim para
18: fim enquanto

```

---

### 5.3

#### Propriedades e prova do algoritmo

A construção acima é composta: de um núcleo, a construção gulosa da seção 3.2 *Construção gulosa* com um peso de cancelamento específico, um pré-processamento que seleciona as células críticas e um pós-processamento que cancela partes das células críticas. O algoritmo completo sempre cria um gradiente discreto válido, pois usa o teste de aciclicidade do algoritmo 3.6 e o cancelamento do algoritmo 5.4 verifica a validade da operação antes de efetuarla. Além disso, as células críticas do gradiente resultante sempre contêm as células detectadas durante o pré-processamento. Provaremos primeiro que o gradiente é alinhado com as direções crescentes de  $f$  nas partes regulares, o que provará já a validade do algoritmo completo. Depois estudaremos propriedades do núcleo, sem o pré-processamento. Em particular, provaremos que para superfícies subdivididas, o núcleo sozinho já constrói um gradiente discreto com as células críticas certas.

Antes do nosso trabalho sobre funções de Morse ótimas, (Babson & Hersh, 2005) propôs um primeiro esquema para construir funções de Morse discretas que requer uma ordenação prévia das células. Por alto, esta construção corresponde a considerar o peso de cancelamento de um par como sendo a menor imagem por  $f$  dos vértices do par. Mesmo que o objetivo difira da decomposição geométrica, as provas providenciadas naquele trabalho são mais gerais que as nossas, e usam ferramentas mais avançadas de combinatória que concluem de forma elegante o referido trabalho. Esperamos completar as provas a seguir de forma mais elegante, possivelmente usando (Babson & Hersh, 2005) como modelo.

### 5.3.1 Regularidade do gradiente

Considerando que  $K$  é simplicial, diremos que um passo do gradiente  $\langle \tau_0 \ \sigma_0 \ \tau_1 \rangle$  é *decrecente* se o valor de  $f$  no primeiro vértice (o único vértice de  $\sigma_0 \setminus \tau_1$ ) é maior que o valor de  $f$  no último vértice do passo do gradiente (o único vértice de  $\sigma_0 \setminus \tau_0$ ). Queremos primeiro provar que a função geométrica  $f$  é globalmente decrescente ao longo de cada caminho do gradiente. Conseguimos provar isso para os  $\mathcal{V}$ -caminhos *regulares*, ou seja, os caminhos do gradiente  $\langle \tau_0^{p\pm 1} \ \sigma_0^p \ \tau_1^{p\pm 1} \ \sigma_1^p \dots \sigma_{r-1}^p \ \tau_r^{p\pm 1} \rangle$  feitos apenas das linhas regulares da camada  $\mathcal{L}_{(p\pm 1)p}$  ou da camada  $\mathcal{L}_{p(p\pm 1)}$ . Esta condição é necessária, pois fora das partes regulares podem existir travas (figura 5.9). É suficiente para este caminho do gradiente ser regular em apenas uma destas camadas.

**Teorema 5.1** *Seja  $\mathcal{V}$  o gradiente discreto no complexo simplicial  $K$ , construído apenas pelo algoritmo 5.3 com a função geométrica  $f$ . Então o maior caminho do gradiente regular de  $\mathcal{V}$  tem comprimento 1.*

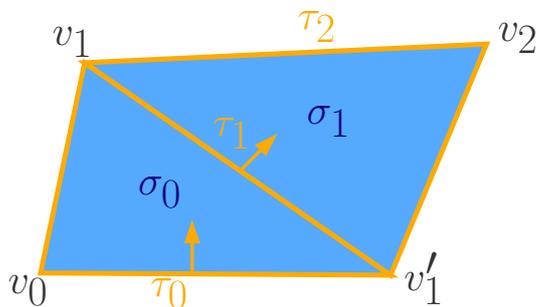


Figura 5.8: Notação para a prova: neste caso,  $\rho = \emptyset$ .

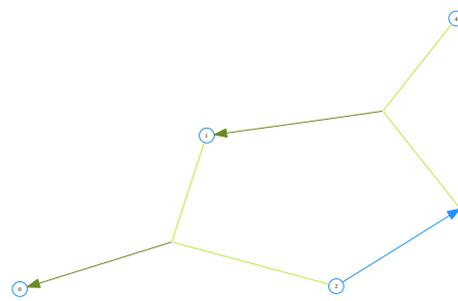


Figura 5.9: Trava: hiperlinha 012 não pode ser invertida.

*Prova.* A prova deste teorema funciona de forma análoga com caminhos do gradiente com células de dimensões  $p$  e  $(p + 1)$  ou  $p$  e  $(p - 1)$ , e vamos escrever

a prova para as dimensões  $p$  e  $(p - 1)$ . Considere um caminho do gradiente  $\mathcal{V} \blacktriangleleft \tau_0 \sigma_0 \tau_1 \sigma_1 \tau_2 \blacktriangleright$ ,  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$  sendo  $(p - 1)$ -células de  $K$  e  $\sigma_0, \sigma_1$  sendo linhas regulares de  $\mathcal{L}_{(p-1)p}$ . Sejam  $v_0$  e  $v_1$  os primeiro e último vértices de  $\blacktriangleleft \tau_0 \sigma_0 \tau_1 \blacktriangleright$ ,  $v'_1$  e  $v_2$  os primeiro e último vértices de  $\blacktriangleleft \tau_1 \sigma_1 \tau_2 \blacktriangleright$ , e  $\rho$  o  $(p - 3)$ -simplexo comum a  $\tau_0, \tau_1$  e  $\tau_2$  (figura 5.8). Observe que  $\rho$  pode ser vazio. Provaremos que ou  $f(v_0) > f(v_1)$  ou  $f(v_0) > f(v_2)$  e  $f(v_1) > f(v_2)$ . Definindo  $f$  em cada simplexo de  $K$  pela média de  $f$  em cada vértice:  $f(\sigma) = \text{média}(|\partial\sigma| \cap K^0)$ , do mesmo jeito que no algoritmo 5.3, temos:

$$\begin{aligned} f(\tau_0) &= \frac{p-3}{p-1}f(\rho) + \frac{1}{p-1}(f(v_0) + f(v'_1)) \\ f(\tau_1) &= \frac{p-3}{p-1}f(\rho) + \frac{1}{p-1}(f(v_1) + f(v'_1)) \\ f(\tau_2) &= \frac{p-3}{p-1}f(\rho) + \frac{1}{p-1}(f(v_1) + f(v_2)) \\ f(\sigma_0) &= \frac{p-3}{p}f(\rho) + \frac{1}{p}(f(v_0) + f(v_1) + f(v'_1)) \\ f(\sigma_1) &= \frac{p-3}{p}f(\rho) + \frac{1}{p}(f(v_2) + f(v_1) + f(v'_1)) \end{aligned}$$

A prova pode ser simplificada considerando os dois casos seguintes:

*caso 1:*  $(\tau_0, \sigma_0)$  ocorreu antes de  $(\tau_1, \sigma_1)$ . Sabemos da proposição 3.1 que os componentes regulares de uma hiperfloresta são árvores, mesmo sem a orientação. Como  $(\tau_0, \sigma_0)$  não cria ciclos, pois foram cancelados,  $(\tau_1, \sigma_0)$  não cria ciclos também. Então, como o cancelamento  $(\tau_1, \sigma_1)$  ocorreu antes do cancelamento  $(\tau_0, \sigma_0)$ , a célula  $\tau_1$  não era casada quando o cancelamento  $(\tau_0, \sigma_0)$  foi considerado. Isto implica que o cancelamento  $(\tau_1, \sigma_0)$  foi considerado depois do cancelamento  $(\tau_0, \sigma_0)$ :  $f(\sigma_0) - f(\tau_1) > f(\sigma_0) - f(\tau_0)$ , o que implica  $f(\tau_0) > f(\tau_1)$  e ainda  $f(v_0) > f(v_1)$ .

*caso 2:*  $(\tau_1, \sigma_1)$  ocorreu antes de  $(\tau_0, \sigma_0)$ . Com a mesma dedução,  $(\tau_1, \sigma_0)$  é um cancelamento válido que foi considerado depois de  $(\tau_1, \sigma_1)$ , e  $(\tau_2, \sigma_1)$  é um cancelamento válido que foi considerado depois de  $(\tau_1, \sigma_1)$ . Então  $f(\sigma_0) - f(\tau_1) > f(\sigma_1) - f(\tau_1)$  e  $f(\sigma_1) - f(\tau_2) > f(\sigma_1) - f(\tau_1)$ . A primeira desigualdade induz  $f(\sigma_0) > f(\sigma_1)$ , e ainda  $f(v_0) > f(v_2)$ . A segunda desigualdade induz  $f(\tau_1) > f(\tau_2)$ , e finalmente  $f(v_1) > f(v_2)$ .

Então, o caminho do gradiente  $\blacktriangleleft \tau_0 \sigma_0 \tau_1 \sigma_1 \tau_2 \blacktriangleright$  não pode ser crescente.  $\blacksquare$

Este teorema prova que de fato, o gradiente é globalmente decrescente com respeito a  $f$ , mesmo que um par em particular possa ser crescente.

### 5.3.2

#### Posicionamento dos mínimos

O teorema acima prova diretamente que os mínimos resultante do algoritmo 5.3 sempre correspondem aos mínimos na definição de Banchoff. A volta

é verdadeira se dois mínimos são suficientemente distantes um do outro, o que pode se conseguir por uma subdivisão baricêntrica.

**Teorema 5.2** *Seja  $\mathcal{V}$  o gradiente discreto no complexo simplicial  $K$ , construído apenas pelo algoritmo 5.3 com a função geométrica  $f$ . Então, os vértices críticos de  $\mathcal{V}$  são pontos críticos de mínimo para a definição de Banchoff. Além disso, se  $\mathcal{V}$  é o gradiente discreto construído pelo algoritmo 5.3 na primeira subdivisão baricêntrica  $K'$  de  $K$ , com a função geométrica  $f'$  correspondendo à subdivisão de  $f$ , então os mínimos de  $\mathcal{V}$  são exatamente os mínimos definidos por Banchoff.*

*Prova.* Primeiro repare que a subdivisão baricêntrica não afeta os pontos críticos de Banchoff, nem cria nenhum outro. Em particular, os pontos críticos sempre pertencem a  $K$ , e não a  $K' \setminus K$ . Primeiro, as arestas ao redor de um vértice crítico não podem ser todas casadas com faces, caso contrário criaria um ciclo. Já que a camada  $\mathcal{L}_{01}$  é um grafo regular, se o vértice  $v_2$  é crítico, qualquer passo crescente do gradiente  $\blacktriangleleft v_1 e v_2 \blacktriangleright$ , com  $e = (v_2 v_1)$ , teria sido revertido. Então, há apenas passos decrescentes ao redor de  $v_2$ , ou seja,  $v_2$  é um mínimo local de  $\mathcal{L}_{01}$ . Agora temos que provar que  $v_2$  é um mínimo em todo o seu elo, incluindo a parte em  $\mathcal{L}_{12}$ . Se não tiver nenhuma aresta incidente ao  $v_2$  casada com uma face, esta parte da prova está completa. Se a aresta  $e = (v_2 v_1)$  é casada com o triângulo  $t = (v_2 v_1 v_3)$ , então como o cancelamento  $(e, t)$  foi considerado antes de  $(v_2, e)$ , temos  $2f(v_1) > f(v_2) + f(v_3)$ . Se a aresta  $e' = (v_2 v_3)$  é casada com um triângulo  $t' = (v_2 v_3 v_4)$ , então estamos num caso parecido com o teorema 5.1, com  $v'_1 = v_1$ . Isto implica que  $v_3 > v_1$ , e então  $v_2 < v_1$ . Se a aresta  $e'$  é casada com  $v_3$ , senão  $v_3$  pertence a  $\mathcal{L}_{01}$  o que implicaria  $v_3 > v_2$ , o que implica  $v_2 < v_1$ . Por isso  $v_2$  é um mínimo local de  $K$ .

Agora, se  $v_2$  é um mínimo local, deve ser crítico para  $\mathcal{V}$  em  $K'$ . Caso contrário, teria uma aresta  $e = (v_2 v_1)$  casada com  $v_2$ , com  $f(v_2) < f(v_1)$ . O vértice  $v_1$  não pode ser crítico, pois o colapso  $(v_2, e)$  é considerado depois do colapso  $(v_1, e)$ . Então, há uma outra aresta  $(v_1 v_0)$  casada com  $v_1$ . Como  $f'$  é a subdivisão baricêntrica de  $f$ , temos  $f(v_1) < f(v_0)$ . Então,  $\blacktriangleleft v_2 e v_1 e' v_0 \blacktriangleright$  seria um caminho do gradiente crescente de comprimento maior que 1, contradizendo teorema 5.1. ■

Esta propriedade é válida para o mínimo de qualquer complexo simplicial. Porém, a subdivisão, ou de forma equivalente uma certa distância entre os mínimos, é necessária. As outras provas são restritas ao caso das superfícies, onde todas as camadas ou os seus duais são regulares.

### 5.3.3

#### Posicionamento dos máximos em superfícies

Para posicionar corretamente os mínimos, precisamos assegurar que dois mínimos sejam suficientemente longe um do outro na malha. O caso dos máximos é similar, mas precisamos do mesmo espaçamento entre pontos críticos que para a decomposição em alças (Rourke & Sanderson, 1972), ou seja, duas subdivisões baricêntricas.

**Proposição 5.3** *Seja  $\mathcal{V}$  o gradiente discreto no complexo celular  $K^n$ , segunda subdivisão baricêntrica de  $K$ , construído por apenas o algoritmo 5.3 com a função geométrica subdividida de  $f$ . Então, para cada máximo de Banchoff  $v$ , há um triângulo crítico  $\sigma$  na estrela de  $v$ . Além disso,  $\sigma$  é o triângulo subdividido de  $vwx$ , onde  $w$  é o vértice de  $\text{est}(v)$  com o maior valor,  $x$  e  $y$  sendo os vértices adjacentes a  $v$  e  $w$ , com  $f(x) > f(y)$ .*

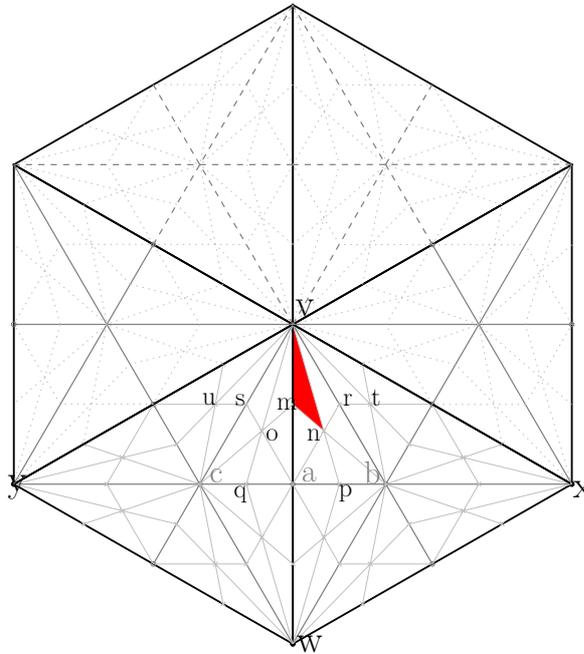


Figura 5.10: Segunda subdivisão baricêntrica perto de um ponto máximo:  $v$ ,  $w$ ,  $x$  e  $y$  são os vértices originais,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são gerados pela primeira subdivisão e os outros vértices marcados pela segunda subdivisão.

*Prova.* Como consideramos subdivisões baricêntricas de  $K$ , a prova é equivalente para complexos celulares convexos ou simpliciais. A ordenação  $f(v) > f(w) > f(x) > f(y)$  gera uma ordem parcial na segunda subdivisão baricêntrica, e depois gera uma ordem parcial  $P$  nos cancelamentos candidatos considerados pelo algoritmo 5.3. O objetivo agora é provar que esta ordem parcial garante que cada cancelamento envolvendo  $\sigma$  está inválido antes de ser considerado. Usaremos a notação da figura 5.10 para os vértices, e anotando cada célula pelos vértices que a geram.

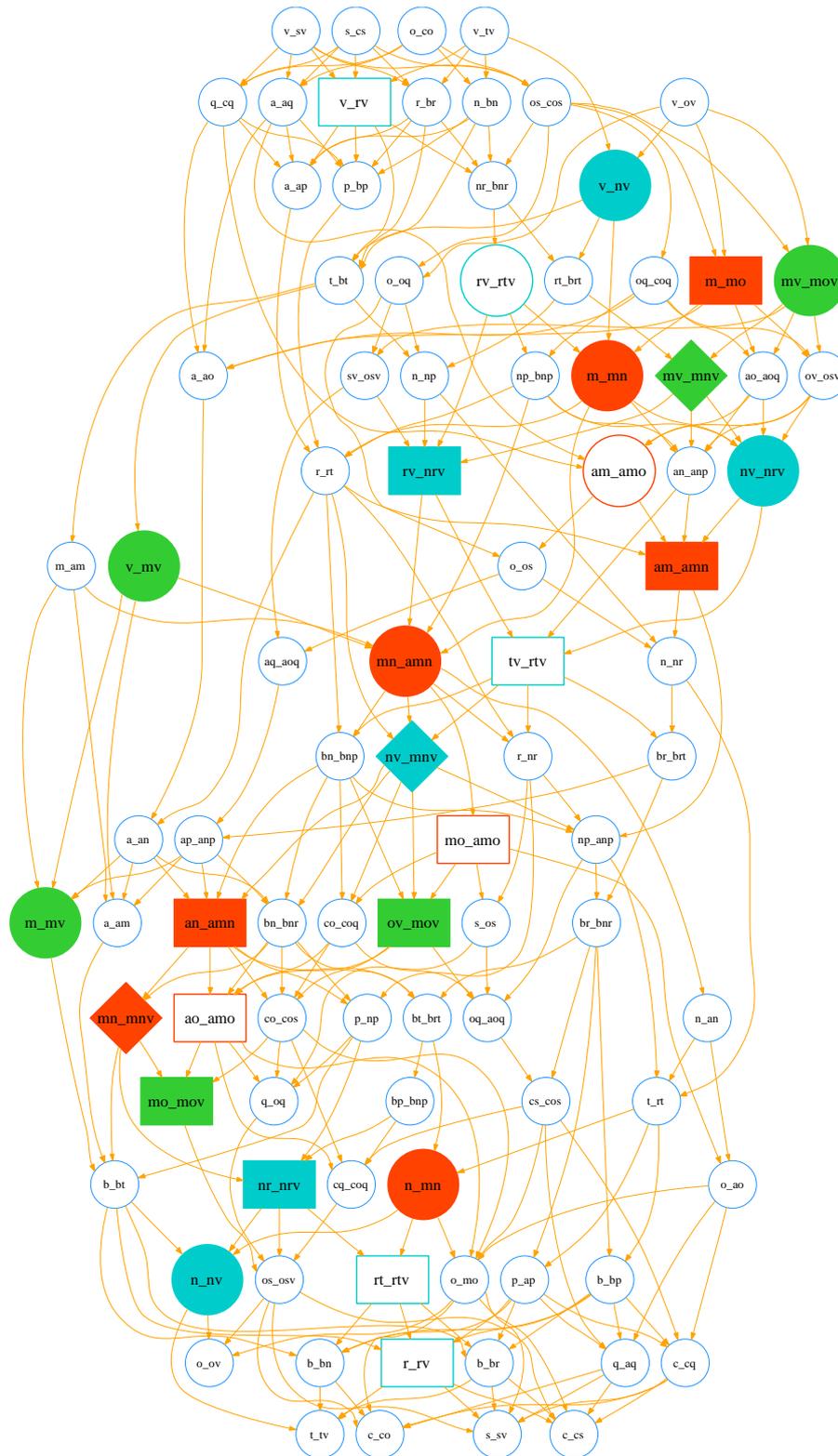


Figura 5.11: Ordem parcial gerada por  $f(v) > f(w) > f(x) > f(y)$  sobre os pares de células incidentes: os casamentos que impediriam  $mnv$  de ser crítico são marcados com losangos coloridos, os que invalidariam esses losangos são marcados com círculos da mesma cor, e os que invalidariam os círculos são marcados com retângulos.

O subconjunto da ordem parcial  $P$ , representada na figura 5.11, prova de fato o teorema: O triângulo  $mnv$  não pode ser casado para ser crítico. Poderia ser casado apenas com as três arestas que o bordam:  $mv$ ,  $mn$  ou  $nv$ . Primeiro, verificamos que  $v$  não é casado com nenhuma aresta problemática. Seja  $d$  o vértice com o menor valor na estrela de  $v$ , em particular  $d$  é ou ausente dos nomes da figura 5.10, ou igual a  $s$ ,  $t$ ,  $u$  ou  $o$ . Então,  $f((v < dv)) = f(dv) - f(v) \leq f(\xi v) - f(v) = f((v < \xi v))$ , para  $\xi$  diferente de  $s$ ,  $t$ ,  $u$  ou  $o$ .

$(mv < mnv)$ : O cancelamento de  $mv$  com  $mnv$  é considerado depois do cancelamento de  $mv$  com  $mov$ . Este cancelamento é considerado antes de  $(m < mv)$ ,  $(ov < mov)$  e  $(mo < mov)$  (figura 5.11). O único problema seria o cancelamento  $(v < mv)$ , mas já que  $m$  é diferente de  $s$ ,  $t$  e  $o$ , este cancelamento não ocorre, e mesmo que ocorresse, também invalidaria o cancelamento de  $mv$  com  $mnv$ .

$(mn < mnv)$ : O cancelamento de  $mn$  com  $mnv$  é considerado depois do cancelamento de  $mn$  com  $amn$ . Se  $(m < mn)$  fosse válido, também serviria, mas ele é a priori invalidado por  $(m < mo)$ . Então, o cancelamento  $(mn < amn)$  é considerado antes de  $(n < mn)$  e  $(an < amn)$  (figura 5.11). Os únicos problemas seriam  $(m < mn)$  e  $(am < amn)$ . Já que o primeiro ou resolve ou está invalidado, é portanto suficiente invalidar  $(am < amn)$  por  $(am < amo)$ . Isto ocorrerá, pois ele aparece primeiro e:  $(am < amo)$  é considerado antes de  $(ao < amo)$  e  $(mo < amo)$  está invalidado por  $(m < mo)$ .

$(nv < mnv)$ : Finalmente, o cancelamento de  $nv$  com  $mnv$  é considerado depois do cancelamento de  $nv$  com  $nrv$ . Este cancelamento é considerado antes de  $(nr < nrv)$  e  $(n < nv)$ . Então, o cancelamento  $(v < nv)$  não ocorre, e se ocorresse invalidaria também o cancelamento de  $nv$  com  $mnv$ . O único problema seria o cancelamento  $(rv < nrv)$ , mas ele está invalidado por  $(rv < rtv)$ , pois este ocorre antes de  $(r < rv)$ ,  $(rt < rtv)$  e  $(tv < rtv)$  e sabemos que  $v$  não será casado com  $rv$ .

■

Observe que podem existir outros triângulos críticos que apenas na estrela de um máximo de Banchoff. Porém, neste caso, teria também uma aresta crítica na estrela do maior ponto da estrela destes triângulos. Além disso, este caso ocorre usualmente quando a triangulação não é bem adaptada à função geométrica (figura 5.2).

**5.3.4**  
**Posicionamento das selas em superfícies**

A estratégia para posicionar as selas é bastante parecida, embora a prova seja um pouco mais difícil.

**Proposição 5.4** *Seja  $\mathcal{V}$  o gradiente discreto no complexo celular  $K$ , segunda subdivisão baricêntrica de  $K$ , construído por apenas o algoritmo 5.3 com a função geométrica subdividida de  $f$ . Então, para cada sela  $v$  de Banchoff, há uma aresta crítica  $\tau$  na estrela de  $v$ .*

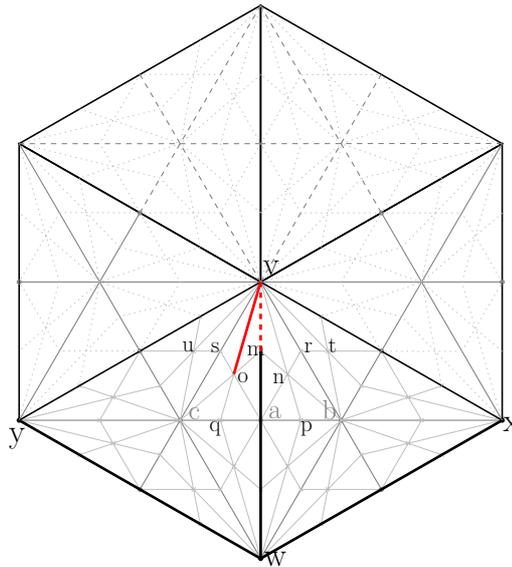


Figura 5.12: Segunda subdivisão baricêntrica perto de um ponto sela:  $v$ ,  $w$ ,  $x$  e  $y$  são os vértices originais,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são gerados pela primeira subdivisão e os outros vértices marcados pela segunda subdivisão.

*Prova.* A prova desta proposição é essencialmente a mesma que para a proposição 5.3, com a notação da figura 5.12. A ordenação aqui é diferente, pois  $w$  é mínimo local. Para conseguir uma ordem parcial suficientemente definida, consideramos 3 casos:  $f(v) > f(x) > f(y) > f(w)$ ,  $f(x) > f(v) > f(y) > f(w)$  e  $f(x) > f(y) > f(v) > f(w)$ . O último caso deve ser separado em dois sub-casos para poder identificar a aresta crítica, ou  $ov$  ou  $mv$ , dependendo se  $o$  ou  $m$  está mais baixo.

Como a prova é essencialmente a mesma, iremos mais rápido na descrição de cada caso. Primeiro, o vértice  $v$  será casado no outro componente da estrela inferior, e podemos então considerar qualquer cancelamento envolvendo  $v$  como inválido. Nos 3 primeiros casos, queremos provar que  $ov$  ficará crítico, enquanto no último será  $mv$ .

$$f(v) > f(x) > f(y) > f(w)$$

- $(o < ov)$ : este cancelamento está invalidado por  $(o < ao)$ ,  $(o < co)$  ou por  $(o < oq)$ , que é garantido, pois estes cancelamentos são considerados antes de, respectivamente,  $(c < co)$ ,  $(co < cos)$  e  $(co < coq)$ ;  $(q < oq)$ ,  $(oq < coq)$  e  $(oq < aoq)$ ;  $(a < ao)$ ,  $(ao < aoq)$  e  $(ao < aom)$  (figura 5.13).
- $(ov < osv)$ : este cancelamento está invalidado por  $(sv < osv)$ , que é garantido pois  $(v < sv)$  está invalidado e ele é considerado antes de  $(s < sv)$  e  $(sv < suv)$  (figura 5.13).
- $(ov < mov)$ : este cancelamento está invalidado por  $(mv < mov)$ , que é garantido pois  $(v < mv)$  está invalidado e ele é considerado antes de  $(m < mv)$  e  $(mv < mnv)$  (figura 5.13).

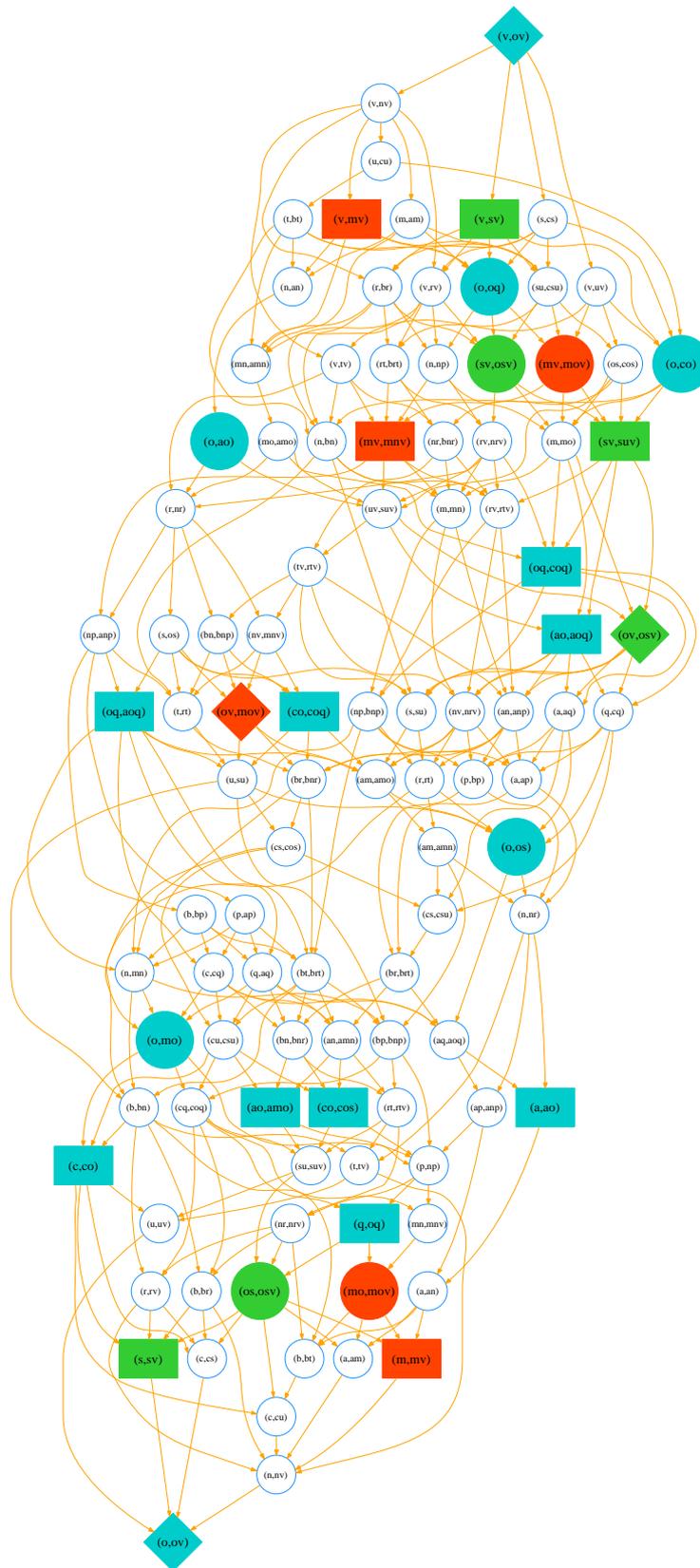


Figura 5.13: Ordem parcial gerada por  $f(v) > f(x) > f(y) > f(w)$  sobre os pares de células incidentes, marcando as relações com  $ov$ .

$f(x) > f(v) > f(y) > f(w)$  A prova é exatamente igual ao caso anterior, embora a ordem parcial seja diferente. Observe que  $(mv < mov)$  aparece antes de  $(ov < osv)$  pois há  $(uv < suv)$  entre eles, o que é difícil de ler na figura 5.14.

$f(x) > f(y) > f(v) > f(w)$  e  $f(m) > f(o)$  A prova é essencialmente a mesma, com a ordem parcial da figura 5.15. A única dificuldade é ver que  $f(osv) - f(os) < f(sv) - f(s)$ . Isto pode ser provado como segue:  $f(sv) - f(s) - (f(osv) + f(os)) = \frac{1}{2}f(s+v) - s - \frac{1}{3}f(o+s+v) + \frac{1}{2}f(o+s) = \frac{1}{6}f(o+v-2s)$ . Decompondo sobre  $x, y, v$  e  $w$ , obtemos  $216f(o) = 132f(v) + 60f(w) + 24f(y)$ ,  $216f(s) = 144f(v) + 36f(w) + 36f(y)$  e  $216f(m) = 162f(v) + 54f(w)$ . Então,  $\frac{216}{6}f(o+v-2s) = \frac{216}{6}f(60v-12w-48y) = \frac{1}{3}f(m-o) > 0$ .

$f(x) > f(y) > f(v) > f(w)$  e  $f(o) > f(m)$

$(m < mv)$ : este cancelamento está invalidado por  $(m < am)$ , que é garantido pois é considerado antes de  $(a < am)$ ,  $(am < amo)$  e  $(am < amn)$  (figura 5.16).

$(mv < mnv)$ : este cancelamento está invalidado por  $(nv < mnv)$ , que é garantido pois é considerado antes de  $(nv < nrv)$ , e  $(n < nv)$  está invalidado por  $(n < an)$ , que aparece antes de  $(a < an)$ ,  $(an < amn)$  e  $(an < anp)$  (figura 5.16).

$(mv < mov)$ : este cancelamento está invalidado por  $(ov < mov)$ , que aparece antes pois  $f(m) > f(o)$ . O cancelamento  $(ov < mov)$  é garantido pois aparece antes de  $(ov < osv)$ , e que por sua vez  $(o < ov)$  está invalidado por  $(o < ao)$ , que aparece antes de  $(a < ao)$ ,  $(ao < amo)$  e  $(ao < aoq)$ .

■

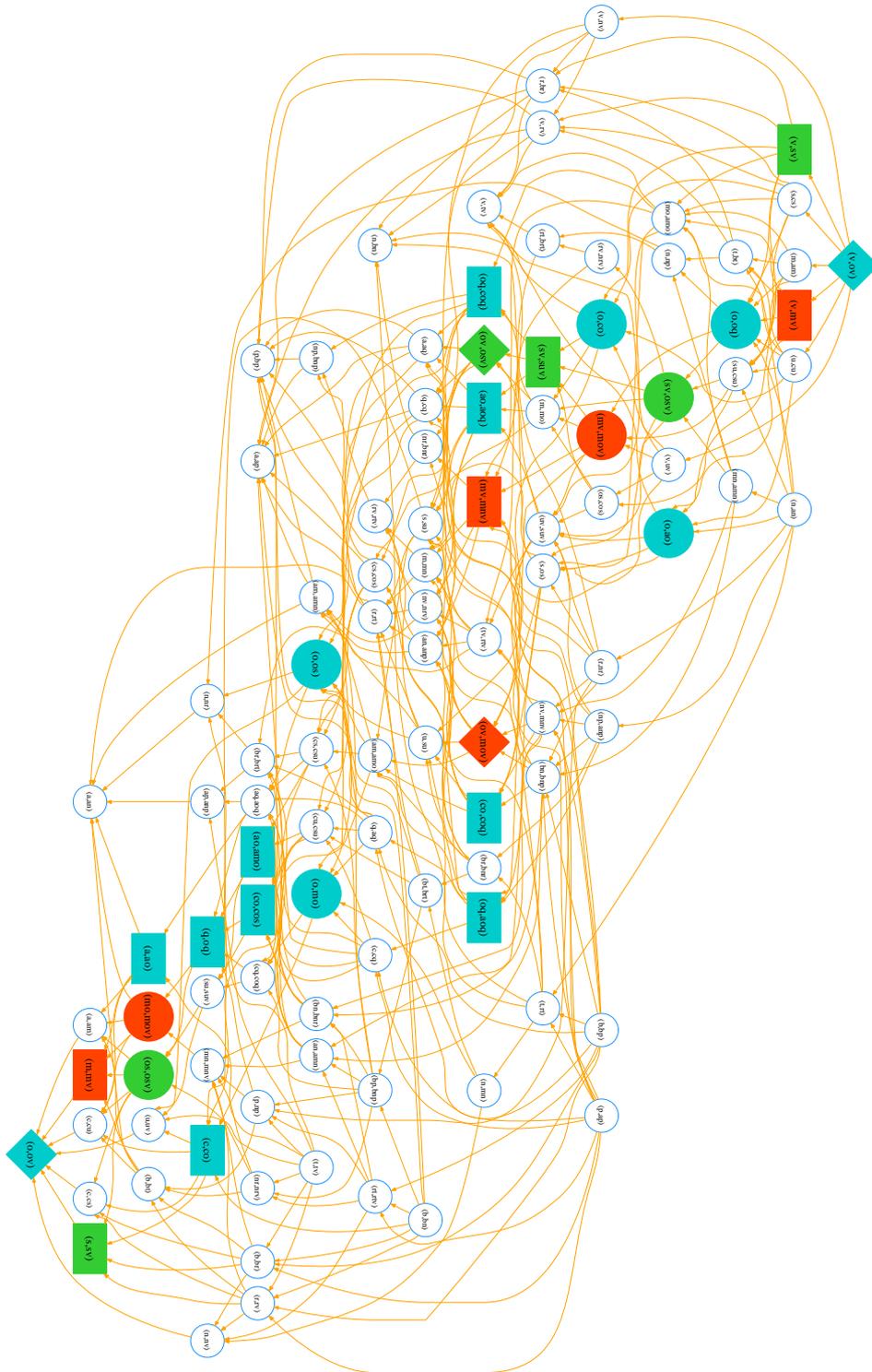


Figura 5.14: Ordem parcial gerada por  $f(x) > f(v) > f(y) > f(w)$  sobre os pares de células incidentes, marcando as relações com  $ov$ .

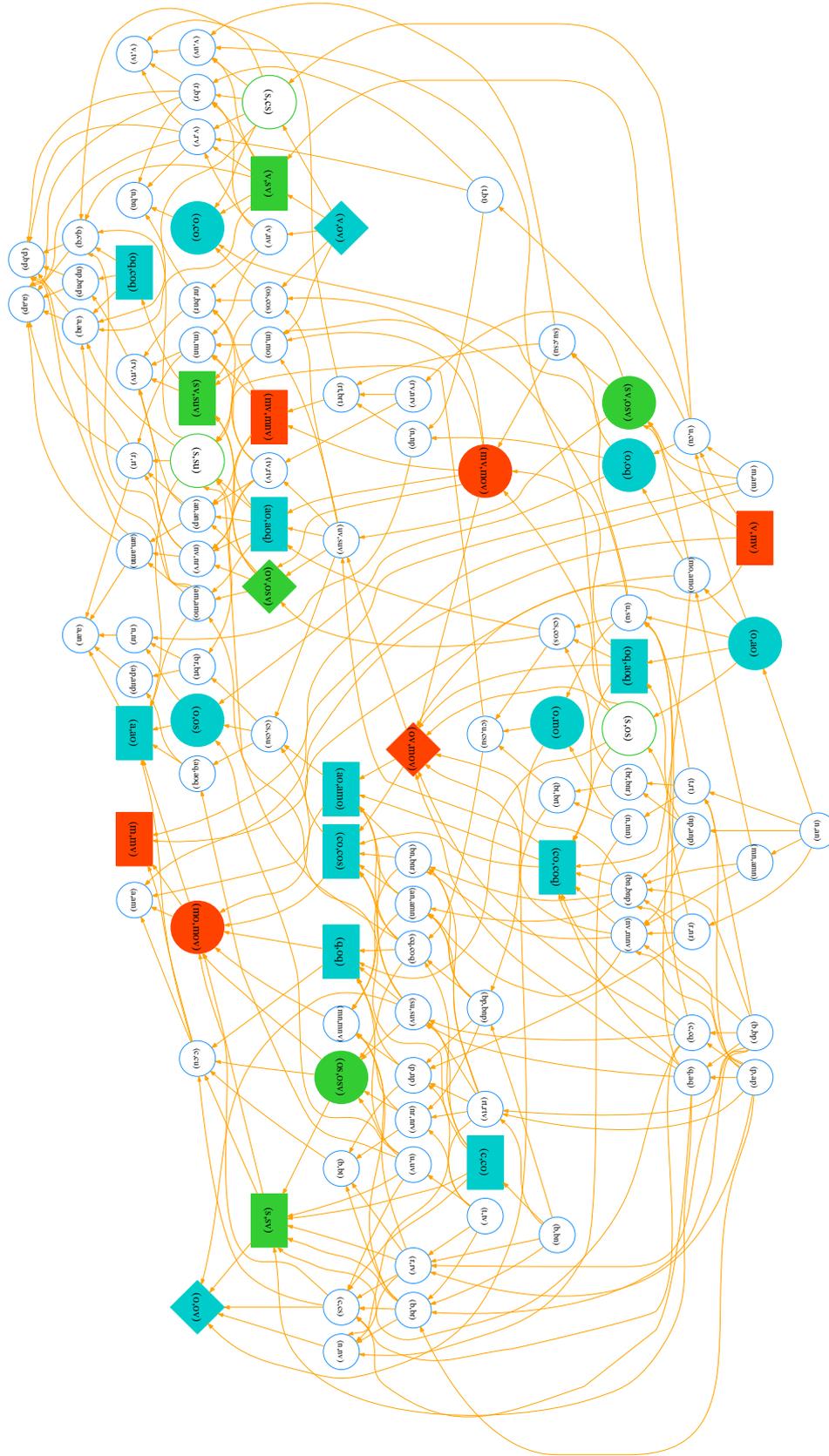


Figura 5.15: Ordem parcial gerada por  $f(x) > f(y) > f(v) > f(w)$  e  $f(m) > f(o)$  sobre os pares de células incidentes, marcando as relações com  $ov$ .

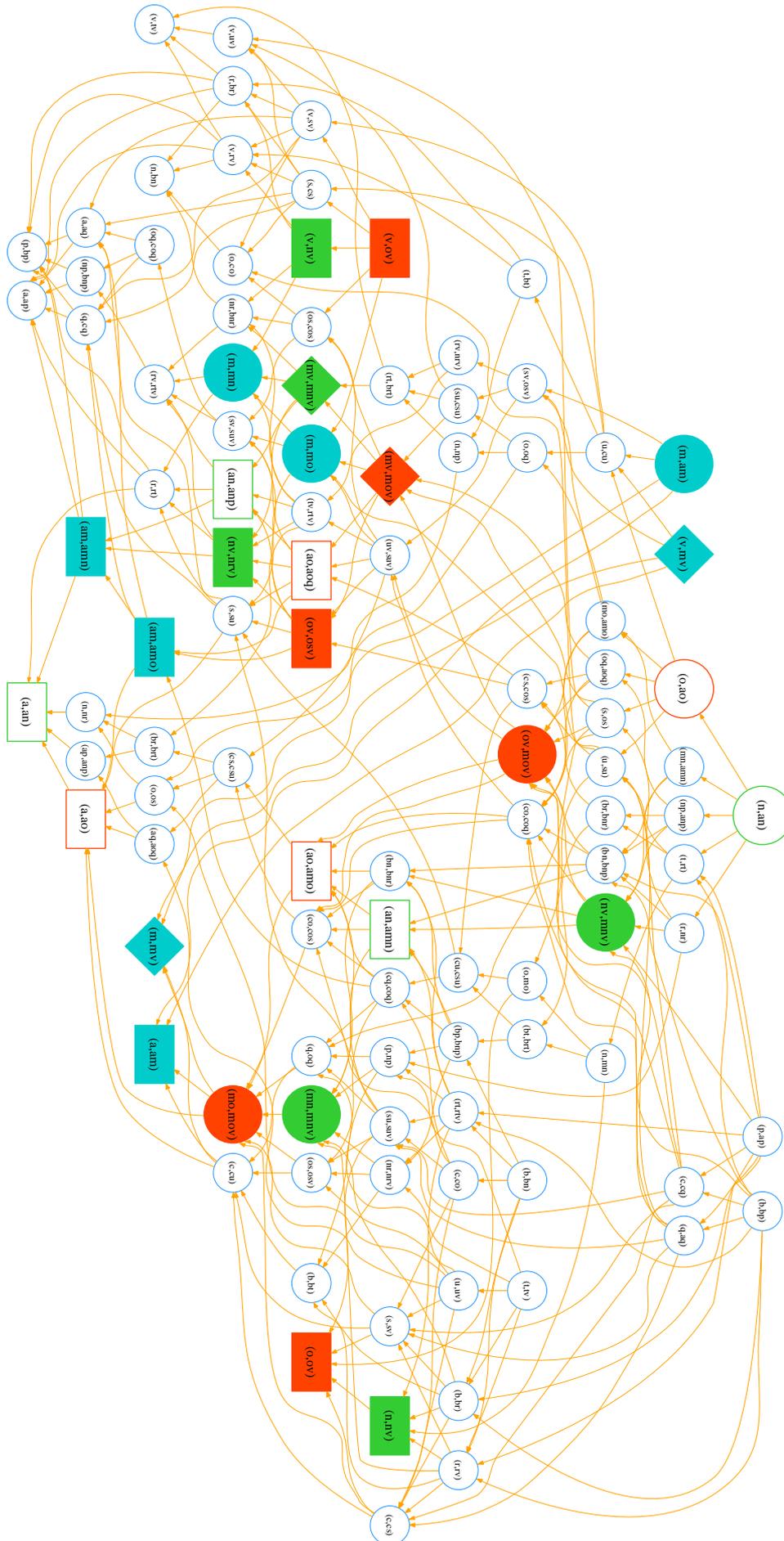


Figura 5.16: Ordem parcial gerada por  $f(x) > f(y) > f(v) > f(w)$  e  $f(o) > f(m)$  sobre os pares de células incidentes, marcando as relações com  $mv$ .

## 5.4 Resultados e aplicações

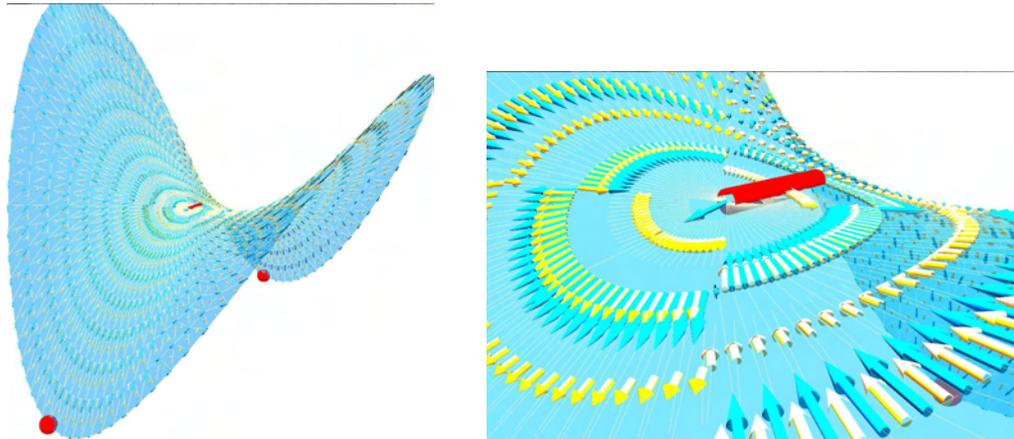


Figura 5.17: O resultado do algoritmo guloso só numa sela.

A construção do algoritmo 5.3 é então eficiente, pois não requer detecção de ponto crítico algum e usualmente retorna os resultados esperados (figura 5.17). Para superfícies, é possível garantir que cada ponto crítico de Banchoff gera uma célula crítica. Também é possível detectar apenas os mínimos e os máximos, o que é a parte mais fácil de se detectar. As desigualdades de Morse depois garantem o número de selas. Além disso, é possível acelerar o algoritmo 3.5 dividindo a fila de prioridade. Em particular, considerando apenas cancelamentos com peso negativo assegura que todas as células críticas são preservadas. A busca para células críticas pode então ser restrita às células não casadas.

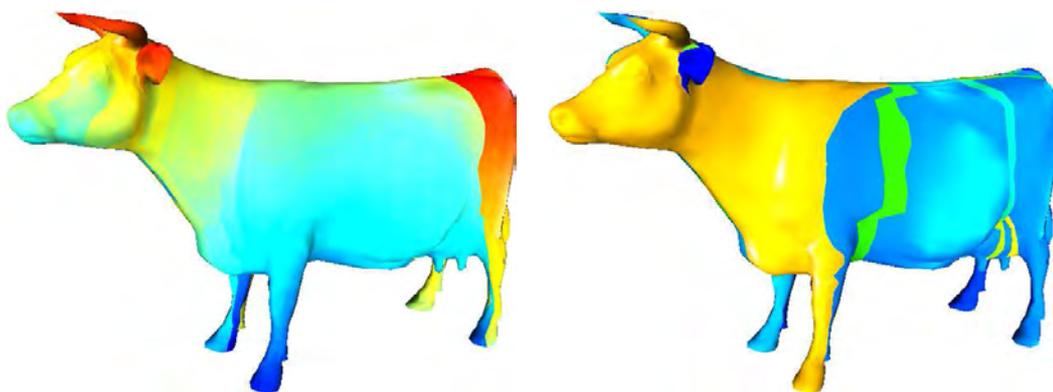
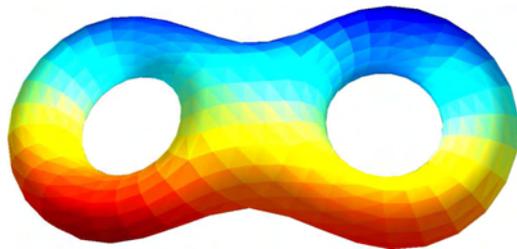


Figura 5.18: O complexo de Morse-Smale gerado pela função altura num modelo de vaca.

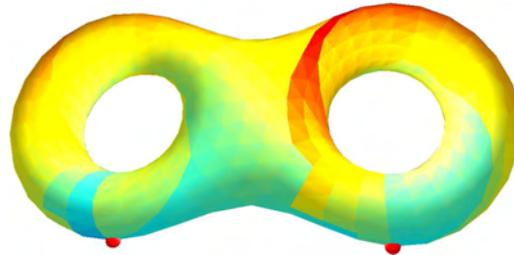
Na maioria dos casos práticos, o algoritmo central 5.3 gera a decomposição requisitada (figura 5.19). Com ruído, a definição de Banchoff para

pontos críticos pode até gerar demais pontos críticos (figura 5.18), o que pode ser resolvido por cancelamentos não locais (algoritmo 5.4).

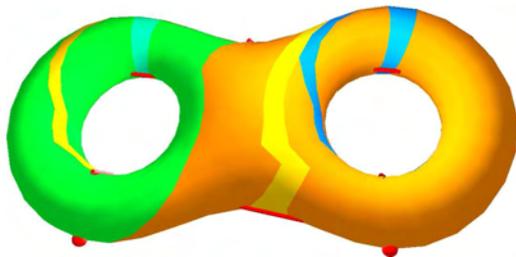
### 5.4.1 Grafos de Reeb



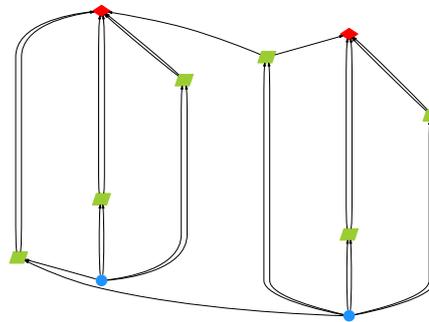
5.19(a): Função geométrica.



5.19(b): Função de Morse discreta.



5.19(c): Decomposição de Morse-Smale.



5.19(d): Diagrama de Morse-Smale.

Figura 5.19: O complexo de Morse-Smale gerado pela função altura  $x + \frac{1}{100}y$  num modelo de toro duplo.

O *grafo de Reeb* (também chamado de *grafo de contorno*) de um objeto geométrico  $\mathcal{M}$  com uma função de Morse discreta  $f$  definida nele é um subconjunto de  $\mathcal{M}$  onde dois pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são identificados se tiver o mesmo valor por  $f: f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ , e se pertencer ao mesmo componente conexo de  $f^{-1}(f(\mathbf{x}))$ . Georges Reeb usou primeiro estes diagramas para provar que se uma variedade admite uma função de Morse com apenas dois pontos críticos, então é uma esfera. Este teorema é também válido no mundo discreto (Forman, 1995).

Já que as ligações no grafo de Reeb correspondem aos pontos críticos de  $f$ , podemos calcular o grafo de Reeb diretamente a partir da nossa decomposição de Morse-Smale. Isto pode ser feito de forma eficiente com uma só operação de grafos (figura 5.20). Esta operação retira da decomposição de Morse-Smale a informação não contida no grafo de Reeb. Considere duas selas  $s_1$  e  $s_2$ ,  $f(s_1) < f(s_2)$ , incidentes, no complexo de Morse, aos mínimos  $v_1$  e  $v_2$  para  $s_1$ , e  $v_2$  e  $v_3$  para  $s_2$ . O grafo de Reeb apenas marca que  $s_2$  é incidente a  $s_1$  e  $v_3$ , e não diferencia se  $s_2$  é incidente a  $v_1$  ou  $v_2$ . O processo retira a linha  $s_2v_2$

do diagrama de Morse–Smale e acrescenta a linha  $s_2s_1$  para obter o grafo de Reeb, uma técnica parecida com (Lazarus & Verroust, 1999). O único ponto delicado, como sempre, são os laços, mas estes são detectados desde o princípio do algoritmo. A eficiência do nosso algoritmo torna este resultado uma melhoria significativa de (Carr *et al.*, 2000) e (Cole–McLaughlin *et al.*, 2003).

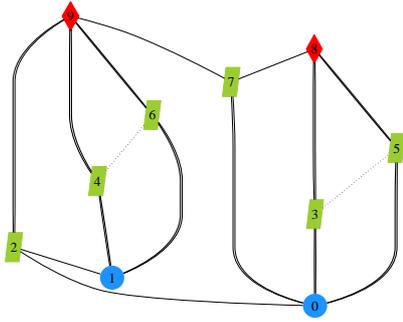
As primeiras idéias deste processo vieram de uma discussão com Francis Lazarus em Poitiers, em 14 de Fevereiro de 2003.

### 5.4.2

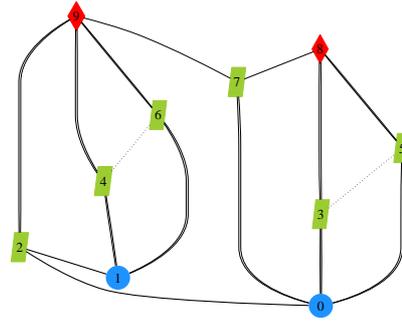
#### Persistência

A persistência é um conceito que saiu primeiramente dos trabalhos de Smale (Smale, 1961). Smale a usou como estratégia para cancelar pontos críticos em variedades de grande dimensão. No caso das esferas homotópicas, os cancelamentos sempre chegavam a uma configuração mínima, provando a conjectura de Poincaré para dimensões maiores ou iguais a 5 como um caso particular do teorema do *h-cobordismo*. Mais recentemente, (Edelsbrunner *et al.*, 2000) rebatizou-se esta técnica de “persistência”, e a deduziu do cálculo incremental dos números de Betti em  $\mathbb{Z}_2$  para sub-triangulações de  $S^3$  (Delfinado & Edelsbrunner, 1993). A definição da persistência de (Edelsbrunner *et al.*, 2000) não envolve teoria de Morse, embora seja baseada numa certa filtração diretamente inspirada de conceitos da teoria de Morse. Recentemente foi definida com mais rigor em (Cohen–Steiner *et al.*, 2005), provando uma certa estabilidade com respeito ao ruído.

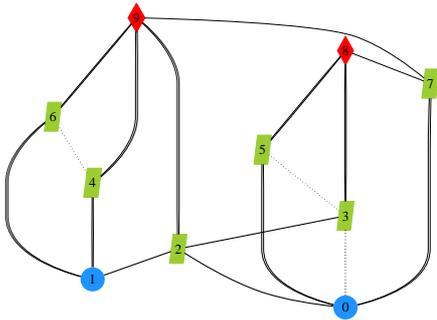
A persistência é essencialmente a diferença de altura  $f(\sigma) - f(\tau)$  entre pares de células críticas  $(\tau, \sigma)$ , quando forem cancelados estes pares da menor para a maior persistência (figura 5.21). A persistência pode então ser diretamente lida na decomposição de Morse–Smale, efetuando cancelamentos apenas no complexo de Morse. Este cálculo é mais eficiente que o cálculo original, pois o complexo de Morse tem geralmente bem menos células.



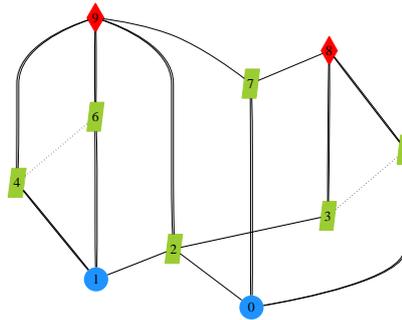
5.20(a): Há dois laços feitos de arestas duplas. As diagonais deles são marcadas.



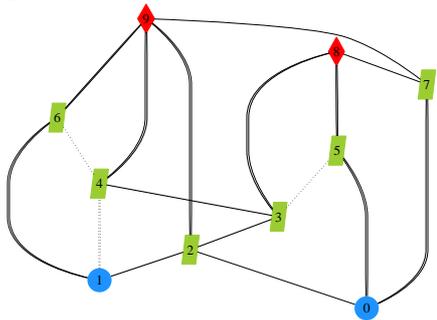
5.20(b): Primeira rotação  $0 \rightarrow 2$  com  $0 \Rightarrow 3$ .



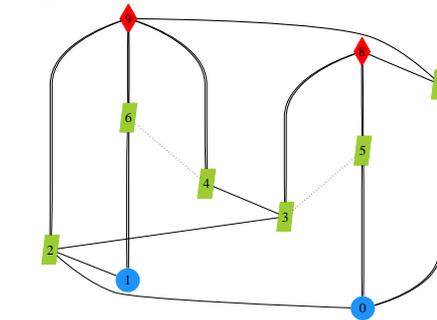
5.20(c): Rotação substituiu  $0 \Rightarrow 3$  por  $2 \rightarrow 3$ .



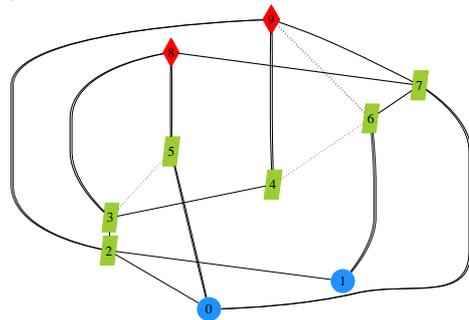
5.20(d): Segunda rotação  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  com  $1 \Rightarrow 4$ .



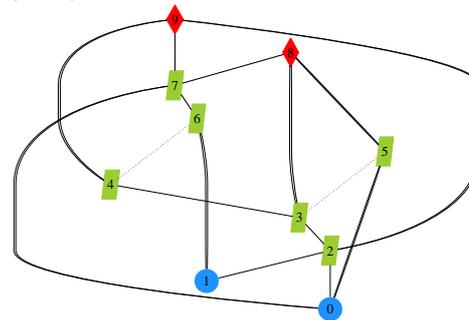
5.20(e): Rotação substituiu  $1 \Rightarrow 4$  por  $3 \rightarrow 4$ .



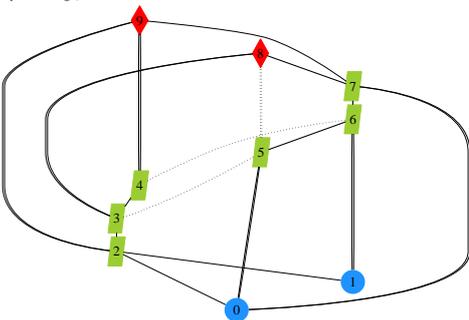
5.20(f): Terceira rotação  $9 \leftarrow 7$  com  $9 \Leftarrow 6$ .



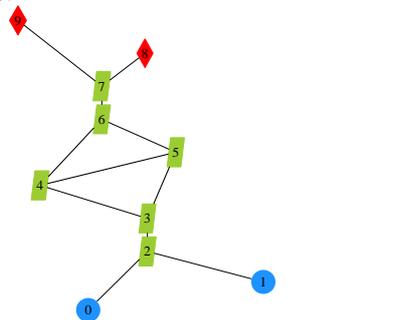
5.20(g): Rotação substituiu  $9 \Leftarrow 6$  por  $7 \leftarrow 6$ .



5.20(h): Quarta rotação  $8 \leftarrow 7 \leftarrow 6$  com  $8 \Leftarrow 5$ .

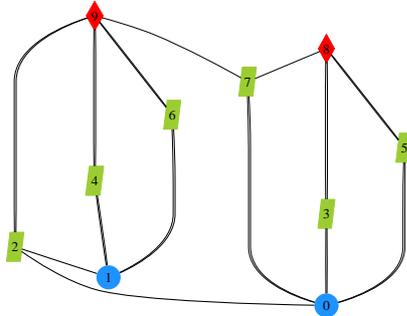


5.20(i): Rotação substituiu  $8 \Leftarrow 5$  por  $6 \leftarrow 5$ .

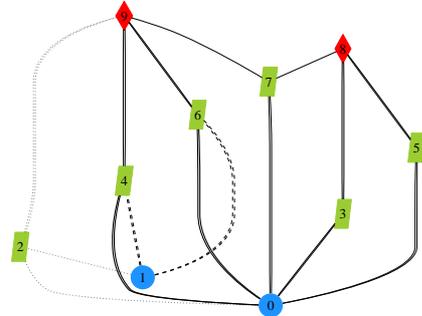


5.20(j): Há 4 possibilidades para  $0 \Rightarrow 5$ ,  $1 \Rightarrow 6$ ,  $8 \Leftarrow 5$  e  $9 \Leftarrow 4$  dando  $4 \rightarrow 5$ .

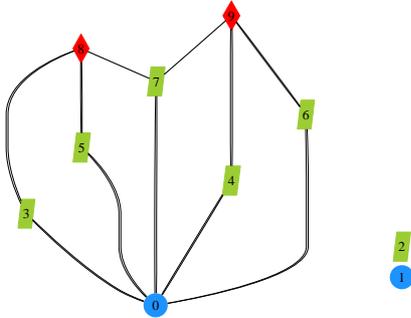
Figura 5.20: Transformação do diagrama de Morse–Smale no grafo de Reeb.



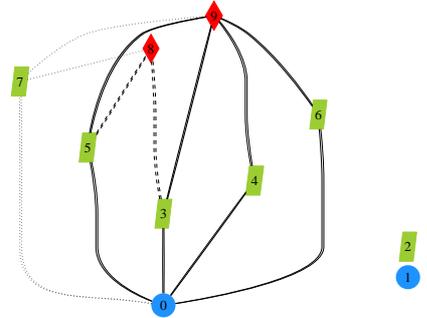
5.21(a): Complexo original da figura 5.19: primeiro cancelamento (1, 2).



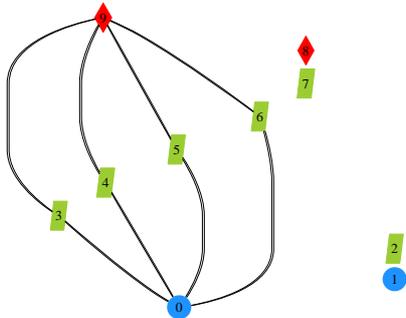
5.21(b): Cancelamento move as arestas do vértice 1 para o vértice 2, pois é primal.



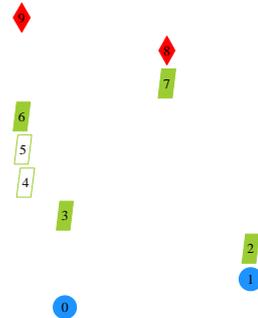
5.21(c): Segundo cancelamento (7, 8).



5.21(d): Cancelamento move as arestas da face 8 para a face 9, pois é dual.



5.21(e): Não há mais cancelamento válido.



5.21(f): A persistência é calculada pelos cancelamentos válidos  $f(2) - f(1)$  e  $f(8) - f(7)$  e pelos pares mínimos  $f(3) - f(0)$  e  $f(9) - f(6)$ .

Figura 5.21: Computação da persistência a partir do complexo de Morse–Smale.

## 6

### Conclusões e trabalhos futuros

Esta tese apresentou alguns novos métodos em topologia computacional e modelagem geométrica. A partir das estruturas combinatórias que tínhamos desenvolvido em (Lewiner, 2002), formalizamos o cálculo do fluxo em ambas as direções, teórica e algorítmica. O cálculo do fluxo nos hipergrafos de camadas de uma função de Morse discreta chegou a formulações concisas e algoritmos eficientes. Em particular, relacionou um complexo celular e um gradiente discreto definido nele com o complexo de Morse nas duas direções. De um lado, esta correspondência permite o cálculo direto da homologia, incluindo a torção num anel qualquer, base de geradores e decomposições de ciclos. Os algoritmos dedicados a esses cálculos são mais gerais e tão eficientes quanto os métodos anteriores. Do outro lado, este complexo de Morse restaura o vínculo entre a geometria e a topologia no mundo discreto. A partir da decomposição de Morse–Smale estabelecemos uma definição rigorosa e construtiva de uma função de Morse discreta correspondendo à amostragem de uma função suave com a mesma decomposição de Smale. Esta construção foi provada e aplicada para casos práticos de cálculo da persistência e dos grafos de Reeb.

O formato deste trabalho tenta colocar em primeiro plano as relações entre noções abstratas do mundo diferencial e o cálculo algorítmico concreto dessas noções. Como de rigor em matemática discreta, noções do mundo contínuo têm propriedades que não são diretamente compatíveis com o mundo discreto. Em particular para a teoria de Morse, as propriedades topológicas e geométricas envolvidas são difíceis de se definir rigorosamente no mundo discreto. Os trabalhos do Forman fornecem uma teoria completa e extensa que garante as propriedades topológicas da teoria de Morse, o que é o ponto essencial. A teoria não precisa explicitamente das propriedades geométricas, mas são necessárias nos casos práticos. Nesta perspectiva, este trabalho poderia ilustrar os benefícios de senhoras teorias para aplicações concretas, pois o rigor da teoria de Forman conseguiu aplicações mais eficientes e gerais do que as aproximações anteriores, pouco matemáticas, da teoria de Morse.

Numa outra perspectiva, este trabalho abriu muitas perguntas do ponto de vista teórico, e a maioria delas ainda não foram resolvidas. Em particular, a

relação da nossa decomposição com a co-homologia ainda não está tão clara, já que a co-homologia de Spanier não vive no mesmo espaço e que a maioria das outras co-homologias não vivem na mesma dimensão. A prova combinatória da nossa construção do complexo de Morse geométrico parece se generalizar para dimensões quaisquer, e para casos regulares. Porém, a prova em si é fastidiosa e a sua generalização requereria mais ferramentas da combinatória. Espero que este trabalho gere mais intercâmbios entre a teoria e a prática, assim como entre a matemática pura e a matemática aplicada.

## Referências Bibliográficas

- [Alliez & Desbrun, 2001] ALLIEZ, P.; DESBRUN, M.. **Valence-driven connectivity encoding of 3D meshes**. In: COMPUTER GRAPHICS FORUM, p. 480–489, 2001. 3.2.5
- [Babson & Hersh, 2005] BABSON, E.; HERSH, P.. **Discrete Morse functions from lexicographic orders**. Transactions of the American Mathematical Society, 357:509–534, 2005. 5.3
- [Banchoff, 1967] BANCHOFF, T.. **Critical points and curvature for embedded polyhedra**. Journal of Differential Geometry, 1:257–268, 1967. 5, 5.1, 5.1.1
- [Berge, 1970] BERGE, C.. **Graphes et hypergraphes**. Dunod, Paris, 1970. 3.1.2, 3.1.2, 3.1.2, 3.2
- [do Carmo, 1976] DO CARMO, M.. **Differential geometry of curves and surfaces**. Prentice Hall, 1976. 2.1, 2.2.1
- [Carr *et al.*, 2000] CARR, H.; SNOEYINK, J. ; AXEN, U.. **Computing contour trees in all dimensions**. Computational Geometry: Theory and Applications, 24:75–94, 2000. 5.4.1
- [Cohen, 1973] COHEN, M. M.. **A course in simple homotopy theory**. Graduate text in Mathematics. Springer, New York, 1973. 2.5, 2.5.2
- [Cohen–Steiner *et al.*, 2005] COHEN–STEINER, D.; EDELSBRUNNER, H. ; HARER, J. L.. **Stability of Persistence Diagrams**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 263–271. ACM, 2005. 5.4.2
- [Cole–McLaughlin *et al.*, 2003] COLE–MCLAUGHLIN, K.; EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. L.; NATARAJAN, V. ; PASCUCCI, V.. **Loops in reeb graphs of 2-manifolds**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 344–350. ACM, 2003. 5.4.1
- [Cooke & Finney, 1967] COOKE, G. E.; FINNEY, R. L.. **Homology of cell complexes**. Princeton University Press, 1967. 2.1.2, 2.1.2, 2.5.2

- [Crowley *et al.*, 2005] CROWLEY, K.; EBIN, A.; KAHN, H.; REYFMAN, P.; WHITE, J. ; XUE, M.. **Collapsing a simplex to a noncollapsible subcomplex**. St. Olaf College and Columbia University, 2005. 2.5.2
- [Delfinado & Edelsbrunner, 1993] DELFINADO, C. J. A.; EDELSBRUNNER, H.. **An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 232–239. ACM, 1993. 4, 5.4.2
- [Dey & Guha, 1998] DEY, T. K.; GUHA, S.. **Computing homology groups of simplicial complexes in  $\mathbb{R}^3$** . Journal of ACM, 45(2):266–287, 1998. 4
- [Dumas *et al.*, 2003] DUMAS, J.-G.; HECKENBACH, F.; SAUNDERS, B. D. ; WELKER, V.. **Computing simplicial homology based on efficient smith normal form algorithms**. In: Joswig, M.; Takayama, N., editors, ALGEBRA, GEOMETRY, AND SOFTWARE SYSTEMS, p. 177–206. Springer, 2003. 4, 4.1
- [Edelsbrunner *et al.*, 2000] EDELSBRUNNER, H.; LETSCHER, D. ; ZOMORODIAN, A.. **Topological persistence and simplification**. In: SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, p. 454–463, 2000. 5.4.2
- [Edelsbrunner *et al.*, 2001] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. L. ; ZOMORODIAN, A.. **Hierarchical Morse complexes for piecewise linear 2-manifolds**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 70–79. ACM, 2001. 5
- [Edelsbrunner *et al.*, 2003] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. L.; NATARAJAN, V. ; PASCUCCI, V.. **Morse–Smale complexes for piecewise linear 3-manifolds**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 361–370. ACM, 2003. 5
- [Fomenko, 1987] FOMENKO, A. T.. **Differential geometry and topology**. Contemporary Soviet Mathematics. Kluwer, 1987. 2, 2.5.1, 2.6.1
- [Forman, 1995] FORMAN, R.. **A discrete Morse theory for cell complexes**. In: Yau, S. T., editor, GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS FOR RAOUL BOTT. International Press, 1995. 1, 1.1, 1.1, 2, 2.2.2, 2.3.2, 2.4.2, 2.5.2, 2.6.2, 2.7.2, 2.7.2, 2.8.2, 3.1.1, 3.3.1, 5.2, 5.4.1
- [Forman, 1998] FORMAN, R.. **combinatorial vector fields and dynamical systems**. Mathematische Zeitschrift, 228(4):629–681, 1998. 1.1

- [Forman, 2002] FORMAN, R.. **Discrete morse theory and the cohomology ring**. Transactions of the American Mathematical Society, 354:5063–5085, 2002. 1.1, 2.7.2
- [Hachimori Models] HACHIMORI, M.. **Simplicial complex library**. in-foshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi. 3.2.3, 4.10
- [Hatcher, 2002] HATCHER, A.. **Algebraic topology**. Cambridge University Press, 2002. 2, 2.1, 2.1.2, 2.5.1, 2.5.2
- [Joswig & Pfetsch, 2005] JOSWIG, M.; PFETSCH, M.. **Computing optimal discrete Morse functions**. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 17:191–195, 2005. 3.2.3
- [Kälberer *et al.*, 2005] KÄLBERER, F.; POLTHIER, K.; REITEBUCH, U. ; WARDETZKY, M.. **Freelence — coding with free valences**. In: EUROGRAPHICS, 2005. 3.2.5
- [Lazarus & Verroust, 1999] LAZARUS, F.; VERROUST, A.. **Level Set Diagrams of Polyhedral Objects**. In: SOLID MODELING AND APPLICATIONS, p. 130–140. ACM, 1999. 5.4.1
- [Lewiner, 2002] LEWINER, T.. **Construção de funções de Morse discretas**. dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC–Rio, 2002. 1.1, 1.2, 2.4.2, 2.6, 3, 3, 3.1.1, 3.1.3, 3.2, 3.2.3, 3.2.4, 5.2.5, 6
- [Lewiner *et al.*, 2003b] LEWINER, T.; LOPES, H. ; TAVARES, G.. **Towards optimality in discrete Morse theory**. Experimental Mathematics, 12(3):271–285, 2003. 1.1, 3, 3.2, 3.2.3
- [Lewiner *et al.*, 2003a] LEWINER, T.; LOPES, H. ; TAVARES, G.. **Optimal discrete Morse functions for 2–manifolds**. Computational Geometry: Theory and Applications, 26(3):221–233, 2003. 3.2.3, 3.2.5
- [Lewiner *et al.*, 2004] LEWINER, T.; LOPES, H. ; TAVARES, G.. **Applications of Forman’s discrete Morse theory to topology visualization and mesh compression**. Transactions on Visualization and Computer Graphics, 10(5):499–508, 2004. 3, 3.2, 3.2.5
- [Lewiner *et al.*, 2004] LEWINER, T.; LOPES, H.; ROSSIGNAC, J. ; VIEIRA, A. W.. **Efficient Edgebreaker for surfaces of arbitrary topology**. In: SIBGRAPI, p. 218–225, Curitiba, Oct. 2004. IEEE. 3.2.5

- [Lopes *et al.*, 2002] LOPES, H.; ROSSIGNAC, J.; SAFONOVA, A.; SZYMCZAK, A.; TAVARES, G.. **Edgebreaker: a simple compression for surfaces with handles**. In: Hoffman, C.; Bronsvort, W., editors, SOLID MODELING AND APPLICATIONS, p. 289–296, Saarbrücken, Germany, 2002. ACM. 3.2.5
- [Lovasz & Plummer, 1986] LOVÁSZ, L.; PLUMMER, M. D.. **Matching theory**. Van Nostrand Reinhold, Amsterdam, 1986. 3.2
- [Milnor, 1963] MILNOR, J. W.. **Morse theory**. Número 51 em Annals of Mathematics Study. Princeton University Press, 1963. 2, 2.3.1, 2.4.1
- [Morse, 1925] MORSE, M.. **Relations between the critical points of a real function of  $n$  independent variables**. Transactions of the American Mathematical Society, 27:345–396, 1925. 1
- [Palis & de Melo, 1982] PALIS, J.; DE MELO, W.. **Geometric theory of dynamical systems: an introduction**. Springer, New York, 1982. 2.8.1
- [Rossignac, 1999] ROSSIGNAC, J.. **Edgebreaker: connectivity compression for triangle meshes**. Transactions on Visualization and Computer Graphics, 5(1):47–61, 1999. 3.2.5
- [Rourke & Sanderson, 1972] ROURKE, C. P.; SANDERSON, B. J.. **Introduction to piecewise-linear topology**. Springer, New York, 1972. 2.1.2, 2.5.2, 5.3.3
- [Smale, 1960] SMALE, S.. **On dynamical systems**. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 5(2):195–198, 1960. 1, 2.8.1
- [Smale, 1961] SMALE, S.. **Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four**. Annals of Mathematics, 74:391–406, 1961. 5.4.2
- [Szymczak & Rossignac, 2000] SZYMCZAK, A.; ROSSIGNAC, J.. **Grow & Fold: compressing the connectivity of tetrahedral meshes**. Computer-Aided Design, 32(8/9):527–538, 2000. 3.2.5
- [Tarjan, 1975] TARJAN, R. E.. **Efficiency of a good but not linear set union algorithm**. Journal of the ACM, 22(2):215–225, 1975. 3.2, 3.2.1, 3.2.4
- [Touma & Gotsman, 1998] TOUMA, C.; GOTSMAN, C.. **Triangle mesh compression**. In: GRAPHICS INTERFACE, p. 26–34, 1998. 3.2.5

## Índice Remissivo

- Algoritmos, 62
  - bordo no complexo de Morse, 82
  - células críticas, 104
  - cancelamentos, 106
  - complexidade, 71
  - construção gulosa, 62
  - estrutura de dados, 58
  - função para gradiente, 58
  - geradores da homologia, 87
  - gradiente geométrico, 104
  - grupos de homologia, 86
  - identificação de bacias, 107
  - integração do gradiente, 68
  - junta & busca, 58
  - pontos críticos, 103
  - teste de aciclicidade, 65
- Célula, 28
  - célula crítica, 52
  - célula dual, 52
  - célula primal, 52
- Complexo celular, 28
  - célula, 29
  - células incidentes, 30
  - característica de Euler–Poincaré, 42
  - elo, 30
  - estrela, 30, 98
  - orientação, 32
  - realização, 29
  - subdivisão, 31
- Crítico, 36
- células, 37, 101
- cancelamento, 44
- pontos, 37, 98
- sela, 37, 100, 101
- Fluxo, 46
  - ... de uma célula crítica, 73
  - ... de uma célula dual, 73
  - ... de uma célula primal, 76
  - bacias estáveis, 76
  - bacias instáveis, 47, 75
  - cadeias invariantes, 47, 75, 82
  - variedade estável, 46
  - variedade instável, 46
- Função de Morse, 34
  - caminho crescente, 109
  - caminho integral, 35, 75
  - caminho regular, 109
  - função ótima, 69, 100
  - função de Morse discreta, 35
  - função geométrica, 103
  - gradiente de uma função, 58
  - gradiente discreto, 35
  - multiplicidade de um caminho, 35
- Hipergrafo, 53
  - camada dual, 54
  - camada primária, 54
  - componente regular, 55, 75
  - hipercaminho, 55
  - hiperfloresta, 54
  - hipergrafo de uma camada, 53
  - hiperlinha, 53

- multiplicidade de um hiper-caminho, 73
- orientação, 53
- raiz, 55, 68
- Homologia, 41, 79
  - cadeia, 41
  - ciclos, 90
  - forma normal de Smith, 80
  - geradores, 87
  - homologia de Witten, 49, 82, 100
  - números de Betti, 41, 86
  - operador de bordo, 41, 82
  - torção, 86
- Homotopia, 39
  - colapso, 42
  - decomposição em alças, 40
  - homotopia simples, 42
- Morse
  - complexo, 48, 103
  - decomposição de Smale, 48, 103
  - desigualdades, 43
  - teoria, 27

## Sumário das notações

### Espaço e funções

$X, Y$	espaços topológicos
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	pontos de um espaço topológico
$\text{Im } g = \{\mathbf{y} : \exists \mathbf{x}, g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$	espaço imagem de $g$
$\text{ker } g = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$	núcleo de $g$
$\text{Id}_{X \rightarrow Y} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$	função identidade de $X$ em $Y \subset X$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$	espaço Euclidiano de dimensão $n$
$\ \mathbf{x}\  = \sqrt{\sum_i x_i^2}$	norma Euclidiana do ponto $\mathbf{x}$
$\mathbb{B}^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \ \mathbf{x}\  < 1\}$	bola unitária em $\mathbb{R}^p$
$\mathbb{S}^{p-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \ \mathbf{x}\  = 1\}$	esfera unitária em $\mathbb{R}^p$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos inteiros relativos
$\mathbb{K}$	anel genérico

### Teoria de Morse diferencial

$\mathcal{M}$	variedade
$T\mathcal{M}$	variedade tangente
$\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow \mathcal{M}$	curva sobre $\mathcal{M}$
$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$	função de Morse suave sobre $\mathcal{M}$
$(x_i), x_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$	parametrização local de $\mathcal{M}$
$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_i$	gradiente de $f$
$\text{Hess } f = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j}$	matriz Hessiana de $f$
$H^p = \mathbb{B}^p \times \mathbb{B}^{n-p}$	alça de índice $p$
$\phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla f(\phi(\mathbf{x}, t))$	fluxo derivado de $\nabla f$
$W^s(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{M}, \phi(\mathbf{y}, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x} \right\}$	bacia estável de $\mathbf{x}$
$W^u(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{M}, \phi(\mathbf{y}, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x} \right\}$	bacia instável de $\mathbf{x}$

**Complexos celulares**

$\rho, \sigma, \tau$	células, homeomorfas à $\mathbb{B}^p$
$\rho^{p+1}, \sigma^p, \tau^{p-1}$	células de dimensão $(p+1), p, (p-1)$
$\dim \sigma^p = p$	dimensão de $\sigma^p$
$ \partial\sigma^p $	bordo geométrico de $\sigma$ , homeo. à $\mathbb{S}^{p-1}$
$K = \{\sigma^p, p \leq n\}$	complexo celular de dimensão $n$
$K^p = \{\sigma^k \in K, k \leq p\}$	$p$ -esqueleto de $K$
$ K $	realização geométrica de $K$
$\tau < \sigma : \tau \subset \partial\sigma$	$\sigma$ incidente a $\tau$ , $\tau$ face de $\sigma$
$\partial\sigma = \{\tau_i < \sigma\}$	bordo de $\sigma$
$\mathring{\text{est}}\tau = \sum_{\tau < \sigma_i} \sigma_i$	estrela aberta de $\tau$
$\text{est}\tau = \sum_{\tau < \sigma_i} \sum_{\rho_{ij} < \sigma_i} \rho_{ij}$	estrela de $\tau$
$\text{elo}\tau = \text{est}\tau - \mathring{\text{est}}\tau$	elo de $\tau$
$\text{bx}_f\tau = \mathring{\text{est}}\tau \cap f^{-1}(\text{]}-\infty, f(\tau)\text{[})$	estrela inferior de $\tau$
$[\sigma^p : \tau^{p-1}] \in \{-1, 0, 1\}$	orientação de $\tau$ com respeito à $\sigma$
$\partial\sigma = \sum_{\tau_i < \sigma} [\sigma : \tau_i] \tau_i$	bordo combinatório de $\sigma$

**Homologia**

$\mathbf{c}_p = \sum_{\sigma^p \in K} c_\sigma \sigma^p, c_\sigma \in \mathbb{K}$	cadeia celular de dimensão $p$ sobre o anel $\mathbb{K}$
$C_p = \{\mathbf{c}_p\}$	módulo das cadeias de dimensão $p$
$\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$	operador de bordo de dimensão $p$
$H_p = \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$	grupo de homologia de dimensão $p$
$\beta_p = \text{posto } H_p$	número de Betti de índice $p$
$\#_p = \text{card}(K^p \setminus K^{p-1})$	número de $p$ -células de $K$
$\chi = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \#_p$	característica de Euler–Poincaré de $K$
$\mathbf{B}_p \in \mathbb{K}^{\#_{p-1} \times \#_p}$	matriz do operador de bordo $\partial_p$

### Teoria de Morse discreta

$$\mathcal{V} = \{(\tau^p < \sigma^{p+1})\}$$

$$\mathbf{V} : K \rightarrow K \cup \{0\}$$

$$\langle \tau_i^p \sigma_i^{p+1} \tau_{i+1}^p \rangle, \quad (\tau_i^p > \sigma_i^{p+1}) \in \mathcal{V}$$

$$\langle \tau_0^p \sigma_0^{p+1} \tau_1^p \sigma_1^{p+1} \dots \sigma_{r-1}^{p+1} \tau_r^p \rangle$$

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{Crit}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \in \ker \mathbf{V} \setminus \text{Im } \mathbf{V}\}$$

$$M_p = \left\{ \sum_{\sigma^p \in \text{Crit}_p} c_\sigma \sigma^p, \quad c_\sigma \in \mathbb{K} \right\}$$

$$m_p = \text{card } \text{Crit}_p$$

$$\mu(\langle \tau_i \sigma_i \tau_{i+1} \rangle) = [\mathbf{V}(\sigma_i) : \tau_i] [\mathbf{V}(\sigma_i) : \tau_{i+1}]$$

$$\mu(\langle \tau_0 \sigma_0 \dots \tau_r \rangle) = \prod_i \mu(\langle \tau_i \sigma_i \tau_{i+1} \rangle)$$

$$\Phi = \text{Id}_{C_p \rightarrow C_p} + \mathbf{V} \partial_p + \partial_{p+1} \mathbf{V}$$

$$C_p^\Phi = \{\mathbf{c}_p = \Phi^\infty(\mathbf{c}_p)\}$$

$$\tilde{\partial}_p = \text{Id}_{C_{p-1}^\Phi \rightarrow C_{p-1}} \circ \partial_p \circ \Phi^\infty$$

campo de vetores discreto em  $K$

funcional de um campo de vetor

passo do gradiente

caminho do gradiente

função de Morse discreta

células críticas de  $\mathcal{V}$

módulo das  $p$ -células críticas

número de  $p$ -células críticas

multiplicidade de um passo

multiplicidade de um caminho

fluxo discreto de  $\mathcal{V}$

módulo das  $p$ -cadeias invariantes

operador de bordo em  $M_p$

### Hipergrafos

grafo (Nós  $N$ , linhas :  $N \times N \rightarrow \{0, 1\}$ )

$\mathcal{H} = \text{grafo}(K, <)$

$\text{Prim}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \notin \ker \mathbf{V}\}$

$\text{Dual}_p(\mathcal{V}) = \{\sigma^p \in \text{Im } \mathbf{V}\}$

$\text{hg}(N, \text{Linhas } L, \text{ incidências } i : L \times N \rightarrow \mathbb{Z})$

$\vec{\text{hg}}(N, L, i, \text{ orientação } : L \rightarrow N \cup \{0\})$

$\mathcal{L}_{p(p+1)} = \vec{\text{hg}}(\text{Prim}_p \cup \text{Crit}_p, \text{Dual}_{p+1}, <, \mathcal{V})$

$\mathcal{L}_{p(p-1)} = \vec{\text{hg}}(\text{Dual}_p \cup \text{Crit}_p, \text{Prim}_{p-1}, >, \mathcal{V})$

$\triangleleft n_0 l_0 n_1 l_1 \dots l_r n_r \triangleright$

$n \rightsquigarrow n' \quad \text{se} \quad \exists l \in \mathcal{L} : n > l, (l, n') \in \mathcal{V}$

grafo genérico não orientado

diagrama de Hasse de  $K$

células primais de  $\mathcal{V}$

células duais de  $\mathcal{V}$

hipergrafo genérico

hipergrafo orientado genérico

camada primal de  $\mathcal{V}$

camada dual de  $\mathcal{V}$

hipercaminho

$n$  pai de  $n'$ ,  $n'$  filho de  $n$