

Construção de funções de Morse discretas

THOMAS LEWINER, HÉLIO LOPES AND GEOVAN TAVARES

Department of Mathematics — Pontifícia Universidade Católica — Rio de Janeiro — Brazil
{tomlew, lopes, tavares}@mat.puc--rio.br.

Abstract. A teoria de Morse é considerada uma ferramenta matemática importante e esta tem sido aplicada em várias áreas, tais como : topologia computacional, computação gráfica e modelagem geométrica. Foi inicialmente formulada para variedades diferenciáveis. Recentemente, Robin Forman desenvolveu uma versão dessa teoria para estruturas discretas, tais como complexos celulares, aumentando o número de suas aplicações. Uma vez que uma função de Morse é definida em uma variedade, deduz-se através de seus elementos críticos informações sobre a topologia dessa variedade. O objetivo desse trabalho é apresentar as bases dos métodos desenvolvidos para definir uma função de Morse discreta sobre um complexo celular. Em particular, a representação por hiperflorestas permite usar algoritmos simples e eficazes.

Keywords: *Isosurfaces. Data Compression. Simplicial Methods. Progressive Transmission.*

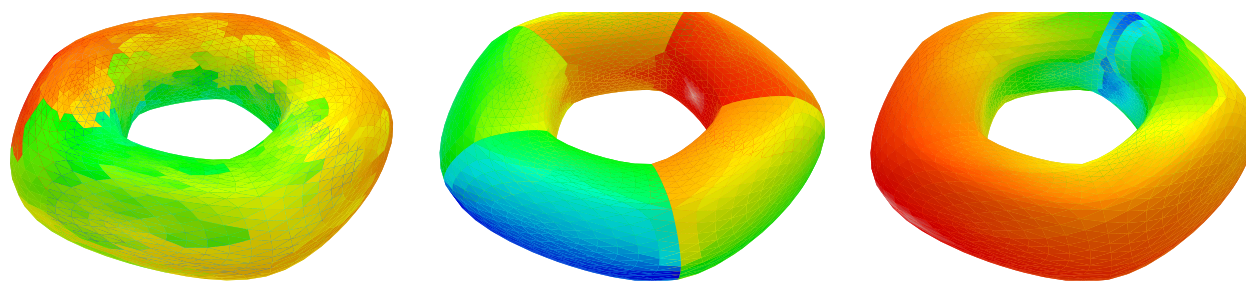


Figure 1: Funções de Morse ótimas com diferentes restrições geométricas: as cores representam o valor da função de Morse numa escala verde-vermelho.

1 Introdução

A **teoria de Morse** [18] é uma ferramenta fundamental para investigar a topologia das variedades diferenciáveis. Particularmente para computação gráfica, muitas aplicações foram feitas [4, 7, 14, 19] utilizando sua versão diferenciável. Morse provou que a topologia de uma variedade é relacionada aos pontos críticos de uma função real diferenciável definida nela. Por exemplo, o número e a estabilidade dos equilíbrios de qualquer sistema dinâmico definido num espaço topológico depende da topologia deste espaço.

Teoria discreta de Morse de Forman. Os trabalhos de Forman [5] na teoria de Morse estenderam diversos aspectos desta ferramenta às estruturas discretas. Essa teoria contém, em particular, uma versão discreta dos teoremas fundamentais da teoria de Morse, sem requerer

aproximação ou hipóteses adicionais. Seu aspecto puramente combinatório permite a sua computação independente de uma realização geométrica (cf figura 1).

Trabalhos relacionados. Ainda são poucas as contribuições ao problema de construir algoritmicamente funções de Morse discretas. Existe uma construção a partir de ordens lexicográficas [1] que requer ter primeiro um algoritmo para obter uma ordem lexicográfica, o que transforma esse problema em outro. Uma primeira versão dos conceitos deste trabalho para superfícies já apareceu em [9].

Aplicações. Além das aplicações desenvolvidas pelo próprio Forman [6], essa teoria ajudou a desenvolver provas de algoritmos de compressão de malhas [12, 13], e fornece uma ferramenta poderosa para extrair a topologia de modelos 3D [9] e n -dimensionais [10, 11]. Também esse trabalho foi usado para definir um complexo de Morse–Smale discreto para superfícies, com aplicações a problemas de bio-informática [3].

Sumário. Este artigo está organizado da seguinte maneira. Os conceitos básicos de teoria dos grafos e a

Preprint MAT. 17/03, communicated on January 15st, 2003 to the Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica — Rio de Janeiro, Brazil. The corresponding work was published in the proceedings of the Workshop de Teses e Dissertações of the Sibgrapi 2003.

estrutura geral dos objetos considerados neste trabalho estão apresentados na seção 2. Os elementos básicos da teoria de Morse discreta formam a seção 3. Os resultados mais úteis para desenvolver os algoritmos estão citados na seção 4. Em particular, uma função de Morse discreta pode ser vista como uma coleção de hiperflorestas. A construção de funções de Morse ótimas é discutida na seção 5, onde um pseudocódigo descreve os detalhes do algoritmo final. Finalmente, algumas aplicações são resumidas na seção 6.

2 Conceitos básicos

A teoria de Morse clássica se aplica a funções diferenciáveis em variedades diferenciáveis, o que dificulta as aplicações computacionais dessa teoria. Felizmente, a teoria de Forman se aplica aos complexos celulares, que é um dos objetos mais usados em computação gráfica. Além disso, os complexos celulares são estruturas mais gerais que as variedades. Podemos vê-los também como uma generalização de grafos. Nesta seção, vamos definir essas noções de teoria dos grafos [2] e de topologia combinatória [17].

(a) Grafos

Definição 1 (Grafo) Um grafo é um par (N, L) , onde N é um conjunto de objetos chamados de nós, e L é um família de pares de nós. Os elementos de L são chamados de linhas.

Dizemos que uma linha *liga* seus dois nós incidentes, e que estes nós são *adjacentes*. Um grafo pode ser orientado distinguindo para cada uma das suas linhas um dos seus nós como sendo o seu *nó fonte*.

Um *caminho* dentro de um grafo é uma seqüência de linhas duas a duas distintas e sucessivamente adjacentes. Tal caminho é um *circuito* se o primeiro e o último nó da seqüência forem idênticos. Um grafo sem circuito é chamado de *floresta*. Uma floresta conexa é chamada de *árvore*.

Um grafo (N', L') é dito *extraído* de um outro grafo (N, L) se $N' \subset N$ e $L' \subset L$.

(b) Emparelhamentos e grafos bipartidos

Os grafos bipartidos se aplicam tradicionalmente aos problemas de emparelhamento [2, 16]:

Definição 2 (Grafo bipartido) Um grafo bipartido é um grafo cujo conjunto de nós pode ser partido em dois conjuntos distintos, chamados aqui de *classes* N e L , tais que nenhum par de nós dentro do mesmo conjunto são adjacentes.

Por exemplo, o problema de agrupar meninos com meninas na escola, poderia ser representado por um emparelhamento em um grafo bipartido. Os meninos são uma classe dos nós, as meninas são outra, e a afinidade entre um menino e uma menina é representada por uma linha. A

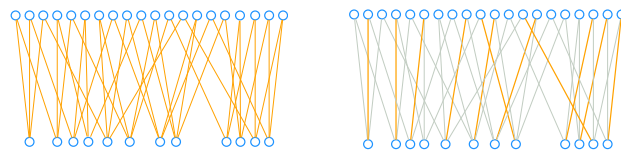


Figure 2: Uma grafo bipartido com um emparelhamento parcial.

figura 2 mostra um exemplo de um emparelhamento (parcial) num grafo bipartido.

Definição 3 (Emparelhamento) Um emparelhamento em um grafo é um subconjunto de suas linhas de tal forma que nenhum par de linhas possui um vértice em comum.

(c) Hipergrafos

Um hipergrafo é uma generalização da noção de grafo permitindo definir o dual de um grafo, invertendo o papel dos nós e das linhas (cf figura 3).

Definição 4 (Hipergrafo) Um hipergrafo é um par (N, L) , onde N é um conjunto de objetos chamados de nós, e L é uma família de famílias de N . Os elementos de L são chamados hiperlinhas.

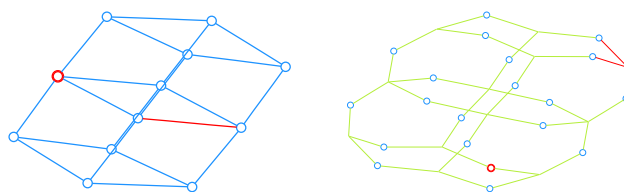


Figure 3: Um grafo com o dual: o dual é um hipergrafo.

Classificaremos as hiperlinhas não vazias como: *regulares* (ou simplesmente *linhas*), quando elas forem incidentes a dois nós distintos; como *laços* quando forem incidentes à somente um nó; ou, como *não-regulares* quando forem incidentes a três nós ou mais, ou várias vezes a um nó. Podemos extrair um grafo simples de um hipergrafo considerando suas *componentes regulares*:

Definição 5 (Componentes regulares) As componentes regulares de um hipergrafo (N, L) são as componentes conexas do grafo simples (N, R) , onde R é o conjunto das hiperlinhas regulares de (N, L) .

Daremos a um hipergrafo uma orientação distinguindo um nó de cada hiperlinha como sendo o seu *nó fonte*.

(d) Complexos celulares

Um complexo celular é, essencialmente, uma generalização das estruturas usadas para representar objetos da modelagem geométrica: é uma coleção consistente de células (vértices, arestas, faces...). Em particular, triangulações de espaços topológicos ou malhas 3D são complexos celulares (cf figura 4). A figura 5 dá uma construção mínima de um toro por um complexo celular. Uma introdução completa aos complexos celulares pode ser encontrada em [17].

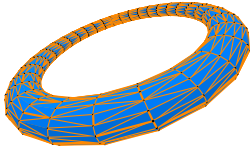


Figure 4: Um toro triangulado.



Figure 5: Uma construção de um toro com 4 células.

Definição 6 (Célula) Uma célula $\alpha^{(p)}$ de dimensão p é um conjunto homeomorfo à bola aberta $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$.

Quando a dimensão p da célula é óbvia, denotaremos simplesmente α em vez de $\alpha^{(p)}$.

Definição 7 (CW-complexo) Um CW-complexo K é construído a partir de uma coleção de 0-células (vértices) denotada K^0 ; grudando 1-células (arestas) ao longo dos seus bordos à K^0 , obtendo K^1 ; e depois grudando 2-células (faces) ao longo dos seus bordos à K^1 , escrevendo K^2 para o novo espaço; e assim por diante, dando espaços K^n para cada n .

Um CW-complexo será qualificado de finito se for construído a partir de um número finito de células. Neste trabalho, consideraremos apenas CW-complexos finitos (e, portanto, regulares), o que permite a computação deles.

Uma p -célula $\alpha^{(p)}$ é uma face de uma q -célula $\beta^{(q)}$ ($p < q$) se $\alpha \subset \text{fecho}(\beta)$. Se $q = p + 1$ usaremos a notação $\alpha^{(p)} \prec \beta^{(q)}$, e diremos que α e β são incidentes.

(e) Diagrama de Hasse de um complexo celular

Os complexos celulares e os grafos são estruturas discretas. Num certo sentido, um complexo celular é uma generalização de um grafo, porque um grafo pode ser visto como um complexo celular de dimensão 1. Não obstante, podemos também representar a conectividade de um complexo celular por um grafo, chamado de *diagrama de Hasse*.

Definição 8 (Diagrama de Hasse) O diagrama de Hasse de um complexo celular K é o grafo orientado H :

- Cada nó de H representa uma célula de K .
- As linhas de H ligam os nós que representam células incidentes de K . O nó fonte de cada linha é aquele que possui a maior dimensão.

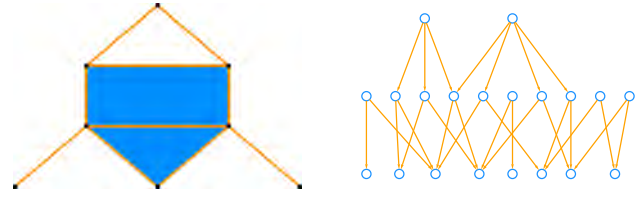


Figure 6: O diagrama de Hasse de um complexo celular.

O diagrama de Hasse é geralmente desenhado com os nós ordenados por dimensão. Na figura 6, as faces (2-células) são alinhadas na fileira superior, as arestas (1-células) na fileira do meio e os vértices (0-células) na fileira inferior. Uma linha entre dois nós simboliza a relação de incidência entre as células correspondentes.

3 Teoria de Morse discreta de Forman

A teoria de Forman se baseia ou em funções admissíveis em um complexo celular, chamadas funções de Morse discretas, ou equivalentemente nos seus campos gradientes. Escolhemos aqui apresentar essa teoria começando pelo segundo ponto de vista.

(a) Campo de vetor combinatório

Definição 9 (Campo de vetor combinatório) Um campo de vetor combinatório \mathcal{V} definido num complexo celular K é uma coleção de pares disjuntos de células incidentes: $\mathcal{V} = \left\{ \left(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)} \right), \text{ com } \alpha_i \prec \beta_i, \alpha_i \neq \alpha_j, \beta_i \neq \beta_k \right\}$.

Podemos definir o campo de vetor combinatório como uma função $V : K \rightarrow K \cup \{0\}$:

$$\left(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)} \right) \in \mathcal{V} \Rightarrow V(\alpha) = \beta \text{ e } V(\beta) = 0.$$

Se uma célula $\sigma^{(p)}$ não pertencer a nenhuma par, então $V(\sigma^{(p)}) = 0$.

Representaremos graficamente um campo de vetor combinatório por uma seta que tem a sua fonte na célula de dimensão menor e aponta a célula de maior dimensão do mesmo par em \mathcal{V} , i.e. de α para $V(\alpha)$ (cf figura 7).

Definição 10 (V-caminho) Um V -caminho é uma sequência alternada de células $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$ respeitando:

$$V(\alpha_i^{(p)}) = \beta_i^{(p+1)} \text{ e } \beta_i^{(p+1)} \succ \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}.$$

Um V -caminho é não trivial e fechado se $r \geq 1$ e $\alpha_{r+1} = \alpha_0$. Por exemplo, a figura 7 mostra em vermelho o V -caminho fechado de um campo de vetor combinatório.

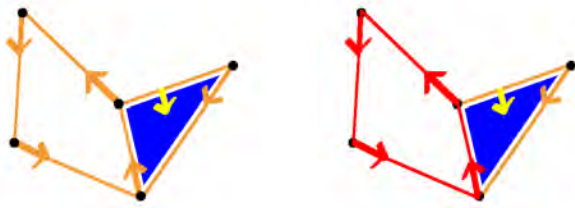


Figure 7: Um exemplo de campo de vetor combinatório com um V -caminho fechado.

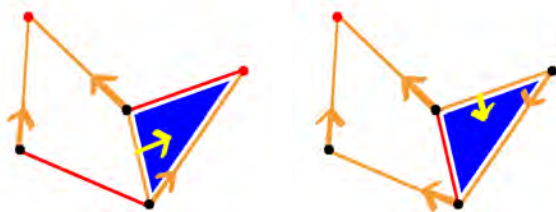
(b) Campo gradiente discreto e suas células críticas

Definição 11 (Campo gradiente discreto) Um campo gradiente discreto é um campo de vetor combinatório sem V -caminho fechado.

Morse provou que a topologia de uma variedade está relacionada aos elementos críticos de uma função diferenciável definida nela. Forman obteve um resultado parecido, com a seguinte definição de células críticas:

Definição 12 (Células críticas) Uma célula α é crítica se não pertence a nenhuma par, i.e.:

$$V(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha \notin \text{Im}(V)$$



8(a): válido

8(b): ótimo

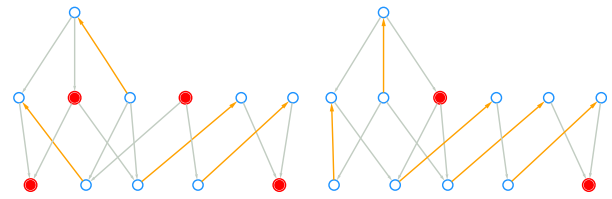
Figure 8: Exemplos de campos gradiente discretos.

Notaremos $m_p(\mathcal{V})$ o número de células críticas de \mathcal{V} . O exemplo da figura 7 não é um campo de vetor discreto, porque ele possui um V -caminho fechado. Na figura 8, as células críticas do campo gradiente discreto são coloridas de vermelho.

(c) Diagrama de Hasse de campos de vetores

Um campo de vetor combinatório é um emparelhamento parcial no diagrama de Hasse: cada par de \mathcal{V} corresponde a nós casados no diagrama de Hasse.

Representaremos um tal emparelhamento invertendo a orientação das linhas entre cada par de \mathcal{V} : o nó fonte da seta será $\alpha^{(p)}$ para cada $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}) \in \mathcal{V}$. Por exemplo, a



9(a): válido

9(b): ótimo

Figure 9: Diagrama de Hasse dos exemplos da figura 8.

figura 9 mostra o diagrama de Hasse dos campos gradientes discretos da figura 8.

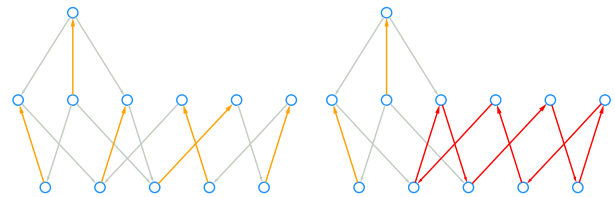


Figure 10: O diagrama de Hasse do campo de vetor combinatório da figura 7, e o circuito do seu V -caminho fechado (em vermelho).

Com esta orientação modificada, um V -caminho fechado é precisamente um circuito orientado no diagrama de Hasse (cf figura 10). Um campo gradiente discreto não tem V -caminho fechado, e assim será um emparelhamento acíclico.

(d) Funções de Morse discretas e suas células críticas

Uma função de Morse discreta definida num complexo celular dado é uma função real “quase-crescente” com respeito à dimensão. Pode haver no máximo uma exceção por célula, e essa exceção relaciona-se com os pares do campo gradiente discreto.

Definição 13 (Função de Morse discreta) Uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada célula de um complexo celular K a um valor real é uma função de Morse discreta quando satisfaz, para cada célula $\sigma^{(p)} \in K$:

$$\# \left\{ \tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} : f(\tau) \leq f(\sigma) \right\} \leq 1$$

$$\text{e} \quad \# \left\{ \nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} : f(\nu) \geq f(\sigma) \right\} \leq 1$$

Ou seja, para cada célula σ , f atribui a uma face de σ no máximo um valor maior do que $f(\sigma)$, e a uma célula na qual σ pertence ao bordo, no máximo um valor menor do que $f(\sigma)$. Para cada célula, há no máximo uma face que a “compensa” e no máximo uma célula, na qual σ pertence ao bordo, que também a “compensa”. É fácil mostrar que em uma célula não pode ocorrer ambos os casos. Uma célula

que não tem nenhuma outra célula que a “compensa” será chamada de *crítica*:

Definição 14 (Célula crítica) Uma célula $\sigma^{(p)}$ é uma célula crítica de f se:

$$\# \left\{ \tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} : f(\tau) \leq f(\sigma) \right\} = 0$$

$$e \quad \# \left\{ v^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} : f(v) \geq f(\sigma) \right\} = 0$$

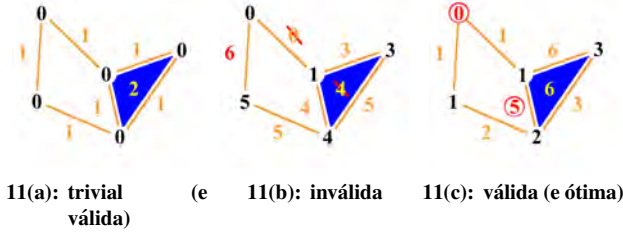


Figure 11: Exemplos de funções de Morse discretas

A figura 11 dá alguns exemplos de funções de Morse discretas. Naturalmente, nem toda função é válida: na figura 11(b) por exemplo, a face (com valor 4) e a aresta com valor 0 são atribuídas valores inválidos para a definição 13. As células críticas da figura 11(c) têm valores 0 e 5.

4 Funções de Morse discretas como hiperflorestas

Nessa seção, vamos descrever a parte fundamental deste trabalho: a equivalência entre as funções de Morse discretas e as hiperflorestas. Em particular, vamos mostrar que cada função de Morse discreta pode ser construída ou definida como uma coleção de hiperflorestas. Além disso, a cada coleção de hiperflorestas extraídas de um complexo celular corresponde uma função de Morse discreta. Em particular, esta equivalência nos permite construir funções de Morse discretas com um algoritmo simples e eficaz. Também, essa equivalência dá um quarto ponto de vista sobre a teoria de Morse discreta. As provas dos teoremas a seguir podem ser encontradas em [8].

(a) Hiperflorestas

Definimos uma floresta como um grafo sem circuito na seção 2(a). Aqui vemos uma extensão natural de florestas para hipergrafos [2]:

Definição 15 (Hipercircuito orientado) Um hipercircuito orientado num hipergrafo é uma seqüência de nós distintos n_0, n_1, \dots, n_{r+1} tais que $n_{r+1} = n_0$ e para qualquer $0 \leq i \leq r$, n_i é a fonte da hiperlinha ligando n_i a n_{i+1} .

Definição 16 (Hiperfloresta) Diremos que um hipergrafo simplesmente orientado é uma hiperfloresta se cada nó é a fonte de no máximo uma hiperlinha, e se não possuir hipercircuito.

Podemos deduzir dessa definição as seguintes propriedades úteis para extrair hiperflorestas de hipergrafos:

Proposição 17 Seja HF uma hiperfloresta, e R uma das suas componentes regulares.

- (i) Os componentes regulares de HF são árvores.
- (ii) Há no máximo um nó em R que é a fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular.

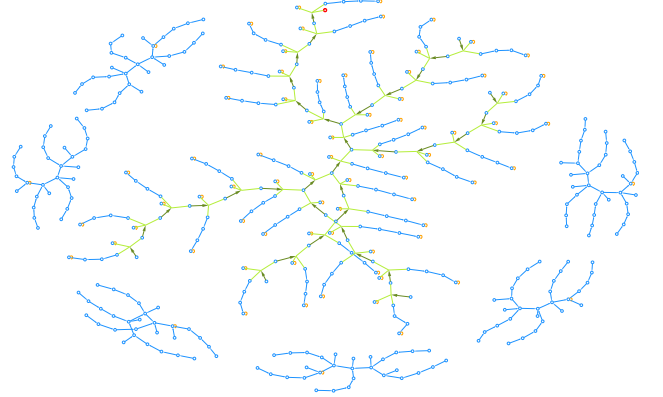


Figure 12: A hiperfloresta 2/1 resultante do processamento de um modelo de $S^2 \times S^1$.

Na figura 12, por exemplo, podemos ver como as hiperlinhas não-regulars (em verde) formam um tipo de floresta.

(b) Campo gradiente discreto e hiperflorestas

Sejam K um complexo celular, p e q duas dimensões com $|p - q| = 1$. Podemos representar as células de dimensões p e q de K por um hipergrafo H , chamado de p/q -hipergrafo de K : cada nó n de H representa uma p -célula de K , e cada linha l de H representa uma q -célula $\beta^{(q)}$ de K , ligando os nós incidentes a $\beta^{(q)}$ de dimensão p .

Agora, dado um campo de vetor combinatório \mathcal{V} , podemos extrair de H um hipergrafo HF representando somente as células de dimensões p e q formando pares em \mathcal{V} . Esse hipergrafo é uma hiperfloresta se e somente se \mathcal{V} não tem hipercircuito nas dimensões p e q [8].

Invertendo os índices p e q , obtemos o *dual* de H ou de HF . Isso não leva a uma contradição porque o dual de uma hiperfloresta é uma hiperfloresta [8]. Então, os teoremas seguintes ainda valem quando trocamos p/q -hipergrafos por q/p -hipergrafos. Mas na hora da computação, é melhor escolher o hipergrafo que possui o menor número de hiperlinhas não-regulars [11].

Teorema 18 Seja \mathcal{V} um campo de vetor combinatório num complexo celular K de dimensão n . \mathcal{V} é um campo gradiente discreto se e somente se os $0/1, 1/2, \dots, (n-1)/n$ hipergrafos de \mathcal{V} são hiperflorestas.

(c) Componentes críticas

Nós definiremos agora o análogo de células críticas para hiperflorestas. Um elemento crítico de um campo gradiente discreto será representado por uma componente regular de uma hiperfloresta.

Definição 19 (Componente crítica) *Uma componente regular de uma hiperfloresta será crítica se não possuir um nó fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular.*

Proposição 20 *Seja \mathcal{V} um campo gradiente discreto e HF a p/q -hiperfloresta de \mathcal{V} . O número de componentes críticas de HF é exatamente o número $m_p(\mathcal{V})$ de p -células críticas de \mathcal{V} .*

5 Construção de funções de Morse discretas ótimas

As células críticas de uma função de Morse discreta definida em um complexo celular descrevem o seu tipo de homotopia simples [5]. Obter um número pequeno de células críticas nos permite acelerar o cálculo de propriedades topológicas complexas.

Definição 21 (Funções de Morse discretas ótimas)

Diremos que uma função de Morse discreta é ótima se ela tiver o menor número possível de células críticas.

Infelizmente, o problema geral de encontrar uma função de Morse discreta ótima é *MAX-SNP difícil* [9], i.e. um problema NP-difícil para o qual qualquer algoritmo de aproximação polinomial pode conduzir a um resultado arbitrariamente longe do ótimo. Além disso, se o complexo celular não for colapsível, o número mínimo de células críticas pode ser maior do que esperado para o espaço topológico subjacente ao complexo celular.

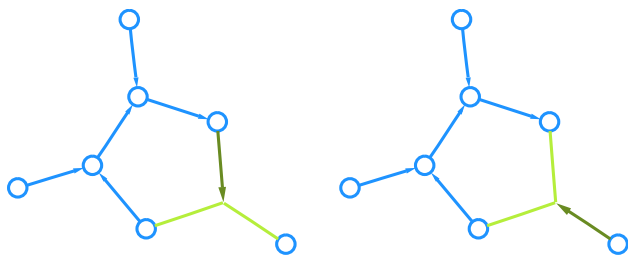


Figure 13: O hipercircuito depende da orientação da hiperlinha, mas quando uma componente é incidente a apenas uma hiperlinha, dá para acrescentar aquela hiperlinha.

O algoritmo desenvolvido aqui permite gerar funções de Morse discretas válidas em todos os casos, e quase sempre ótimas [11]. Este algoritmo procede por pares de dimensões consecutivas, até ter classificado todas as células. O procedimento usado está melhorado para tratar casos óbvios para hiperlinhas (cf figuras 13) e assim diminuir o

tamanho da fila de prioridade. Também pode incorporar critérios geométricos na prioridade das células $\beta^{(q)}$ no algoritmo *Componentes regulares* e na fila de prioridade do algoritmo *Hiperlinhas*.

Componentes regulares (p, q): extrai árvores das componentes regulares nas dimensões p e q

```

1: for all células  $\beta^{(q)}$  de  $K$  do
2:   if  $\beta^{(q)}$  é regular then
3:     acrescente  $\beta^{(q)}$  à hiperfloresta  $HF$ 
4:     marque as células incidentes da mesma componente
5:   else if  $\beta^{(q)}$  é um laço, incidente à  $\alpha^{(p)}$  then
6:     guarde  $\beta^{(q)}$  numa tabela com a componente de  $\alpha^{(p)}$ 
7:   else if  $\beta^{(q)}$  é uma hiperlinha then
8:     guarde  $\beta^{(q)}$  numa fila de prioridade
9:   end if
10: end for
11: for all componentes  $c$  de  $HF$  do
12:   if  $c$  tem um laço  $\beta^{(q)}$  incidente then
13:     acrescente  $\beta^{(q)}$  à hiperfloresta  $HF$ 
14:     marque a única célula incidente a  $\beta^{(q)}$  como sendo a raiz da sua componente regular.
15:   end if
16: end for

```

Hiperlinhas (p, q): seleciona o maior número de hiperlinhas sem formar hipercircuitos nas dimensões p e q

```

1: for all hiperlinhas  $\beta^{(q)}$  da fila de prioridade do
2:   if  $\beta^{(q)}$  é incidente apenas uma vez a uma componente crítica  $c$  then
3:     acrescente  $\beta^{(q)}$  à hiperfloresta
4:     marque a única célula de  $c$  incidente a  $\beta^{(q)}$  como sendo a raiz da sua componente regular.
5:     junte todas as componentes incidentes a  $\beta^{(q)}$ 
6:     atualize as prioridades das componentes incidentes a  $\beta^{(q)}$ 
7:   end if
8:   tire  $\beta^{(q)}$  da fila de prioridade
9: end for

```

Gradiente: constrói o campo gradiente discreto e a função de Morse discreta a partir da hiperfloresta p/q

```

1: for  $d = \dim(K) \dots 1$  do
2:   Componentes regulares( $d, d - 1$ )
3:   Hiperlinhas( $d, d - 1$ )
4: end for
5: for all componentes  $c$  crítica ou cuja raiz  $r^{(p)}$  seja incidente a um laço do

```

- ```

6: if c for crítica then
7: $r^{(p)}$ designa um nó qualquer de c
8: end if
9: coloque no mesmo par do campo gradiente cada
 célula $\alpha^{(p)}$ conectada à $r^{(p)}$ com a primeira linha
 $\beta^{(q)}$ na direção de $r^{(p)}$.
10: de à cada célula $\alpha^{(p)}$ conectada à $r^{(p)}$ o valor da
 função de Morse sendo a distância até $r^{(p)}$, mais
 $3 * \#K^{(p)}$.
11: end for

```

## 6 Aplicações

A implementação dessa construção de funções de Morse discretas nos permitiu desenvolver várias aplicações. Entre essas, resumimos nessa seção duas aplicações na área de visualização e na área de compressão de malhas.

### (a) Visualização

A teoria de Morse clássica permite descrever simplesmente uma variedade diferenciável [19]. Assim, podemos extrair alguns elementos significativos de um objeto gráfico.

Esses elementos podem corresponder aos pontos críticos de uma função geométrica (cf figuras 1 e 15), tais como uma função coordenada no caso de terrenos, a curvatura ou a função de Connolly [3]. Nesse caso, alguns desses elementos críticos podem ser a consequência de um ruído na função ou no modelo geométrico. Esse ruído pode ser facilmente eliminado usando a própria teoria de Morse discreta [5, sec. 11].

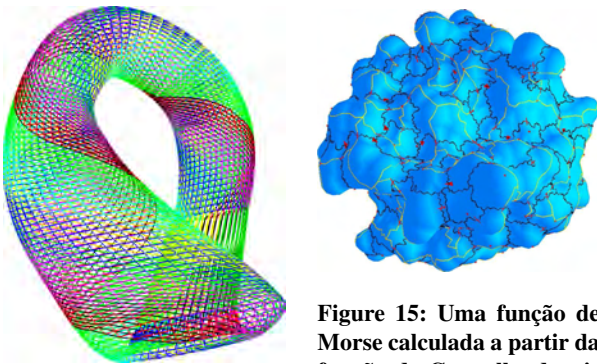


Figure 15: Uma função de Morse calculada a partir da função de Connolly, depois de ter removido os ruídos: as linhas pretas separam as saliências (pontos críticos), e as linhas amarelas separam as depressões (faces críticas).

Figure 14: Uma função de Morse nas arestas de uma garrafa de Klein: as arestas de valor grande (em vermelho) desenham uma faixa de Möbius.

Os elementos críticos podem também ser calculados com restrições geométricas, usando o algoritmo da seção 5. Nesse caso, somente os elementos críticos essenciais são

guardados, pois a função tende a ser ótima. Isso pode gerar uma visualização concreta de propriedades abstratas, como por exemplo as faixas de Möbius dentro de uma garrafa de Klein na figura 14.

Além dos elementos críticos, a função de Morse discreta descreve como esses elementos críticos podem ser relacionados. A ligação dos elementos críticos separa o modelo em partes geometricamente homogêneas, como por exemplo as depressões e as saliências numa molécula (cf figura 15).

### (b) Compressão de malhas

A grande maioria dos algoritmos de compressão de malhas percorrem as faces da malha sem atravessar duas vezes a mesma face. Esse percurso corresponde a uma árvore no dual da malha. Por exemplo, algoritmos otimizados para superfícies tais como o Edgebreaker [15] ou o Valence Coding [21] constroem explicitamente uma árvore 2/1 na superfície. O Edgebreaker codifica com símbolos a árvore 0/1 de arestas não percorridas. O Valence Coding a codifica explicitamente pela valência dos vértices. A compressão progressiva também codifica essas árvores, mas em vários passos.

Essa semelhança com a nossa construção de função de Morse expressa claramente a interação desses algoritmos de compressão com a topologia da malha. As arestas críticas são codificadas no Edgebreaker por símbolos especiais [15] e por operações “join” no Valence Coding. A nossa análise de funções de Morse discretas nos permitiu estender o Edgebreaker para superfícies gerais quase sem modificações no algoritmo [13].

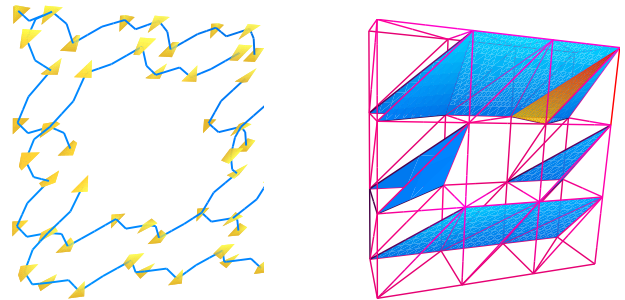


Figure 16: O percurso do Grow&Fold num toro sólido e o triângulo contendo a aresta crítica.

O princípio do Edgebreaker foi estendido para malhas tetraedrais no Grow&Fold [20]. Nesse algoritmo, a compressão das arestas críticas custa mais memória. Infelizmente, minimizar esse número de arestas críticas é equivalente a achar uma função de Morse ótima, o que é um problema MAX-SNP difícil para malhas 3D. Mas, o algoritmo guloso apresentado na seção 5 tem resultados quase ótimos [11]. Provamos assim [12] que o algoritmo guloso do Grow&Fold pode ter resultados bons em tempo

aceitável, porém nem sempre próximo do ótimo porque isso é um problema exponencial.

## 7 Conclusão

Apresentamos nesse trabalho, que é um resumo de [8], as ferramentas úteis para criar funções de Morse discretas sobre os objetos clássicos da computação gráfica. A formulação como hiperfloresta permite usar um algoritmo guloso com resultados quase-ótimos. Mas o problema geral de criar funções de Morse discretas ótimas é MAX-SNP difícil, e enfrenta noções de colapsibilidade que depende do complexo celular mais do que do objeto representado.

Pretendemos estender esse trabalho para desenvolver uma decomposição de Morse–Smale inteiramente discreta. Isso daria uma ferramenta poderosa e um quadro teórico bem definido para a segmentação de superfícies ou de objetos nD, para a análise de sistemas dinâmicos simples e para a compreensão de dados volumétricos.

## Acknowledgments

Nós agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro.

## References

- [1] E. Babson and P. Hersh. Discrete Morse functions from lexicographic orders. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357:509–534, 2005.
- [2] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.
- [3] F. Cazals, F. Chazal and T. Lewiner. Molecular shape analysis based upon Morse–Smale complex and the Connolly function. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 351–360. ACM, 2003.
- [4] H. Edelsbrunner, J. L. Harer and A. Zomorodian. Hierarchical Morse complexes for piecewise linear 2–manifolds. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 70–79. ACM, 2001.
- [5] R. Forman. Morse theory for cell complexes. *Advances in Mathematics*, 134:90–145, 1998.
- [6] R. Forman. Some applications of combinatorial differential topology. In *Sullivan Fest*, 2001.
- [7] J. C. Hart. Morse theory for implicit surface modeling. In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Visualization and Mathematics*, pages 257–268, Heidelberg, 1998. Springer.
- [8] T. Lewiner. Constructing discrete Morse functions. Master’s thesis, *Department of Mathematics, PUC–Rio*, Aug. 2002. Advised by Hélio Lopes and Geovan Tavares.
- [9] T. Lewiner, H. Lopes and G. Tavares. Optimal discrete Morse functions for 2–manifolds. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 26(3):221–233, 2003.
- [10] T. Lewiner, H. Lopes and G. Tavares. Visualizing Forman’s discrete vector field. In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Visualization and Mathematics III*, pages 95–112, Heidelberg, 2003. Springer.
- [11] T. Lewiner, H. Lopes and G. Tavares. Towards optimality in discrete Morse theory. *Experimental Mathematics*, 12(3):271–285, 2003.
- [12] T. Lewiner, H. Lopes and G. Tavares. Applications of Forman’s discrete Morse theory to topology visualization and mesh compression. *Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5):499–508, 2004.
- [13] T. Lewiner, H. Lopes, J. Rossignac and A. W. Vieira. Efficient Edgebreaker for surfaces of arbitrary topology. In *Sibgrapi*, pages 218–225, Curitiba, Oct. 2004. IEEE.
- [14] H. Lopes. Algorithm to build and unbuild 2 and 3 dimensional manifolds. PhD thesis, *Department of Mathematics, PUC–Rio*, 1996. Advised by Geovan Tavares.
- [15] H. Lopes, J. Rossignac, A. Safonova, A. Szymczak and G. Tavares. Edgebreaker: a simple compression for surfaces with handles. In C. Hoffman and W. Bronsvort, editors, *Solid Modeling and Applications*, pages 289–296, Saarbrücken, Germany, 2002. ACM.
- [16] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching theory*. Van Nostrand Reinhold, Amsterdam, 1986.
- [17] A. T. Lundell and S. Weingram. *The topology of CW–complexes*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [18] J. W. Milnor. *Morse theory*. Number 51 in *Annals of Mathematics Study*. Princeton University Press, 1963.
- [19] Y. Shinagawa, T. L. Kunii and Y. L. Kergosien. Surface coding based on Morse theory. *Computer Graphics and Applications*, 11:66–78, 1991.
- [20] A. Szymczak and J. Rossignac. Grow & Fold: compressing the connectivity of tetrahedral meshes. *Computer–Aided Design*, 32(8/9):527–538, 2000.
- [21] C. Touma and C. Gotsman. Triangle mesh compression. In *Graphics Interface*, pages 26–34, 1998.