

Thomas Maurice Lewiner

**Construção de funções de Morse
discretas**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-graduação em Matemática
Aplicada

Rio de Janeiro
Julho de 2002



Thomas Maurice Lewiner

Construção de funções de Morse discretas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Co-Orientador: Prof. Geovan Tavares dos Santos

Rio de Janeiro
Julho de 2002



Thomas Maurice Lewiner

Construção de funções de Morse discretas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Geovan Tavares dos Santos

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luis Carlos Pacheco R. Velho

IMPA

Prof. Jorge Stolfi

UNICAMP

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de Julho de 2002

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Thomas Maurice Lewiner

Graduou-se em Engenharia na Ecole Polytechnique (Paris, França), cursando Álgebra e Informática, assim como Física Teórica. Especializou-se na Ecole Supérieure des Télécommunications (Paris, França) em Processamento de Sinais de Voz e Imagens, assim como Organização e Planejamento. Trabalhou junto com a empresa Inventel em sistemas de telecomunicações sem fio baseados na tecnologia Bluetooth. Desenvolveu junto com os seus orientadores durante o Mestrado ferramentas de topologia computacional.

Ficha Catalográfica

Lewiner, Thomas

Construção de funções de Morse discretas/ Thomas Maurice Lewiner; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes; co-orientador: Geovan Tavares dos Santos. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2002.

v., 91 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Teoria de Morse. 3. Teoria de Forman. 4. Topologia Computacional. 5. Geometria Computacional. 6. Modelagem Geométrica. 6. Matemática Discreta. I. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. II. Santos, Geovan Tavares dos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus orientadores Professores Hélio Lopes e Geovan Tavares pelo apoio, simpatia de sempre, e incentivo para a realização deste trabalho

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Às minhas avós, que sofreram o mais pela saudade devida a minha expatriação. Aos meus pais, irmãs e família.

Aos meus colegas da PUC-Rio, quem me fizeram adorar esse lugar.

Aos professores Marcos da Silvera, Jean-Marie Nicolas e Anne Germa que me ofereceram a oportunidade desta cooperação.

Ao pessoal do departamento de Matemática para a ajuda de todos os dias, em particular à Ana Cristina, Creuza e ao Sinesio.

Resumo

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Construção de funções de Morse discretas**. Rio de Janeiro, 2002. 91p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A teoria de Morse é considerada uma ferramenta matemática importante em aplicações nas áreas de topologia computacional, computação gráfica e modelagem geométrica. Ela foi inicialmente formulada para variedades diferenciáveis. Recentemente, Robin Forman desenvolveu uma versão dessa teoria para estruturas discretas, tais como complexos celulares. E isso permitiu que ela pudesse ser aplicada a outros tipos interessantes de objetos, em particular para malhas.

Uma vez que uma função de Morse é definida em uma variedade, informações sobre sua topologia podem ser deduzidas através de seus elementos críticos. O objetivo desse trabalho é apresentar um algoritmo para definir uma função de Morse discreta ótima para um complexo celular, onde obter o ótimo significa construir uma função que possui o menor número possível de elementos críticos. Aqui foi provado que esse problema é MAX-SNP difícil. Entretanto, também será proposto um algoritmo linear que, para o caso de variedades de dimensão 2, é sempre ótimo.

Também foram provados vários resultados sobre a própria estrutura das funções de Morse discretas. Em particular, uma representação equivalente por hiperflorestas é apresentada. E através dessa representação, foi desenvolvido um algoritmo para construção de funções de Morse discretas em complexos celulares com dimensão arbitrária. Esse algoritmo é quadrático no tempo e, apesar de não se poder garantir o resultado ótimo, dá respostas ótimas na maioria dos casos práticos.

Palavras-chave

Teoria de Morse; Teoria de Forman; Topologia Computacional; Geometria Computacional; Modelagem Geométrica; Matemática Discreta.

Abstract

Lewiner, Thomas; Lopes, Hélio Côrtes Vieira; Santos, Geovan Tavares dos. **Constructing discrete Morse functions**. Rio de Janeiro, 2002. 91p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Morse theory has been considered a powerful tool in its applications to computational topology, computer graphics and geometric modeling. It was originally formulated for smooth manifolds. Recently, Robin Forman formulated a version of this theory for discrete structures such as cell complexes. It opens up several categories of interesting objects (particularly meshes) to applications of Morse theory.

Once a Morse function has been defined on a manifold, then information about its topology can be deduced from its critical elements. The purpose of this work is to design an algorithm to define optimal discrete Morse functions on general cell complex, where optimality entails having the least number of critical elements. This problem is proven here to be MAX-SNP hard. However, we provide a linear algorithm that, for the case of 2-manifolds, always reaches optimality.

Moreover, we proved various results on the structure of a discrete Morse function. In particular, we provide an equivalent representation by hyperforests. From this point of view, we designed a construction of discrete Morse functions for general cell complexes of arbitrary finite dimension. The resulting algorithm is quadratic in time and, although not guaranteed to be optimal, gives optimal answers in most of the practical cases.

Keywords

Morse Theory; Forman Theory; Computational Topology; Computational Geometry; Solid Modeling; Discrete Mathematics.

Sumário

Prefácio	13
1 Introdução	15
1.1 Motivações e aplicações	15
1.2 Resultados	17
1.3 Organização da dissertação	18
2 Preliminares	19
2.1 Estruturas discretas	19
2.2 Conceitos básicos de topologia algébrica	24
3 Teoria de Morse discreta de Forman	33
3.1 Campo gradiente discreto	33
3.2 Funções de Morse discretas	38
3.3 Propriedades topológicas	41
3.4 Otimalidade nas funções de Morse discretas	44
4 Funções de Morse discretas ótimas em superfícies	47
4.1 Condições de otimalidade	47
4.2 Algoritmo	49
4.3 Primeira extensão às não-variedades	52
4.4 Prova e análise	53
4.5 Adicionando informações geométricas	54
4.6 Resultados	55
5 Estrutura de uma função de Morse discreta	57
5.1 Camadas de um campo de vetor combinatório	57
5.2 Funções de Morse discretas, casamentos acíclicos e hiperflorestas	60
5.3 Números de Morse discretos como invariantes topológicos para 3-variedades	66
6 Construção de funções de Morse discretas	68
6.1 Estrutura de dados	68
6.2 Algoritmos para a construir funções Morse discretas a partir de uma hiperflorestas	69
6.3 Considerações sobre otimalidade	72
6.4 Diferentes heurísticas	74
6.5 Resultados	79
7 Conclusão e trabalhos futuros	88
Referências Bibliográficas	89

Lista de figuras

2.1	Um modelo de um cilindro com 8 quadrados.	19
2.2	O grafo 0/1 de um cilindro com 8 quadrados (figura 2.1): os nós representam vértices, e as linhas representam arestas.	20
2.3	Uma árvore extraída do grafo da figura 2.2.	20
2.4	Uma representação bipartida do grafo da figura 2.2.	21
2.5	Um casamento no grafo da figura 2.4.	21
2.6	O grafo dual da figura 2.1.	22
2.7	Uma árvore extraída do grafo da figura 2.6.	22
2.8	Um exemplo de hipergrafo.	23
2.9	O hipergrafo dual do grafo da figura 2.2.	23
2.10	Um toro triangulado.	26
2.11	Uma construção de um toro com 4 células.	26
2.12	O diagrama de Hasse de um complexo celular simples.	27
2.13	O diagrama de Hasse de um toro não-PL.	27
2.14	Um exemplo de não-variedade: aresta não regular.	28
2.15	Um outro exemplo de não-variedade: a vizinhança dos pontos da aresta pendente é homeomorfo a \mathbb{R} .	28
2.16	Uma parte de uma triangulação e do seu dual.	29
2.17	Os ciclos num complexo celular de dimensão 1 são circuitos.	30
2.18	Os ciclos de um mapa são em torno dos mares (buracos), onde as terras são faces e as fronteiras são arestas.	30
2.19	Um colapso elementar.	32
2.20	O colapso de um tetraedro em um ponto.	32
3.1	Um exemplo de campo de vetor combinatório.	34
3.2	O V -caminho fechado do campo de vetor combinatório da figura 3.1 (em vermelho).	34
3.3	Exemplos de campos gradiente discretos.	35
3.4	Diagrama de Hasse dos exemplos da figura 3.3.	35
3.5	O diagrama de Hasse do campo de vetor combinatório da figura 3.1, e o circuito do seu V -caminho fechado (em vermelho).	36
3.6	Cancelando células críticas	36
3.7	Exemplos de funções de Morse discretas	39
3.8	Um campo gradiente discreto e a correspondente função de Morse discreta.	40
3.9	Refinamento de um campo gradiente discreto: todos os vértices, as arestas e as faces novas pertencem a alguma par.	40
3.10	Os diagramas de Hasse de um campo gradiente discreto ótimo num segmento e num triângulo.	41
3.11	O diagrama de Hasse do produto cartesiano dos campos gradiente discretos da figura 3.10.	41
3.12	Etapas do colapso de um complexo celular simples.	42
3.13	As etapas críticas da extensão de um toro.	44
3.14	O número de casamentos no diagrama de Hasse é finito.	45
3.15	Um “gadget” usado na demonstração de Egecioğlu e Gonzalez.	46

4.1	Exemplos de superfícies sem bordo.	47
4.2	Exemplos de superfícies com um bordo não vazio.	48
4.3	Os códigos do EdgeBreaker sobre um toro triangulado.	50
4.4	A árvore geradora T resultante e o seu grafo complementar G .	50
4.5	Laço adicionado na etapa 2 à árvore geradora T da figura 2.1 (nenhuma célula crítica)	50
4.6	A função de Morse discreta na árvore geradora T da figura 4.3 (1 face crítica).	50
4.7	O grafo complementar G do cilindro e a sua função de Morse discreta (1 vértice crítico e de 1 aresta crítica).	51
4.8	A função de Morse discreta no grafo complementar G da figura 4.3 (1 vértice crítico e 2 arestas críticas).	51
4.9	Uma não-variedade com uma aresta pendente (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.	52
4.10	Uma não-variedade com um vértice de canto (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.	52
4.11	Uma não-variedade com uma aresta não-regular (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.	52
4.12	Dois campos gradientes discretos numa esfera, com ambos 2 células críticas.	55
4.13	Tempo de execução em relação ao número de células do complexo celular K : a complexidade é linear.	55
4.14	Razão tempo de execução / tamanho de K em relação ao número de células críticas de K : independência.	55
4.15	Uma função de Morse discreta ótima num modelo VRML importado. Cada dente é uma componente conexa diferente (aqui homeomorfa a uma esfera), e tem duas células críticas. Assim, há 65 vértices críticos e 65 faces críticas (64 dentes + 1 para o corpo).	56
4.16	Um campo gradiente discreto ótimo num modelo do fusca com 2 componentes conexas.	56
4.17	Um campo gradiente discreto ótimo com o grafo complementar U .	56
5.1	O diagrama de Hasse do cubo duplo da figura 4.11.	58
5.2	O hipergrafo da camada 2/1 da figura 5.1.	58
5.3	A camada reduzida 2/1 do cubo duplo (nós azuis).	59
5.4	O hipergrafo da camada reduzida 2/1 da figura 5.3.	59
5.5	Um hipercircuito (em vermelho).	61
5.6	Uma parte da hiperfloresta 2/1 resultante do processamento de uma 2-esfera sólida.	61
5.7	A hiperfloresta 2/1 resultante do processamento de um modelo de $S^2 \times S^1$.	61
5.8	O diagrama de Hasse de um campo gradiente discreto em um modelo volumétrico de 4 cubos.	63
5.9	A 1/0-hiperfloresta do campo gradiente discreto da figura 5.8.	63
5.10	Um toro e uma garrafa de Klein com ambos um campo gradiente discreto ótimo: 1 vértice crítico, 2 arestas críticas, 1 face crítica.	66
6.1	Uma 1/0-hiperfloresta de uma pilha de $3 \times 3 \times 1$ cubos.	69
6.2	O hipergrafo das componentes regulares da figura 6.1.	69

6.3	Uma parte de uma hiperfloresta $2/1$ de $S^2 \times S^1$.	70
6.4	Orientação do hipergrafo da figura 6.3.	70
6.5	A distância em linhas num pequeno exemplo de árvore.	71
6.6	Um espaço contrátil e os complexos celulares complementares C_1 e C_2 de duas hiperflorestas HF_1 e HF_2 definidas nele.	73
6.7	Substituindo uma hiperlinha não-regular por um laço.	74
6.8	Detalhe da inserção de uma hiperlinha na hiperfloresta dual surgindo de um modelo de toro sólido.	74
6.9	Etapas do algoritmo numa parte da hiperfloresta $2/1$ de $S^2 \times S^1$.	76
6.10	Simplificações sucessivas de um hipergrafo (3 por a etapa).	77
6.11	Campos gradientes discretos com restrições geométricas.	78

Lista de tabelas

6.1	Número de células redundantes para cada método, no painel dos modelos das tabelas 6.2 e 6.3. Morse Robusto: 56.	79
6.2	Resultados nos modelos de Hachimori [15].	80
6.3	Resultados em modelos volumétricos.	81
6.4	bing. Células: (480,2511,3586,1554). Morse Robusto: (1,2,2,0).	82
6.5	bjorner. Células: (6,15,11). Morse Robusto: (1,0,1).	82
6.6	c-ns. Células: (12,37,26). Morse Robusto: (1,2,2).	82
6.7	c-ns2. Células: (13,39,27). Morse Robusto: (1,2,2).	82
6.8	c-ns3. Células: (10,31,22). Morse Robusto: (1,1,1).	82
6.9	dunce hat. Células: (8,24,17). Morse Robusto: (1,1,1).	83
6.10	gruenbaum. Células: (14,54,70,29). Morse Robusto: (1,0,0,0).	83
6.11	knot. Células: (380,1929,2722,1172). Morse Robusto: (1,1,1,0).	83
6.12	lockeberg. Células: (12,60,96,48). Morse Robusto: (1,0,0,1).	83
6.13	mani-walkup-C. Células: (20,126,212,106). Morse Robusto: (1,0,0,1).	83
6.14	mani-walkup-D. Células: (16,106,180,90). Morse Robusto: (1,0,0,1).	84
6.15	nonextend. Células: (7,19,13). Morse Robusto: (1,1,1).	84
6.16	poincare. Células: (16,106,180,90). Morse Robusto: (1,2,2,1).	84
6.17	projective. Células: (6,15,10). Morse Robusto: (1,1,1).	84
6.18	rudin. Células: (14,66,94,41). Morse Robusto: (1,0,0,0).	84
6.19	simon. Células: (7,20,14). Morse Robusto: (1,1,1).	85
6.20	ziegler. Células: (10,38,50,21). Morse Robusto: (1,0,0,0).	85
6.21	Pilha de Cubos. Células: (572,1477,1266,360). Morse Robusto: (1,0,0,0).	85
6.22	s2xs1. Células: (192,588,612,216). Morse Robusto: (1,3,4,2).	86
6.23	s3. Células: (162,522,576,216). Morse Robusto: (1,1,1,1).	86
6.24	solid 2sphere. Células: (64,144,108,26). Morse Robusto: (1,0,1,0).	87
6.25	Furch. Células: (600,1580,1350,369). Morse Robusto: (1,1,1,0).	87

Un abîme effrayant, une profusion de questions de toutes sortes où ma responsabilité était en jeu se présentaient à moi. Et la plus importante: qu'est-ce qui doit remplacer l'objet manquant? Le danger d'un art ornemental m'apparaissait clairement, la morte existence illusoire des formes stylisées ne pouvait que me rebuter.

C'est seulement après de nombreuses années d'un travail patient, d'une réflexion intense, d'essais nombreux et prudents où je développais toujours plus la capacité de vivre purement, abstraction des formes picturales et de m'absorber toujours plus profondément dans ces profondeurs insondables, que j'arrivais à ces formes picturales avec lesquelles je travaille aujourd'hui et qui, comme je l'espère et le veux, se développeront bien plus encore.

Il a fallu beaucoup de temps avant que cette question: 'qu'est ce qui doit remplacer l'objet ?' trouve en moi une véritable réponse. Souvent je me retourne vers mon passé et je suis désespéré de voir combien de temps il m'a fallu pour arriver à cette solution.

Wassily Kandinsky, *Regards sur le passé.*

Prefácio

A motivação inicial deste trabalho foi a compressão de malhas 3D. Quando começou, meu professor Hélio Lopes tinha provado uma extensão do esquema da compressão EdgeBreaker para superfícies orientáveis com alças. Ele fez o que eu sempre admirei: juntar dois campos de pesquisa (computação gráfica e topologia algébrica) a fim de melhorar ambos. A mistura da álgebra com a topologia sempre me atraiu pela mesma razão, embora eu ainda não tenha tido nenhuma oportunidade de aprendê-las seriamente. Misturar topologia com computação gráfica tem agora suas *lettres de noblesse*: a nova área da topologia computacional. A necessidade dessa disciplina parece óbvia para mim. Em primeiro lugar, porque a topologia e a geometria sempre tiveram uma forte relação na matemática, e muitas de suas provas usam freqüentemente alguma análise topológica. Em segundo lugar, porque a topologia computacional caracteriza-se por ser uma boa maneira de obter uma programação elegante. Além disso, ela ajuda a melhorar os algoritmos, estendendo-os às mais diversas aplicações. Conseqüentemente, eu estava ansioso para conhecer mais essa disciplina. Daí meu professor me propôs um problema “simples”.

O meu outro professor, Geovan Tavares iniciou uma tradição no laboratório MatMídia de se estudar aplicações da teoria de Morse. Esta ferramenta foi usada para provar teoremas matemáticos importantes (como a conjectura do Poincaré em dimensão maior do que 4) e em computação gráfica (para a geração e a compressão de malhas 3D). Entretanto, esta teoria foi formulada para variedades diferenciáveis, o que requer mais cuidado antes de implementá-la rigorosamente. A aproximação de propriedades contínuas por estruturas discretas pode ser feita eficientemente na maioria dos casos para aplicações específicas. Porém, as maiores aplicações discretas emergiram geralmente das teorias discretas. E sob esse ponto de vista, duas geometrias diferenciais combinatorias complementares surgiram. Uma que emergiu da computação gráfica, liderada por Mathieu Desbrun [25]. A outra, fundada na topologia e na combinatoria, estabelecida por Robin Forman [12]. O problema “simples” que o meu professor me passou era o de construir uma função de Morse discreta seguindo a definição do Forman.

O problema não era realmente óbvio, e um trabalho de Ömer Egecioğlu

[10] pareceu ter provado que era mais difícil do que NP-difícil. Esta impressão se tornou verdadeira alguns meses depois.

Primeiramente, minha pesquisa foi orientada em aplicações à compressão de malhas 3D, e eu busquei nos algoritmos existentes algumas idéias. Esquemas de compressão baseados em cirurgia topológica [32] nós ofereceram uma pista atrativa, e me permitiram rapidamente formular um pequeno algoritmo. Este algoritmo gerou muitas dificuldades de implementação, mas funcionava bem em modelos pequenos. Entretanto, falhou nos objetos que não eram variedades, e teve resultados não muito bons para superfícies não homeomorfas a uma esfera. Tentando entender a dificuldade, eu voltei para as minhas notas da Ecole Polytechnique. Havia lá uma demonstração muito simples da característica de Euler para esferas, baseado em árvores geradores do grafo dual e do seu complemento. A idéia principal já era óbvia: definir funções de Morse discretas em florestas, excluindo os circuitos críticos.

Ao longo deste trabalho, eu descobri que esta idéia era na verdade a estrutura intrínseca de uma função discreta de Morse. Uma observação que não aparecia nos trabalhos de Forman. A razão disso não foi óbvia. A representação geral do dual de um complexo celular é, no general, muito mais complicado do que um grafo. Observando na literatura, esta estrutura foi definida como um *hipergrafo*. Não obstante, não havia uma extensão da noção de floresta para hipergrafos. Precisei de bastante tempo antes de obter uma formulação elegante para esta estrutura, que eu chamei de hiperfloresta. Uma vez que a matemática estava clara, o algoritmo surgiu diretamente. Eu sabia que o problema era pior do que NP-difícil, mas eu provei que o primeiro algoritmo era ótimo para 2-variedades, e os resultados que eu obtive no caso geral parecem muito perto do ótimo.

Meus professores realçaram a computação gráfica com seus conhecimentos de topologia. Este trabalho tem talvez uma aproximação complementar. Dos problemas computacionais levantaram-se algumas perguntas matemáticas. Eu estou ainda surpreendido pela rapidez com a qual foram encontrados problemas em aberto da matemática, tais como a conjectura de Poincaré. E, devida a existência desses problemas computacionais, algumas respostas a problemas teóricos foram dadas.

1

Introdução

1.1

Motivações e aplicações

A **geometria computacional** [4] deu uma importante contribuição para as áreas da computação gráfica, da robótica, e CADs. Ela estuda principalmente os problemas discretos que envolvem conjunto de pontos, polígonos e poliedros, e usa técnicas combinatórias para resolvê-las, preocupando-se com a exatidão, a eficiência, e a robustez. Dentre as suas aplicações pode citar a visualização de informações, computação científica avançada, algoritmos e métodos computacionais.

Necessidade de considerações topológicas. A pesquisa em geometria computacional já criou conexões intrincadas com a geometria combinatória, que gerou um grande benefício a ambos os campos. Hoje em dia, alguns dos mais difíceis e menos compreendidos problemas em geometria computacional envolvem a topologia: quando a ênfase se concentra na conectividade, na continuidade, em espaços e em funções. Isto não significa que as noções puramente geométricas estão ausentes nesses problemas, mas sim que ao focalizar nas propriedades topológicas (i.e. separando propriedades globais das formas dos atributos geométricos locais) é possível obter resultados melhores e mais elegantes. Muitos algoritmos simples falham em singularidades topológicas. Tentar prever esses tipos de problemas por métodos geométricos requer cálculos caros de primitivas geométricas, perdendo assim a robustez. Por exemplo, famosos esquemas de compressão de malhas 3D como o EdgeBreaker foram bem melhorados, com um baixo custo computacional, por considerações topológicas [21].

Topologia computacional e suas aplicações. A nova disciplina da topologia computacional [33] trata de tipos de problemas ainda mais diversificados. Dey e outros [7] introduziram seis áreas de aplicações: processamento de imagem, cartografia, computação gráfica, modelagem geométrica, geração de malhas e modelagem molecular. O primeiro congresso de topologia computacional [3] identificou outras quatro áreas de aplicações: aquisição de forma,

representação de formas, simulação físico e espaços de configurações. Delimitaram esta nova área para englobar perguntas algorítmicas sobre topologia (por exemplo, reconhecimento de nós) e de problemas topológicos nos algoritmos (por exemplo, se uma construção discreta preserva a topologia do domínio contínuo subjacente).

Escopo deste trabalho. Este trabalho visa a ser uma ferramenta útil em aplicações da topologia computacional, incluindo geração de malhas, morphing, extração de características, compressão de dados e codificação de superfície. As áreas de aplicações podem ser computação gráfica, modelagem geométrica, bio-informática e medicina computacional. Com esse objetivo, será incluída uma teoria recente da topologia combinatória, chamada *teoria discreta de Morse* [12], no painel das ferramentas da topologia computacional.

A **teoria de Morse** [26] é uma ferramenta fundamental para investigar a topologia das variedades diferenciáveis. Particularmente para computação gráfica, muitas aplicações foram deduzidas [9, 16, 20, 29] para sua versão diferenciável. Morse provou que a topologia de uma variedade é relacionada aos pontos críticos de uma função real diferenciável definida nela. O exemplo o mais simples deste relacionamento é o fato que se a variedade for compacta, então qualquer função contínua definida nela deve ter um máximo e um mínimo. A teoria de Morse fornece um refinamento significativo desta observação.

Teoria discreta de Morse de Forman. Os trabalhos de Forman [11, 12] na teoria de Morse estenderam diversos aspectos desta ferramenta fundamental às estruturas discretas. Seu aspecto combinatório permite a computação inteiramente independente de uma realização geométrica: os algoritmos que nós projetamos não requerem nenhum cálculo de coordenadas ou em ponto flutuante, e os confinantes geométricos podem ser aplicados independentemente. Forman provou diversos resultados e muitas aplicações da sua teoria [13, 14].

1.2

Resultados

Uma vez que uma função de Morse é definida em uma variedade, informações sobre sua topologia podem ser em parte deduzidas através de seus pontos críticos (i.e. os pontos onde o gradiente se anula). Similarmente ao caso diferencial, Forman provou que a topologia de um CW-complexo pode, em parte, ser descrita através das células críticas de uma função de Morse discreta definida nele.

Conseqüentemente, o primeiro passo para aplicar diretamente esta teoria é construir uma função de Morse discreta. A informação topológica será tanto mais concisa quanto a quantidade de células críticas da função de Morse discreta. Assim, definimos que uma função de Morse é *ótima* se ela tiver o menor número possível de células críticas. A contribuição principal deste trabalho é construir tais funções.

Algoritmo para funções de Morse discretas ótimas. Fornecemos no capítulo 4 um algoritmo linear para construir funções de Morse discretas em complexos celulares de dimensão 2. Este algoritmo é provado ser ótimo para variedades (de dimensão 2) na seção 4.4. No capítulo 6, ele foi estendido para construir funções de Morse discretas e campos gradientes discretos em complexos celulares gerais de dimensão arbitrária. Esta extensão é quadrática no tempo de execução. Não podemos garantir o resultado ótimo, mas observamos que ele gera respostas ótimas na maioria dos casos (cf seção 6.5).

Resultados teóricos. Do ponto de vista teórico, provamos que o problema de encontrar uma função de Morse discreta ótima é MAX-SNP difícil (teorema 3.19). No caminho, provamos também que o problema de encontrar uma hiperfloresta máxima num hipergrafo é também MAX-SNP difícil (seção 5.2.3). Na exposição da teoria de Morse discreta, fornecemos uma construção de função de Morse discretas ótimas para o produto cartesiano de complexos celulares, dada uma função de Morse discreta ótima em cada um dos seus fatores (cf seção 3.2.3). No capítulo 5 desenvolvemos uma representação de funções de Morse discretas por hipergrafos. Introduzimos a noção de hiperfloresta (seção 5.2.1) e demonstramos a equivalência entre campos gradiente discretos e hiperflorestas no teorema 5.8. Definimos o equivalente de uma célula crítica para hiperflorestas na proposição 5.10. A otimalidade de uma hiperfloresta é discutida na seção 6.3. Provamos, finalmente, para o caso das variedades de dimensão 3, que os números de Morse discretos são invariantes topológicos relacionados ao tipo de homotopia simples (teorema 5.14).

1.3

Organização da dissertação

Este trabalho é organizado da seguinte forma. Preliminares topológicos e grafos, particularmente hipergrafos e o diagrama de Hasse, são expostas no capítulo 2. A teoria de Morse discreta de Forman é introduzida no capítulo 3. Está incluída nesse capítulo uma prova da complexidade de encontrar uma função de Morse discreta ótima. O capítulo 4 dá uma construção linear de funções de Morse discreta em complexos celulares de dimensão 2, tal como exposta em [18]. Esta construção é ótima no caso de variedade de dimensão 2. O capítulo 5 discute a maioria dos resultados teóricos deste trabalho, particularmente as noções de hiperfloresta e seus elementos críticos, e a prova da invariância topológica de números de Morse discretos para 3-variedades. Finalmente, damos uma construção de funções de Morse discreta para complexos celulares de dimensão arbitrária no capítulo 6. É uma apresentação completa do algoritmo introduzido, em parte, em [19].

2 Preliminares

2.1 Estruturas discretas

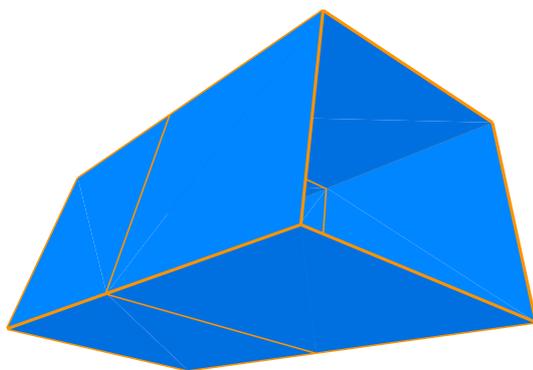


Figura 2.1: Um modelo de um cilindro com 8 quadrados.

A teoria de Morse foi originalmente formulada para estruturas contínuas (variedades diferenciáveis). Implementar ferramentas relacionadas a esta teoria envolve aproximação dessas para estruturas mais diretamente computáveis. Uma das vantagens principais da teoria de Forman é que ela é formulada diretamente para estruturas discretas como complexos celulares (cf figura 2.1). Uma introdução completa para estruturas de grafos e de hipergrafos pode ser encontrada em [2].

2.1.1 Grafos

As estruturas discretas mais simples usadas na computação são grafos simples (cf figura 2.2). Todos os grafos deste trabalho foram desenhados com os softwares dot [34] e neato [35] de GraphViz.

Definição 2.1 (Grafo simples) *Um grafo simples é um par (N, L) , onde N é um conjunto de objetos chamados de nós, e L é um conjunto de pares de nós. Os elementos de L serão chamados de linhas.*

Dizemos que uma linha *liga* seus dois nós incidentes, e que estes nós são *adjacentes*. Um grafo pode ser orientado distinguindo para cada uma das suas linhas um dos seus dois nós como sendo o seu *nó fonte*.

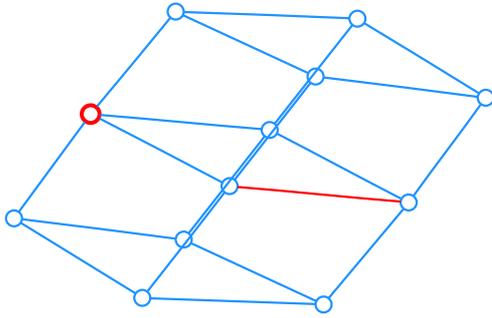


Figura 2.2: O grafo 0/1 de um cilindro com 8 quadrados (figura 2.1): os nós representam vértices, e as linhas representam arestas.

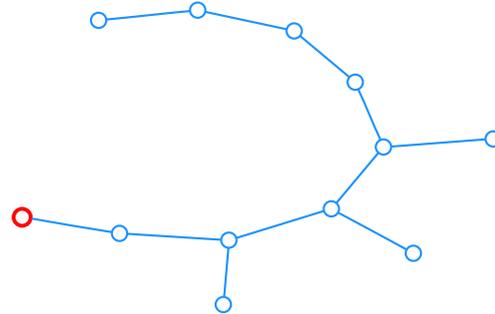


Figura 2.3: Uma árvore extraída do grafo da figura 2.2.

Um *caminho* dentro de um grafo é uma seqüência de linhas duas a duas distintas e sucessivamente adjacentes. Tal caminho é um *circuito* se o primeiro e o último nó da seqüência forem idênticos. Um *caminho orientado* num grafo orientado é um caminho onde cada linha entre dois nós consecutivos possui o primeiro nó como fonte. Um grafo sem circuito é chamado de *floresta*, i.e. a união de árvores (cf figura 2.3):

Definição 2.2 (Árvore) *Um grafo simples é uma árvore se for conexo e não contiver nenhum circuito.*

Uma *folha* numa árvore é um nó incidente a no máximo uma linha. Um grafo (N', L') é um *subgrafo* de um grafo (N, L) (ou um grafo *extraído* dele) se $N' \subset N$ e $L' \subset L$. Esse subgrafo é um grafo *gerador* se $N' = N$.

2.1.2

Casamentos e grafos bipartido

Os grafos bipartidos tornaram-se famosos devido aos problemas casamento [22]:

Definição 2.3 (Casamento) *Um casamento em um grafo é um subconjunto das suas linhas de tal forma que nenhum par de linhas possui um vértice em comum.*

Por exemplo, emparelhar meninos e meninas na escola podia ser representado por um casamento em um grafo bipartido: os meninos são uma classe

dos nós, as meninas são outra, e a afinidade entre um menino e uma menina é representada por uma linha. [2] dá uma introdução completa aos grafos bipartidos. A figura 2.5 mostra um exemplo de um casamento (parcial) no grafo 2.4.

Definição 2.4 (Grafo bipartido) *Um grafo simples é um grafo bipartido quando seu conjunto de nós pode ser partido em dois conjuntos distintos, chamados aqui de classes \mathbf{N} e \mathbf{L} , tais que nenhum par de nós dentro do mesmo conjunto são adjacentes.*

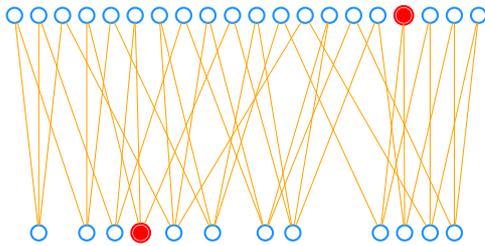


Figura 2.4: Uma representação bipartida do grafo da figura 2.2.

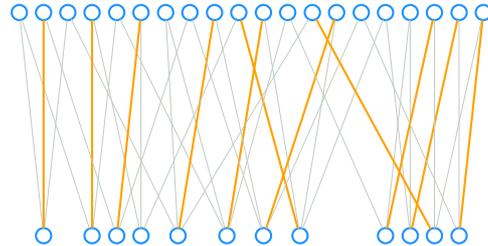


Figura 2.5: Um casamento no grafo da figura 2.4.

2.1.3 Pseudografos

Nós veremos na seção 2.2.4 que o grafo dual de uma variedade sem bordo é um grafo simples. Entretanto, se a variedade tiver um bordo, as linhas representando as $(n-1)$ -células do bordo seriam incidentes a somente um nó. Por exemplo, figura 2.6 mostra o grafo dual do cilindro com 8 quadrados (figura 2.1), e figura 2.7 mostra a (pseudo-) árvore extraída dela. Isto não caberia na definição 2.1, mas na seguinte:

Definição 2.5 (Pseudografo) *Um pseudografo é um par (N, L) , onde N é um conjunto de objetos chamados de nós, e L é uma família de subconjuntos de N , cada um com 1 ou 2 nós.*

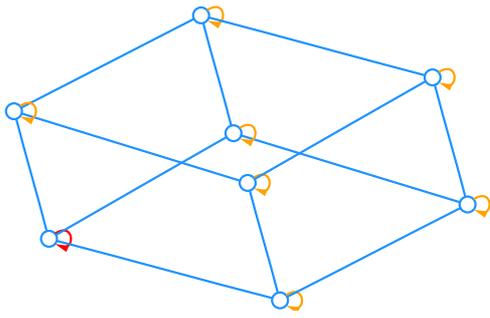


Figura 2.6: O grafo dual da figura 2.1.

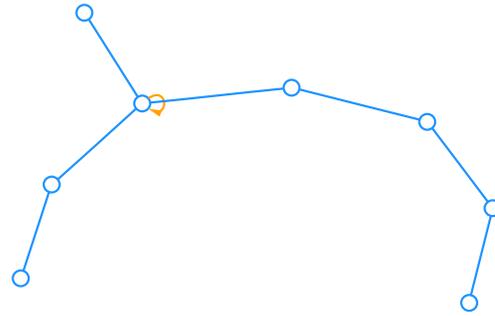


Figura 2.7: Uma árvore extraída do grafo da figura 2.6.

2.1.4 Hipergrafos simplesmente orientados

Ao considerar o grafo dual de um complexo celular que não seja uma variedade, podem existir linhas que ligam mais de dois nós (cf figura 2.8). Isto não caberia na definição 2.5, mas na seguinte:

Definição 2.6 (Hipergrafo) Um hipergrafo é um par (N, L) , onde N é um conjunto de objetos chamados de nós, e L é uma família de famílias de N . Os elementos de L são chamados *hiperlinhas*.

Classificaremos as hiperlinhas não vazias como *regulares* (ou simplesmente *linha*), elas forem incidentes a dois nós distintos como nos grafos simples, como *laços* quando forem incidentes à somente um nó, ou como *não-regulares* quando forem incidentes à três nós ou mais, ou varias vezes a um nó. Podemos extrair um grafo simples de um hipergrafo considerando suas *componentes regulares*:

Definição 2.7 (Componentes regulares) As componentes regulares de um hipergrafo (N, L) são as componentes conexas do grafo simples (N, R) , onde R é o conjunto das hiperlinhas regulares de (N, L) .

Daremos a um hipergrafo uma orientação simples distinguindo um nó de cada hiperlinha como sendo o seu *nó fonte*.

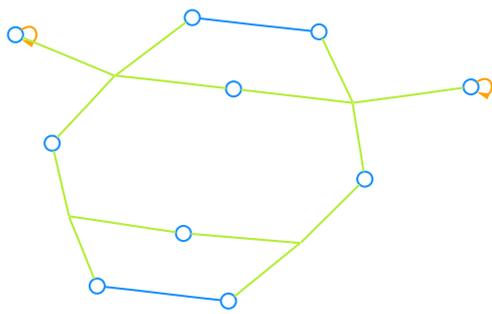


Figura 2.8: Um exemplo de hipergrafo.

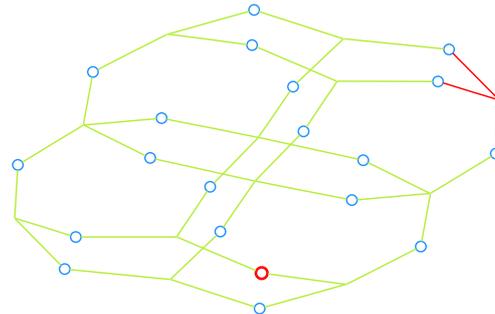


Figura 2.9: O hipergrafo dual do grafo da figura 2.2.

2.1.5

Dual de um hipergrafo

O dual de um hipergrafo [2] é obtido lendo os seus nós como hiperlinhas e as suas hiperlinhas como nós. Por exemplo, a figura 2.9 mostra o hipergrafo dual do grafo vértice/aresta do cilindro com 8 quadrados (figura 2.2).

Definição 2.8 (Dual de um hipergrafo) *O dual $\mathcal{D}(H)$ de um hipergrafo H é um hipergrafo cujos nós são as hiperlinhas de H , e cujas hiperlinhas ligam as hiperlinhas de H que compartilham um nó, são laços para cada folha de H ou vazias para cada nó isolado.*

Se cada um dos nós de um hipergrafo orientado H estiver a fonte de uma hiperlinha no máximo, então o dual $\mathcal{D}(H)$ de H pode ser parcialmente orientado como segue: se um nó n for a fonte de uma hiperlinha l em H , o nó que representa l em $\mathcal{D}(H)$ será a fonte da hiperlinha que representa n . Observamos que a operação dual é uma involução: $\mathcal{D} \circ \mathcal{D}(H) = H$.

2.1.6

Representação bipartida de um hipergrafo

Um hipergrafo pode ser representado por um grafo bipartido [2]. Por exemplo, figura 2.4 dá uma representação do hipergrafo da figura 2.2. Isto dá uma representação simples (porém cara) de hipergrafos:

Definição 2.9 (Representação bipartida de um hipergrafo) *O grafo bipartido $\mathcal{B}(H)$ de um hipergrafo H é o grafo simples cujos nós \mathbf{N} e \mathbf{L} são os nós e as linhas de H respectivamente. Para cada hiperlinha l de H , há $\#l$ linhas em $\mathcal{B}(H)$ que ligam o nó que representa l em $\mathcal{B}(H)$ a cada representante, em $\mathcal{B}(H)$, do nó de H incidente a l .*

Quando H é orientado, $\mathcal{B}(H)$ estará orientado da seguinte maneira:

Se um nó n de H for a fonte de uma hiperlinha l , o representante de l será o nó fonte da linha de $\mathcal{B}(H)$ que liga n a l .

Se um nó n de H não for a fonte de uma hiperlinha l incidente a ele, então o seu representante em $\mathcal{B}(H)$ é o nó fonte da linha que o liga ao representante de l em $\mathcal{B}(H)$.

2.1.7

Representações de um grafo bipartido por hipergrafos

A operação de representar um grafo bipartido por um hipergrafo pode ser invertida. Dependendo da classe de nós se transforma nas linhas do hipergrafo, podemos obter um hipergrafo ou seu dual. Por exemplo, figura 2.4 pode ser representada por ambas as figuras 2.2 e 2.9. O grafo bipartido não é suposto ter uma orientação consistente no caso geral. Conseqüentemente, o hipergrafo que representa um grafo bipartido nem sempre será orientado.

Definição 2.10 (hipergrafos de um grafo bipartido) *O grafo bipartido B admite duas representações por hipergrafos: $\mathcal{B}^{-1}(B)$ e o seu dual $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{-1}(B))$. Os nós de $\mathcal{B}^{-1}(B)$ são os nós da classe \mathbf{N} de B . Para cada nó l da classe \mathbf{L} , há um hiperlinha de $\mathcal{B}^{-1}(B)$ ligando todos os nós adjacentes a l .*

2.2

Conceitos básicos de topologia algébrica

A intuição por trás da topologia é o estudo das propriedades das formas que não mudam sob deformações. Algumas podem ser expressas algebricamente por estruturas definidas sobre espaços topológicos. Esta subárea da topologia é chamada de *topologia algébrica*.

2.2.1

Elementos de topologia geral

Uma maneira natural de investigar o espaço no qual estamos vivendo consiste em analisar o que se encontra em torno de nós. Temos informações sobre o nosso espaço através das vizinhanças locais. Esta é a arte da topologia, que deduz daquelas observações locais algumas propriedades globais, como diferenciar viver acima de uma esfera de viver acima de um disco.

Definição 2.11 (Espaço topológico) *Um espaço topológico é um conjunto de pontos X com uma coleção V de subconjuntos de X chamados abertos, com as seguintes restrições:*

A união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

A interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto.

O conjunto vazio e o conjunto X são conjuntos abertos.

Estes conjuntos abertos definem a noção de *vizinhança*: uma vizinhança de um ponto é qualquer conjunto aberto que o contém. Uma maneira simples de definir uma topologia sobre um conjunto consiste em usar uma métrica d nesse espaço. Nesse caso, os conjuntos abertos podem ser gerados como uniões e interseções, de bolas abertas $B_{c,r} = \{x \in X : d(x, c) < r\}$.

Neste trabalho, consideraremos *espaços de Hausdorff de dimensão finita*, i.e. os espaços limitados onde existem sempre vizinhanças disjuntas para pontos distintos. Observamos primeiramente que há um número infinito de espaços topológicos diferentes desse tipo, e a topologia visa descrevê-los e classificá-los. Entre as ferramentas para descrever tais espaços, uma das mais importantes é a noção de função contínua.

Definição 2.12 (Função contínua) *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua se a imagem inversa por f de qualquer conjunto aberto em Y é aberto em X .*

Definição 2.13 (Equivalência topológica) *Dois espaços X e Y são topologicamente equivalentes, ou homeomorfos, se existir uma função contínua inversível $f : X \rightarrow Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.*

Uma maneira ingênua para classificar espaços topológicos exigiria gerar todos eles e determinar, em seguida, quando dois espaços são topologicamente equivalentes. Infelizmente, este problema é complexo demais. Para dimensões superior a 3, isto não é calculável, ainda que pudéssemos utilizar um computador ideal [24]. Mesmo para dimensão 2, encontraremos neste trabalho alguns problemas NP-difíceis (cf seção 3.4.3).

Entretanto, existem outras ferramentas computáveis que podem descrever as propriedades topológicas [6, 8] e que também podem provar, em alguns casos, que dois espaços não são homeomorfos. Por exemplo, se não houver nenhuma *homotopia* (i.e. deformação contínua) entre dois espaços, estes não podem ser topologicamente equivalentes. A teoria de Morse [26] é a base de muitas dessas ferramentas.

2.2.2

Complexos celulares

Um complexo celular é, essencialmente, uma generalização das estruturas usadas para representar modelos da modelagem geométrica: é uma coleção consistente de células (vértices, arestas, faces...). No detalhe, triangulações de espaços topológicos ou malhas 3D são complexos celulares (cf figura 2.10). A figura 2.11 dá uma construção mínima de um toro como complexos celulares. Uma introdução completa aos complexos celulares pode ser encontrada em [23].

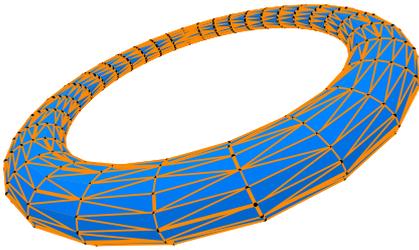


Figura 2.10: Um toro triangulado.

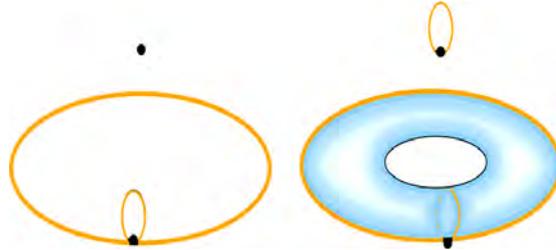


Figura 2.11: Uma construção de um toro com 4 células.

Definição 2.14 (Célula) *Uma célula $\alpha^{(p)}$ de dimensão p é um conjunto homeomorfo à p -bola aberta $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| < 1\}$.*

Quando a dimensão p da célula é óbvia, denotaremos simplesmente α em vez de $\alpha^{(p)}$.

Definição 2.15 (CW-complexo) *Um CW-complexo K é construído a partir de uma coleção de 0-células (vértices) denotada K^0 , grudando 1-células (arestas) ao longo dos seus bordos à K^0 , obtendo K^1 , e depois grudando 2-células (faces) ao longo dos seus bordos à K^1 , escrevendo K^2 para o novo espaço, e assim por diante, dando espaços K^n para cada n .*

Um CW-complexo será qualificado de finito se estiver construído a partir de um número finito de células. Neste trabalho, consideraremos apenas CW-complexos finitos (e portanto, regulares), o que permite a computação deles.

Uma p -célula $\alpha^{(p)}$ é uma face de uma q -célula $\beta^{(q)}$ ($p < q$) se $\alpha \subset \text{fechado}(\beta)$. Se $q = p + 1$ usaremos a notação $\alpha^{(p)} \prec \beta^{(q)}$, e diremos que α e β são incidentes.

2.2.3 Diagrama de Hasse de um complexo celular

Os complexos celulares e os grafos são estruturas discretas. Num certo sentido, um complexo celular é uma generalização de um grafo, porque um grafo pode ser visto como um complexo celular de dimensão 1. Não obstante, podemos também representar um complexo celular por um pseudografo, chamado o *diagrama de Hasse*.

Definição 2.16 (Diagrama de Hasse) *O diagrama de Hasse de um complexo celular K é o pseudografo orientado H :*

Cada nó de H representa uma célula de K .

As linhas de H ligam os nós que representam células incidentes de K .

O nó fonte de cada linha é aquele que possui a dimensão maior.

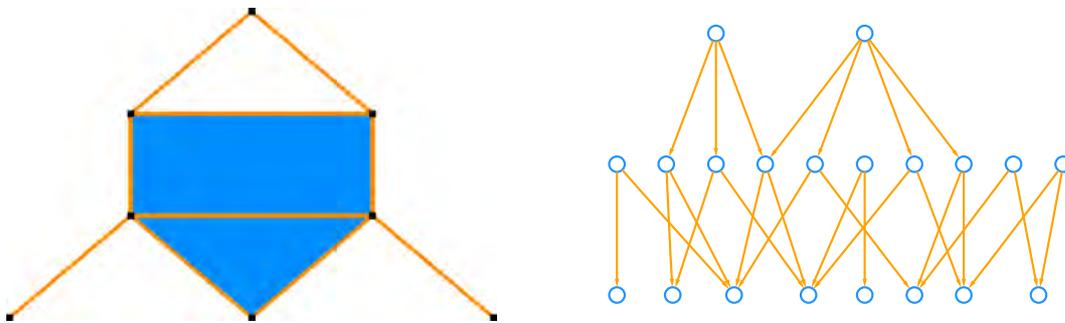


Figura 2.12: O diagrama de Hasse de um complexo celular simples.

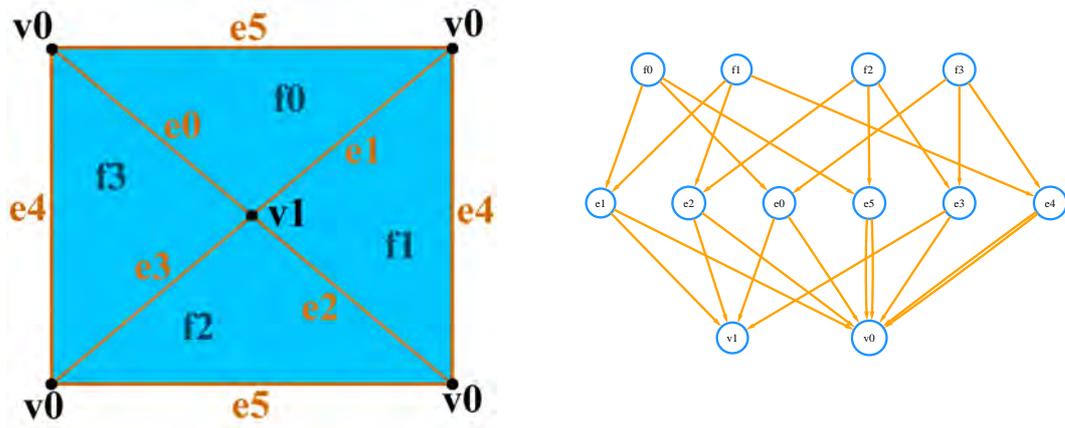


Figura 2.13: O diagrama de Hasse de um toro não-PL.

O diagrama de Hasse é geralmente desenhado com os nós ordenados por dimensão. Nas figuras 2.12 e 2.13, as faces (2-células) são alinhadas na fileira superior, as arestas (1-células) na fileira do meio e os vértices (0-células) na fileira inferior. Uma linha entre dois nós simboliza a relação de incidência entre as células correspondentes.

2.2.4 Variedades

Definição 2.17 (Variedades) *Uma n -variedade é um espaço topológico no qual cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a \mathbb{R}^n ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$.*

Neste trabalho, os únicos espaços topológicos que consideramos são complexos celulares. Então a palavra variedade significará aqui um complexo celular que tem a topologia de uma variedade. As figuras 2.14 e 2.15 são exemplos de complexos celulares que não são variedades.

O conjunto dos pontos cuja vizinhança é $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ é chamado de *bordo* da variedade. Observe que o bordo de uma n -variedade compacta é uma $(n-1)$ -variedade sem bordo. Pode-se mostrar [23] que se um complexo celular finito for uma n -variedade, então cada $(n-1)$ -célula é incidente a uma ou duas n -células.

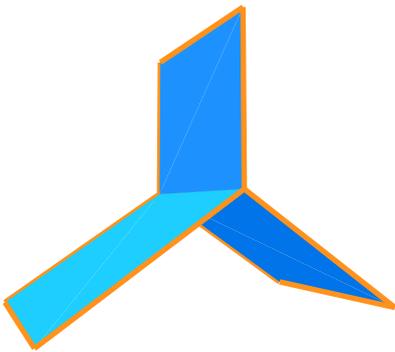


Figura 2.14: Um exemplo de não-variedade: aresta não regular.

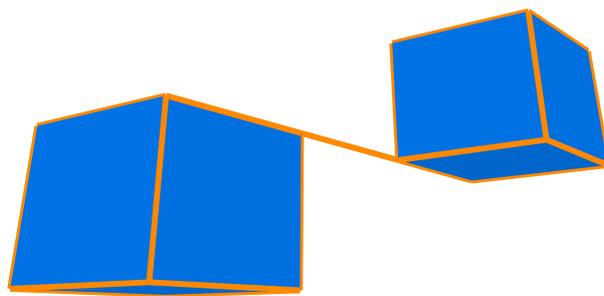


Figura 2.15: Um outro exemplo de não-variedade: a vizinhança dos pontos da aresta pendente é homeomorfo a \mathbb{R} .

O grafo dual de uma variedade é o pseudografo cujos nós são as n -células e cada $(n-1)$ -célula σ é representada por uma linha l nesse pseudografo de tal forma que: l liga os nós representantes das n -células incidentes a σ (cf figura 2.16).

2.2.5 Teoria da homologia e os números de Betti

A teoria da homologia é uma maneira eficiente de descrever algumas propriedades ligadas à conectividade dos complexos celulares, como o número de componentes conexas, de buracos, de vácuos... Os principais invariantes, os números de Betti, aparecem na teoria de Morse como o limite inferior de número de elementos críticos (cf seção 3.3.2). Introduziremos aqui a homologia

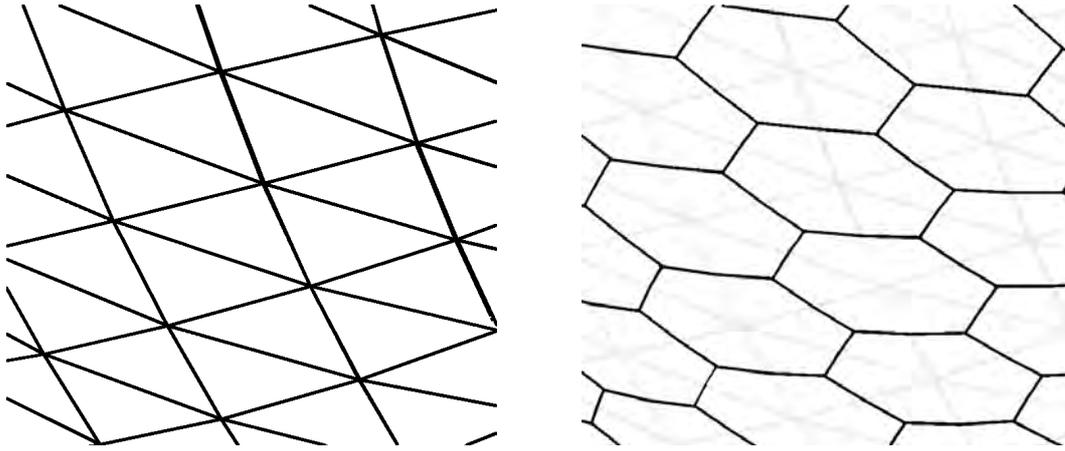


Figura 2.16: Uma parte de uma triangulação e do seu dual.

em \mathbb{Z}_2 , porque esta nos conduz a valores maiores dos números de Betti, e assim a limites mais estreitos nas desigualdades de Morse (cf seção 3.3.2).

Definição 2.18 (Cadeia) *Uma p -cadeia $c^{(p)}$ é um subconjunto de p -células de um complexo celular K :*

$$c^{(p)} = \sum_{\sigma^{(p)} \in K} c_{\sigma} \cdot \sigma^{(p)}, \quad c_{\sigma} \in \{0, 1\}.$$

Os coeficientes $c_{\sigma} \in \mathbb{Z}_2$ indicam se a célula σ pertence à cadeia c ou não. A adição de duas p -cadeias é feita célula por célula. Em outros termos, a adição de duas p -cadeias é a diferença simétrica dos dois conjuntos $c+d = (c \cup d) \setminus (c \cap d)$. O grupo C_p de todas as p -cadeias é chamado de *grupo de cadeias* de ordem p de um complexo celular dado. O conjunto vazio é o elemento nulo de C_p .

O bordo $\partial_p(\sigma^{(p)})$ de uma p -célula σ é a coleção das suas faces de dimensão $(p-1)$, que é uma $(p-1)$ -cadeia. Os *operadores de bordo* ∂_p são estendidos as p -cadeias por linearidade:

$$\partial_p \left(\sum_{\sigma^{(p)} \in K} c_{\sigma} \cdot \sigma^{(p)} \right) = \sum_{\sigma^{(p)} \in K} c_{\sigma} \cdot \partial_p(\sigma^{(p)})$$

Definição 2.19 (Ciclos e bordos) *Um p -ciclo $z^{(p)}$ é uma p -cadeia de K cujo bordo é nulo: $\partial_p(z^{(p)}) = 0$. Um p -bordo $b^{(p)}$ é o bordo de uma $(p+1)$ -cadeia: $b^{(p)} = \partial_{p+1}(c^{(p+1)})$.*

Como o operador de bordo ∂_p preserva a adição de C_p a C_{p-1} , o conjunto dos p -bordos $\text{Im} \partial_{p+1}$ e o conjunto dos p -ciclos $\ker \partial_p$ são subgrupos de C_p .

Uma propriedade essencial dos operadores de bordo é que o bordo de um bordo sempre é vazio ($\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$). Assim cada p -bordo é um p -ciclo e $\text{Im} \partial_{p+1} \subseteq \ker \partial_p$.

Definição 2.20 (Grupos de homologia) Para cada p , o grupo de homologia de ordem p , $H_p = \ker \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1}$ (com coeficientes em \mathbb{Z}_2), é obtido igualando os p -ciclos que diferem somente por um p -bordo:

$$\forall z^{(p)}, t^{(p)} \in \ker \partial_p, \quad z^{(p)} \equiv t^{(p)} \Leftrightarrow z^{(p)} - t^{(p)} \in \text{Im} \partial_{p+1}.$$

Os grupos de homologia são comutativos e finitamente gerados (pois o complexo celular é finito). Assim, podem ser escritos como $H_p = \mathbb{Z}_2^{\beta_p}$, onde β_p é chamado de *número de Betti* de ordem p com coeficientes em \mathbb{Z}_2 :

Definição 2.21 (Número de Betti) Os números de Betti são os postos dos grupos de homologia.

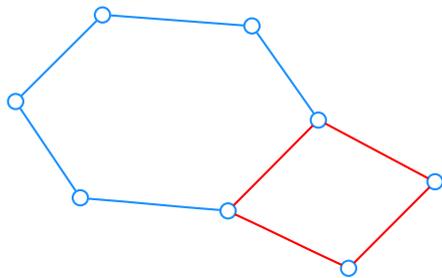


Figura 2.17: Os ciclos num complexo celular de dimensão 1 são circuitos.



Figura 2.18: Os ciclos de um mapa são em torno dos mares (buracos), onde as terras são faces e as fronteiras são arestas.

A interpretação básica para os números de Betti é uma maneira de contar os buracos num complexo celular dado: β_0 conta o número de componentes conexas, β_1 conta os túneis de uma superfície, β_2 as cavidades de um sólido. . . Os ciclos de um grafo (i.e. complexo celular de dimensão 1) são os seus circuitos independentes (cf figura 2.17). Assim, a homologia de um grafo é a sua conectividade (o número mínimo de linhas a remover para obter uma floresta). Na figura 2.18, nós podemos comparar ciclos na mesma classe de equivalência (em amarelo e no vermelho), e ciclos nulos (no verde).

2.2.6 Homotopia e homotopia simples

Se dois espaços forem topologicamente equivalentes, então eles têm grupos de homologia isomorfos. Mas a homologia não é suficiente para distinguir entre dois espaços. Uma ferramenta mais refinada para descrever a topologia

de um espaço é o seu *tipo de homotopia simples* [5]. Se dois espaços tiverem o mesmo tipo de homotopia simples, então eles possuem grupos de homologia equivalentes. Mas o contrário não é verdadeiro. Um contra-exemplo famoso é a esfera homológica de Poincaré. A pergunta se a homotopia simples é suficiente para caracterizar objetos ainda não é resolvida, e parte dela reside na conjectura do Poincaré. A homotopia simples é uma versão fraca da homotopia, mas é ligada mais diretamente à teoria de Morse discreta.

Definição 2.22 (Funções homotópicas) *Duas funções contínuas f e g de X para Y são homotópicas se existir uma função contínua H de $X \times [0, 1]$ para Y tal que $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$.*

Intuitivamente, o segundo argumento de H pode ser visto como o tempo, e então a homotopia descreve uma deformação contínua f em g .

Definição 2.23 (Tipo de homotopia) *Dois espaços topológicos X e Y tem o mesmo tipo de homotopia se existir duas funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g$ é homotópica a função identidade de X e $g \circ f$ é homotópica a função identidade de Y .*

Um espaço topológico é *contrátil* se tiver o mesmo tipo de homotopia que um ponto. Uma maneira de mostrar que dois espaços têm o mesmo tipo de homotopia é mostrar que retraem por deformação em espaços homotópicos.

Definição 2.24 (Retração por deformação) *Um subespaço Y de um espaço topológico X é uma retração por deformação dele se existir uma função contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que:*

- $\forall x \in X, H(x, 0) = x$.
- $\forall x \in X, H(x, 1) \in Y$.
- $\forall y \in Y, \forall t \in [0, 1], H(y, t) = y$.

No caso de complexos celulares, uma sucessão de *colapsos celulares* (cf figura 2.19) é uma retração por deformação:

Definição 2.25 (Colapso) *Se $\sigma^{(p)} \prec \nu^{(p-1)}$ são duas células de um complexo celular K e se σ não é uma face de nenhuma outra célula de K , então dizemos que K colapsa em $K \setminus (\sigma \cup \nu)$.*

Se L puder ser obtido a partir de K por uma sucessão de colapsos elementares, dizemos também que K *colapsa* em L e que K é uma *extensão* de L . Escreveremos $K \searrow L$. Por exemplo, figura 2.20 mostra o colapso de um tetraedro em um ponto. A relação de equivalência gerada por colapsos é chamada de equivalência de homotopia simples [5]:

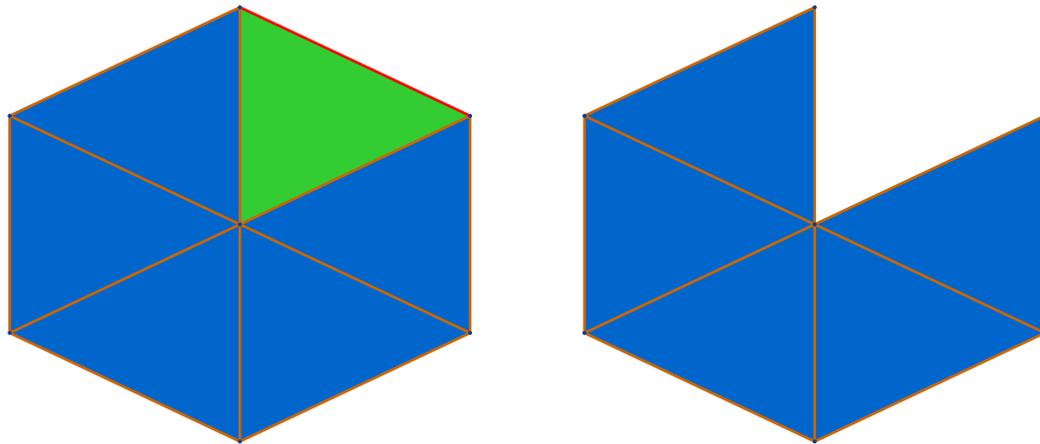


Figura 2.19: Um colapso elementar.

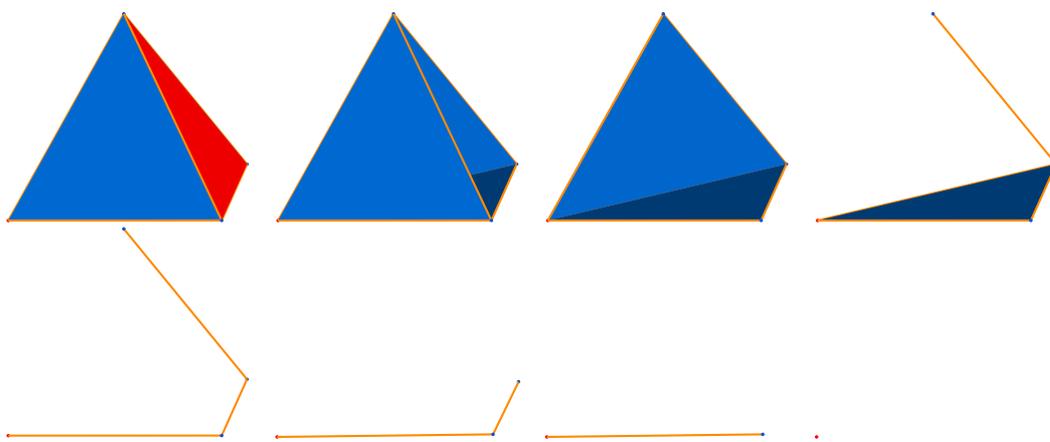


Figura 2.20: O colapso de um tetraedro em um ponto.

Definição 2.26 (Homotopia simples) *Uma homotopia simples é uma sucessão de colapsos e de extensões. Se dois complexos celulares puderem ser deduzidos um a partir do outro por uma homotopia simples, dizemos que têm o mesmo tipo de homotopia simples.*

A teoria discreta de Morse caracteriza a homotopia simples de um complexo celulares a partir dos elementos críticos de uma função de Morse discreta definida nele.

3

Teoria de Morse discreta de Forman

3.1

Campo gradiente discreto

A teoria de Forman se baseia ou em funções admissíveis em um complexo celular, chamadas funções de Morse discretas, ou equivalentemente nos seus campos gradientes. Escolhemos aqui apresentar essa teoria começando pelo segundo ponto de vista.

3.1.1

Campo de vetor combinatório

Definição 3.1 (Campo de vetor combinatório) *Um campo de vetor combinatório \mathcal{V} definido num complexo celular K é uma coleção de pares disjuntas de células incidentes $\{\alpha^{(p)} \prec \beta^{(p+1)}\}$.*

Podemos definir o campo de vetor combinatório como uma função $V : K \rightarrow K \cup \{0\}$:

$$\{\alpha^{(p)} \prec \beta^{(p+1)}\} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad V(\alpha) = \beta \text{ e } V(\beta) = 0.$$

Se uma célula σ não pertencer a nenhuma par, então $V(\sigma) = 0$.

Representaremos graficamente um campo de vetor combinatório por uma seta que tem a sua fonte na célula de dimensão menor e aponta a célula com a maior dimensão do mesmo par em \mathcal{V} , i.e. de α para $V(\alpha)$ (cf figura 3.1).

Definição 3.2 (V -caminho) *Um V -caminho é uma seqüência alternada de células $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$ respeitando:*

$$V(\alpha_i^{(p)}) = \beta_i^{(p+1)} \quad \text{e} \quad \beta_i^{(p+1)} \succ \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}.$$

Um V -caminho é não trivial e fechado se $r \geq 1$ e $\alpha_{r+1} = \alpha_0$. Por exemplo, a figura 3.2 mostra em vermelho o V -caminho fechado do campo de vetor combinatório ilustrado na figura 3.1.

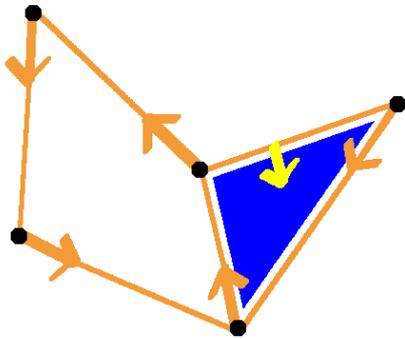


Figura 3.1: Um exemplo de campo de vetor combinatório.

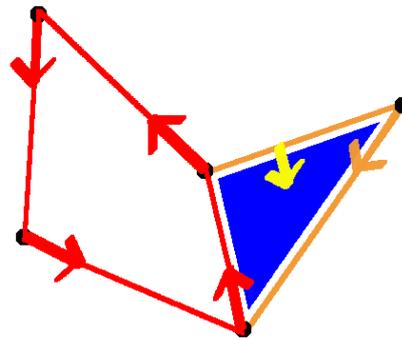


Figura 3.2: O V -caminho fechado do campo de vetor combinatório da figura 3.1 (em vermelho).

3.1.2 Campo gradiente discreto e suas células críticas

Definição 3.3 (Campo gradiente discreto) *Um campo gradiente discreto é um campo de vetor combinatório sem nenhum V -caminho fechado.*

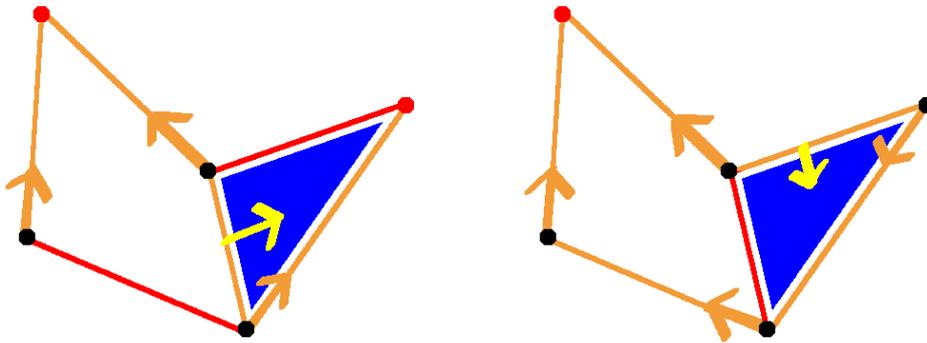
Morse provou que a topologia de uma variedade está relacionada aos elementos críticos de uma função diferenciável definida nele. Forman obteve um resultado parecido, com a seguinte definição de células críticas:

Definição 3.4 (Células críticas) *Uma célula α é crítica se não pertence a nenhuma par, i.e.:*

$$V(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha \notin \text{Im}(V)$$

O exemplo da figura 3.1 não é um campo de vetor discreto, porque ele possui um V -caminho fechado. Na figura 3.3, as células críticas do campo gradiente discreto são coloridas de vermelho.

Denotaremos por $m_p(f)$ o número de células críticas de dimensão p . Esse número não é um invariante topológico do complexo celular, porque depende do campo gradiente considerado. Por exemplo, num campo gradiente vazio (i.e. não tem nenhum par) todas as células são críticas, o que seria o número máximo de células críticas. Nesse trabalho, estamos mais interessados em minimizar esse número, porque daria uma descrição mais concisa da topologia.



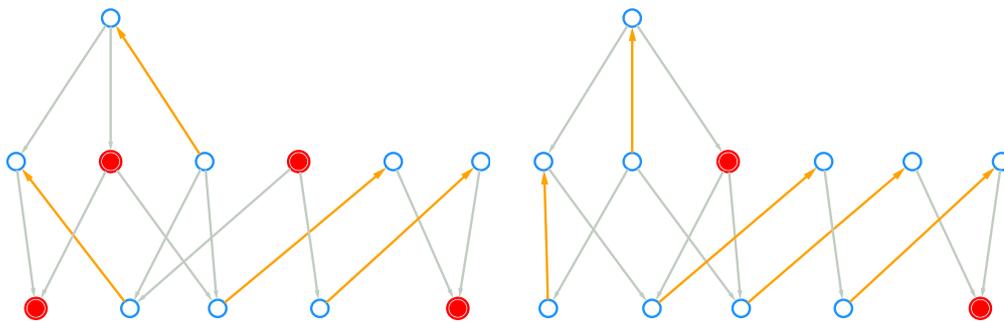
3.3(a): válido

3.3(b): ótima

Figura 3.3: Exemplos de campos gradiente discretos.

3.1.3 Diagrama de Hasse de campos de vetores

Um campo de vetor combinatorio é um casamento parcial no diagrama de Hasse: cada par de \mathcal{V} corresponde a nós casados no diagrama de Hasse.



3.4(a): válido

3.4(b): ótima

Figura 3.4: Diagrama de Hasse dos exemplos da figura 3.3.

Representaremos um tal casamento invertendo a orientação das linhas entre cada par de \mathcal{V} : o nó fonte da seta será $\alpha^{(p)}$ para cada $\{\alpha^{(p)} \prec \beta^{(p+1)}\} \in \mathcal{V}$. Por exemplo, figura 3.4 mostra o diagrama de Hasse dos campos gradientes discretos da figura 3.3.

Com esta orientação modificada, um V -caminho fechado é precisamente um circuito orientado no diagrama de Hasse (cf figura 3.5). Um campo gradiente discreto não tem V -caminho fechado, e assim será um *casamento acíclico*.

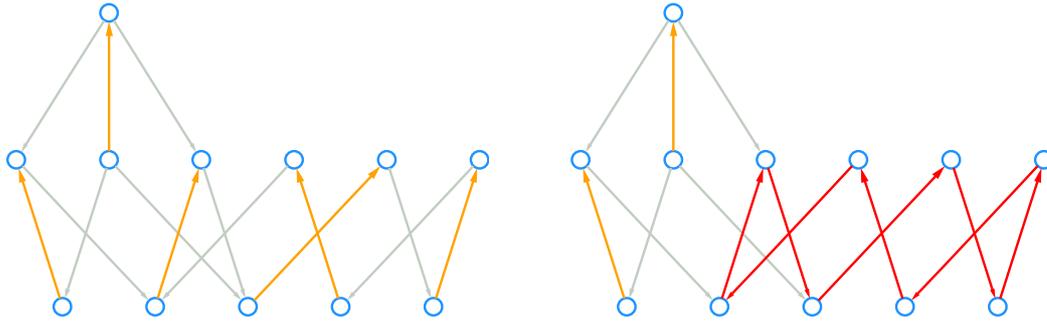
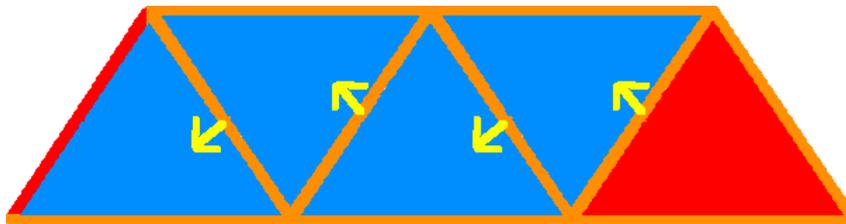


Figura 3.5: O diagrama de Hasse do campo de vetor combinatório da figura 3.1, e o circuito do seu V -caminho fechado (em vermelho).

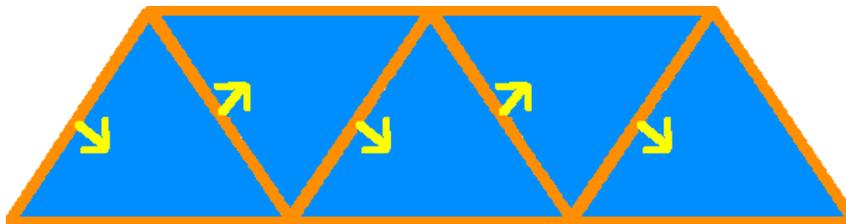
3.1.4
Cancelando células críticas

Proposição 3.5 *Seja V um campo gradiente discreto tal que $\alpha^{(p)}$ e $\beta^{(p+1)}$ são críticas e que existe apenas um V -caminho de uma face de β até α . Então existe um outro campo gradiente discreto W , igual a V fora desse V -caminho, com as mesmas células críticas a não ser que α e β não são mais críticas para W .*

Embora a demonstração do mesmo teorema para o caso diferenciável seja bem técnica, a demonstração nesse caso é muito simples:



3.6(a): O único V -caminho ligando as duas células críticas



3.6(b): Invertendo o V -caminho

Figura 3.6: Cancelando células críticas

Prova. Seja $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$ o único V -caminho do teorema, com $\beta_0 = \beta$ e $\alpha_{r+1} = \alpha$. W é obtido a partir de V invertendo o campo gradiente ao longo

do V -caminho (cf figura 3.6):

$$\begin{aligned} W = V & \setminus \{ \{\alpha_1 \prec \beta_1\}, \dots, \{\alpha_r \prec \beta_r\} \} \cup \\ & \cup \{ \{\alpha_1 \prec \beta\}, \{\alpha_2 \prec \beta_1\}, \dots, \{\alpha_r \prec \beta_{r-1}\}, \{\alpha \prec \beta_r\} \}. \end{aligned}$$

□

3.2

Funções de Morse discretas

Na verdade, a informação topológica encontra-se no campo gradiente discreto. Entretanto, algumas propriedades topológicas são mais fáceis de expressar em termos de funções de Morse discretas.

3.2.1

Funções de Morse discretas e suas células críticas

Uma função de Morse discreta definida num complexo celular dado é uma função real “quase-crescente” com respeito à dimensão. Pode haver no máximo uma exceção por célula, e essa exceção relaciona-se com as pares do campo gradiente discreto.

Definição 3.6 (Função de Morse discreta) *Uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada célula de um complexo celular K um valor real é uma função de Morse discreta se satisfazer, para cada célula $\sigma^{(p)} \in K$:*

$$\begin{aligned} \# \{ \tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} : f(\tau) \leq f(\sigma) \} &\leq 1 \\ e \# \{ \nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} : f(\nu) \geq f(\sigma) \} &\leq 1 \end{aligned}$$

Ou seja, para cada célula σ , f atribui a uma face de σ no máximo um valor maior do que $f(\sigma)$, e a uma célula na qual σ pertence ao bordo, no máximo um valor menor do que $f(\sigma)$. Para cada célula, há no máximo uma face “compensando”-a e uma célula, na qual σ pertence ao bordo, “compensando”-a. É fácil mostrar que uma célula não pode ter ambas. Uma célula que não tem nenhuma será chamada de *crítica*:

Definição 3.7 (Célula crítica) *Uma célula $\sigma^{(p)}$ é uma célula crítica de f se:*

$$\begin{aligned} \# \{ \tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} : f(\tau) \leq f(\sigma) \} &= 0 \\ e \# \{ \nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} : f(\nu) \geq f(\sigma) \} &= 0 \end{aligned}$$

A figura 3.7 dá alguns exemplos de funções de Morse discretas. Naturalmente, nem toda função é válida: na figura 3.7(b) por exemplo, a face (com valor 4) e a aresta com valor 0 são atribuídas valores inválidos para a definição 3.6. As células críticas da figura 3.7(c) têm valores 0 e 5.

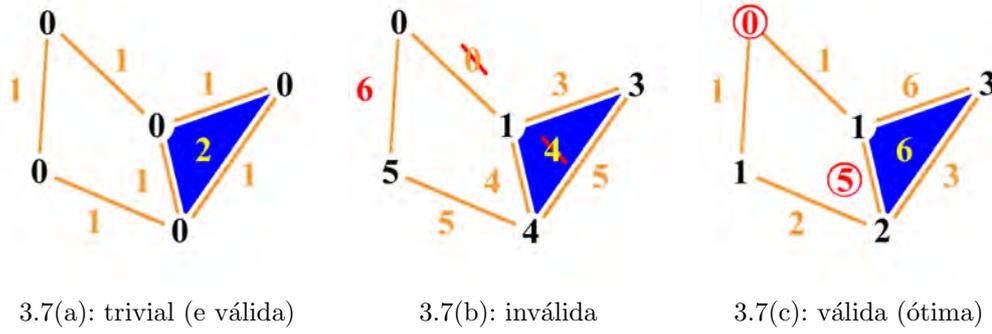


Figura 3.7: Exemplos de funções de Morse discretas

3.2.2 Integração de um campo gradiente discreto

Dada uma função de Morse discreta, cada célula tem no máximo uma célula “compensando”. Se tiver uma, podemos formar um par do campo gradiente discreto com aquela célula e a sua célula “compensando” ela. Por exemplo, a função de Morse discreta da figura 3.7(c) corresponde ao campo gradiente discreto da figura 3.4(b).

Teorema 3.8 *Para cada função de Morse discreta f , existe um campo gradiente discreto V com as mesmas células críticas que f .*

Prova. Podemos definir V para cada célula $\sigma^{(p)}$ da seguinte maneira:

$$V(\sigma^{(p)}) = \begin{cases} \tau^{(p+1)} \text{ tal que } \tau \succ \sigma \text{ e } f(\tau) \leq f(\sigma) & \text{se um tal } \tau \text{ existe} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

□

Função de Morse discreta trivial Vimos na seção 3.1.2 que o conjunto vazio é um campo gradiente discreto, para o qual cada célula é crítica. Isto corresponde a uma função de Morse discreta trivial f que atribui a cada célula a sua dimensão: $f(\sigma^{(p)}) = p$ (cf figura 3.7(a)). Este processo de deduzir uma função de Morse discreta a partir de um campo gradiente discreto pode ser generalizado para um campo gradiente discreto qualquer.

Teorema 3.9 *Para cada campo gradiente discreto V , existe uma função de Morse discreta f com as mesmas células críticas que V .*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [12, teorema 9.3]. Uma outra maneira de construir f a partir de V pode ser encontrado no algoritmo da seção 6.2.4. A figura 3.8 mostra o resultado daquele algoritmo.

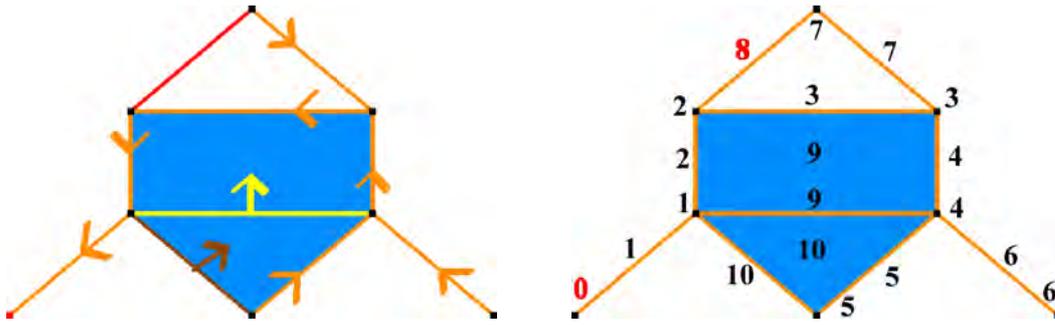


Figura 3.8: Um campo gradiente discreto e a correspondente função de Morse discreta.

3.2.3 Operações em elementos de Morse discretos

Sejam f e g funções de Morse discretas definidas em dois complexos celulares K e L ; e sejam V e W o campo gradiente discreto correspondente.

Restrição. Se L é um subcomplexo de K , então $g = f|_L$ é uma função de Morse discreta válida.

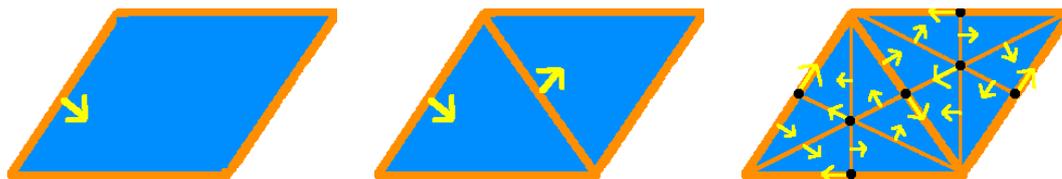
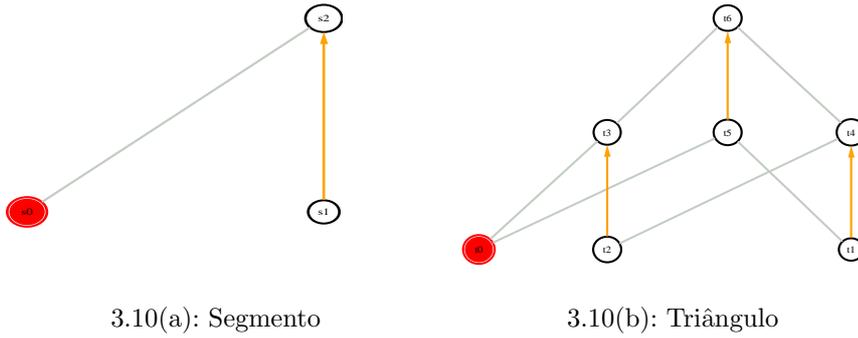


Figura 3.9: Refinamento de um campo gradiente discreto: todos os vértices, as arestas e as faces novas pertencem a alguma par.

Refinamento. Se L é uma subdivisão de K , podemos construir uma função g a partir de f de tal forma a se obter o mesmo número de células críticas. Isto pode ser feito localmente, modificando o campo gradiente discreto para cada divisão de célula, como indicado na figura 3.9. Uma demonstração completa pode ser encontrada em [12, seção 12].

Produto cartesiano. O produto cartesiano $K \times L$ é um complexo celular com a seguinte relação de incidência: $(\alpha_K, \alpha_L) \prec (\beta_K, \beta_L)$ se $\alpha_K = \beta_K$ e $\alpha_L \prec \beta_L$, ou $\alpha_K \prec \beta_K$ e $\alpha_L = \beta_L$. Um campo gradiente discreto $V \times W$ pode ser definido em $K \times L$ de tal forma a obter $\sum_q m_q(f) \cdot m_{p-q}(g)$ células críticas de índice p :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Se } \alpha_K \text{ não for crítica, } V(\alpha_K) = 0, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = 0 \\ \text{Se } \alpha_K \text{ não for crítica, } V(\alpha_K) = \beta_K, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = \{\beta_K, \alpha_L\} \\ \text{Se } \alpha_K \text{ for crítica, } W(\alpha_L) = 0, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = 0 \\ \text{Se } \alpha_K \text{ for crítica, } W(\alpha_L) = \beta_L, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = \{\alpha_K, \beta_L\} \end{array} \right.$$



3.10(a): Segmento

3.10(b): Triângulo

Figura 3.10: Os diagramas de Hasse de um campo gradiente discreto ótimo num segmento e num triângulo.

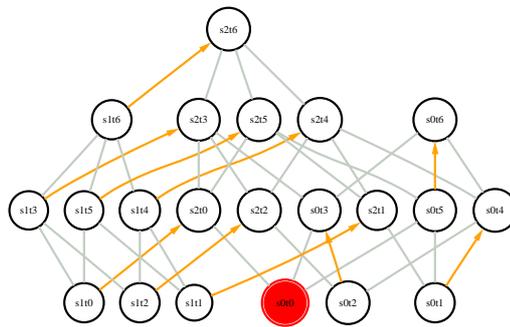


Figura 3.11: O diagrama de Hasse do produto cartesiano dos campos gradiente discretos da figura 3.10.

Este processo é um tipo de prioridade lexicográfica. As figuras 3.10 e 3.11 dão um exemplo para o caso simples de um segmento *cartesiano* um triângulo.

3.3 Propriedades topológicas

Com a definição de uma função discreta, gostaríamos de ter a mesma intuição que no caso de funções de Morse diferenciais, em particular de ter uma noção da altura. Então, definiremos o corte $K(c)$ de complexo celular K numa certa altura c como segue:

$$K(c) = \bigcup_{\sigma \in K, f(\sigma) \leq c} \bigcup_{\tau \prec \sigma} \tau.$$

3.3.1 Propriedades ligadas à homotopia

Morse provou que ao mudar a altura onde se corta uma variedade não se altera a topologia se esta mudança não atravessar uma altura crítica. Os

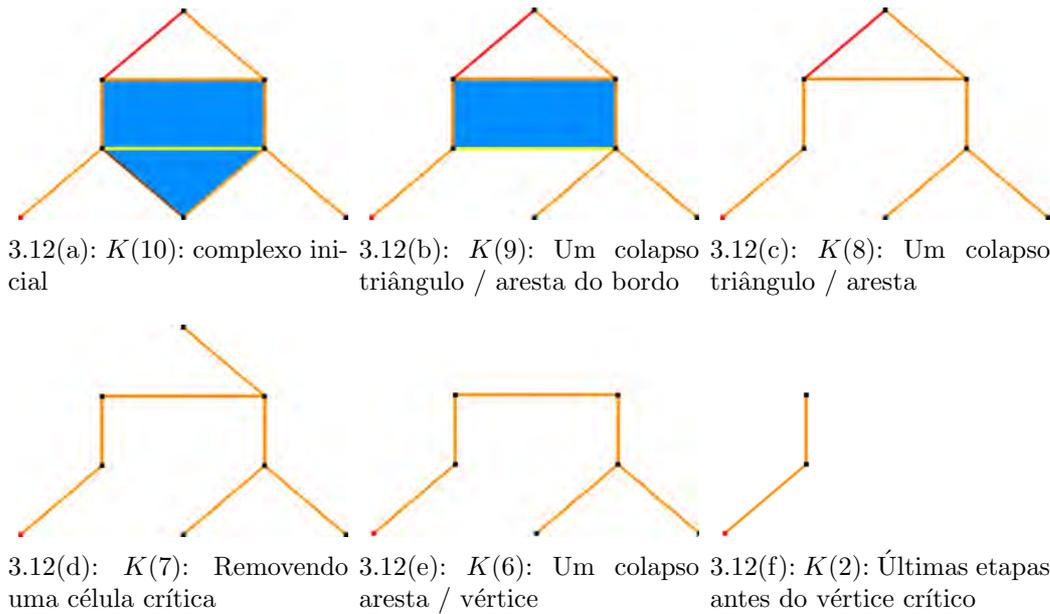


Figura 3.12: Etapas do colapso de um complexo celular simples.

teoremas correspondentes valem também para o caso discreto:

Teorema 3.10 *Se $a < b$ são números reais tais que $[a, b]$ não contem nenhum valor crítico de f , então $K(b) \searrow K(a)$.*

Teorema 3.11 *Se $a < b$ são números reais tais que $f^{-1}([a, b])$ contem uma única célula crítica $\sigma^{(p)}$, então $K(b)$ é homotópica à $K(a) \cup_{\partial e^p} e^p$, onde e^p é uma p -célula com bordo ∂e^p .*

As provas destes teoremas podem ser encontradas em [12, teoremas 3.3 e 3.4]. Um corolário direto dos teoremas anteriores é o seguinte:

Corolário 3.12 *K tem o mesmo tipo de homotopia simples que um complexo celular com exatamente $m_p(f)$ células de dimensão p .*

Esses resultados têm um grande significado para a área da topologia computacional: uma vez que uma função de Morse discreta foi construída num complexo celular podemos, então, calcular seus grupos de homotopia e de homologia a partir de um número muito reduzido de células. Isto permitiria em alguns casos usar algoritmos exponenciais num tempo admissível.

3.3.2

Desigualdades de Morse discretas

Outras propriedades topológicas originalmente provadas por Morse são agrupadas nas *desigualdades de Morse*. Seguem diretamente da subaditividade dos números de Betti, e da retração, definida nos teoremas anteriores. Essas desigualdades são válidas independentemente do corpo usado para calcular os números de Betti [12, corolário 8.3]. As provas para essas desigualdades podem ser encontradas em [26].

Teorema 3.13 (Desigualdades fortes de Morse) *Para um complexo celular finito K , qualquer função de Morse discreta f definida nele satisfaz:*

$$\forall p, \quad m_p(f) - m_{p-1}(f) + \cdots \pm m_0(f) \geq \beta_p(K) - \beta_{p-1}(K) + \cdots \pm \beta_0(K)$$

Teorema 3.14 (Desigualdades fracas de Morse) *Para um complexo celular finito K de dimensão n , qualquer função de Morse discreta f definida nele satisfaz:*

$$\begin{aligned} \forall p, \quad m_p(f) &\geq \beta_p(K) \\ \chi(K) &= \#_n(K) - \#_{n-1}(K) + \cdots \pm \#_0(K) \\ &= m_n(f) - m_{n-1}(f) + \cdots \pm m_0(f) \\ &= \beta_n(K) - \beta_{n-1}(K) + \cdots \pm \beta_0(K) \end{aligned}$$

onde $\chi(K)$ é a característica de Euler e $\#_p(K)$ é o número de p -células de K .

3.3.3

Colapso e funções de Morse discretas

Colapsar um complexo celular não muda o tipo de homotopia simples. Assim, deveríamos ser capazes de estender uma função de Morse discreta com um complexo celular sem acrescentar nenhuma célula crítica:

Teorema 3.15 *Seja L um subcomplexo de K tal que $K \searrow L$. Seja f uma função de Morse discreta em L e seja $c = \max_{\sigma \in L} f(\sigma)$. Então f pode ser estendida para uma função de Morse discreta g em K com $L = K(c)$, de tal forma que não exista nenhuma célula crítica em $K \setminus L$.*

Prova. Por indução sobre o número de colapsos elementares, só é preciso mostrar a proposição para $K = L \cup \sigma \cup \tau$, onde σ é uma célula de K e

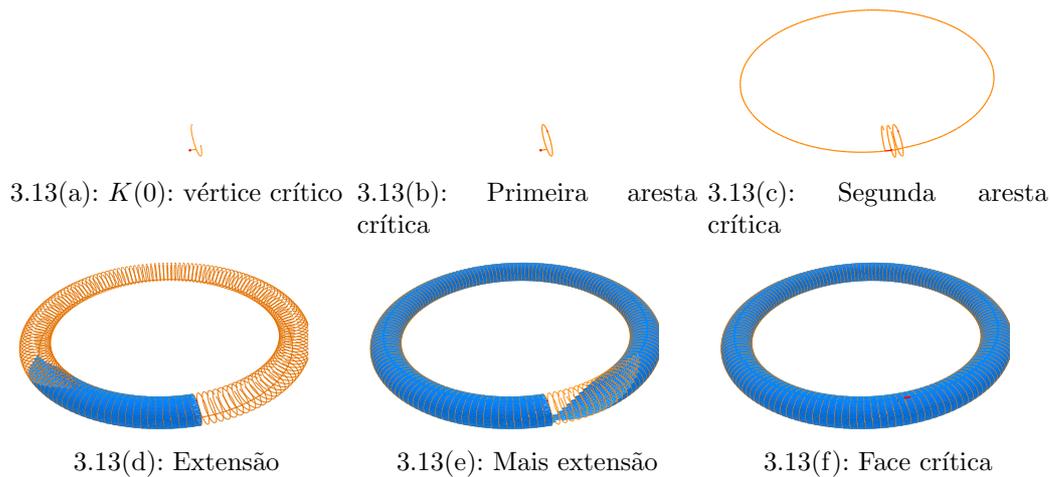


Figura 3.13: As etapas críticas da extensão de um toro.

$\tau \prec \sigma$ uma das faces livres de σ . Podemos definir g em K da seguinte maneira:
 $\forall \alpha \in L, g(\alpha) = f(\alpha); g(\sigma) = c + 1$ e $g(\tau) = c + 1$. \square

A figura 3.13 mostra diferentes etapas da extensão de uma função de Morse discreta do jeito da proposição 3.15, à exceção dos valores críticos (em vermelho).

3.3.4

Teoremas sobre esferas

Mencionamos apenas aqui um outro teorema muito interessante das teorias de Morse. Uma prova daquelas versões discretas pode ser encontrada em [12, seção 5].

Teorema 3.16 *Se K é um complexo celular e f é uma função de Morse discreta definida sobre ele com exatamente duas células críticas, então K tem o tipo de homotopia de uma esfera.*

Proposição 3.17 *Se S é uma n -esfera PL, então, com uma seqüência finita de bisseções, S pode ser subdividido em um poliedro K que admite uma função de Morse com exatamente 2 células críticas.*

3.4

Otimalidade nas funções de Morse discretas

Como já mencionamos acima, as células críticas de uma função de Morse discreta definida em um complexo celular descrevem o seu tipo de homotopia simples. Obter um número pequeno de células críticas nos permite acelerar o cálculo de propriedades topológicas complexas.

Definição 3.18 (Funções de Morse discretas ótimas) *Diremos que uma função de Morse discreta é ótima se ela tiver o menor número possível de células críticas.*

Infelizmente, o problema geral de encontrar uma função de Morse discreta ótima é *MAX-SNP difícil*, i.e. um problema NP-difícil para qual qualquer algoritmo de aproximação polinomial pode conduzir a um resultado arbitrariamente longe do ótimo.

**3.4.1
Existência de um ótimo**

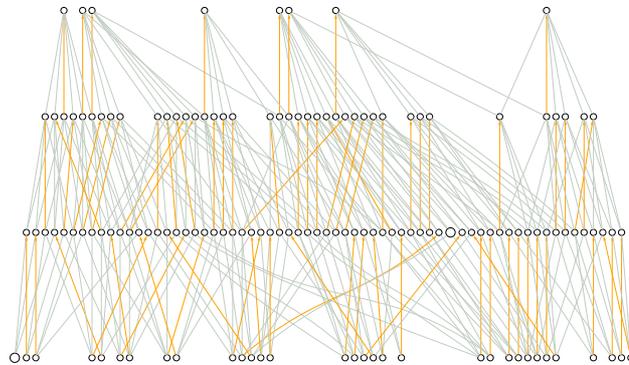


Figura 3.14: O número de casamentos no diagrama de Hasse é finito.

Embora haja uma infinidade de funções de Morse discretas para um complexo celular K dado, há somente um número finito de campos gradientes discretos (cf figura 3.14). De fato, um campo gradiente discreto pode ser visto como um casamento parcial no diagrama de Hasse (cf seção 3.1.3). Há no máximo $2^{(\#K)^2}$ casamentos desse tipo para um complexo K . Assim, existe um número mínimo de células críticas para um campo gradiente discreto definido sobre K .

**3.4.2
Um problema relacionado**

Os teoremas 3.10 e 3.11 nos ensinam que as células críticas têm uma relação forte com a colapsibilidade. Egecioğlu e Gonzalez estudaram, em [10], o problema da colapsibilidade para complexos simpliciais¹ de dimensão 2:

¹um simplexo é um tipo particular de célula

Problema da colapsibilidade

Instancia: Um par (K, n) , onde K é um complexo simplicial de dimensão 2 e n é um número não negativo

Pergunta: Será que K possui um subconjunto F de 2-simplexos de cardinalidade no máximo n tal que $K \setminus F$ colapsa para um ponto?

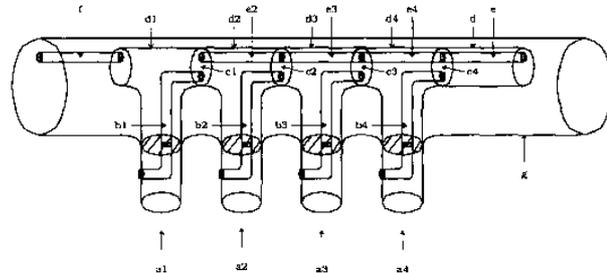


Figura 3.15: Um “gadget” usado na demonstração de Egecioglu e Gonzalez.

Em particular, provaram que esse problema é MAX-SNP difícil, reduzindo-o para o problema da cobertura por vértices, usando complexos celulares do tipo da figura 3.15.

3.4.3 Complexidade do ótimo

Veremos que o problema de achar o menor número possível de células críticas das funções de Morse discretas definidas num complexo celular dado também é MAX-SNP difícil, por redução ao problema da colapsibilidade.

Problema da otimalidade de Morse

Instancia: Um par (K, n) , onde K é um complexo celular finito de dimensão 2 e n é um número não negativo

Pergunta: Será que existe uma função de Morse discreta em K com no máximo n células críticas?

Considere um complexo simplicial K de dimensão no máximo 2. Suponha que fosse possível construir uma função de Morse discreta em K com o menor número possível de células críticas. O número de vértices críticos é o número de componentes conexas. Então a função de Morse tem o menor número possível de faces críticas (cf teorema 3.14). Pelo teorema 3.10, o subconjunto F de faces críticas daria uma resposta ao problema da colapsibilidade. Deduzimos, portanto, o seguinte teorema:

Teorema 3.19 *O problema de achar uma função de Morse ótima é uma redução do problema da colapsibilidade e, portanto, é MAX-SNP difícil.*

4

Funções de Morse discretas ótimas em superfícies

4.1

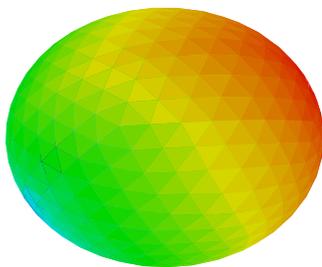
Condições de otimalidade

Vimos na seção 3.4.3 que o problema geral de encontrar uma função de Morse discreta ótima é NP-difícil. Entretanto, para o caso das variedades de dimensão 2, este problema pode ser resolvido em tempo linear pelo algoritmo apresentado na seção 4.2. A prova da otimalidade confia no teorema de classificação de superfícies introduzido na seção seguinte. Uma prova desses teoremas pode ser encontrada em [1].

4.1.1

Teorema de classificação de superfícies

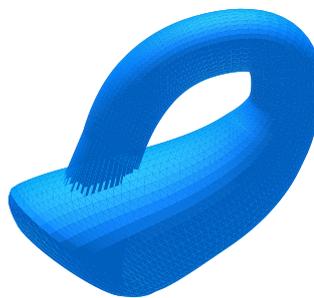
Teorema 4.1 (Teorema de classificação de superfícies) *Toda superfície compacta, conexa e sem bordo é homeomorfa a exatamente uma das seguintes superfícies: a esfera S^2 , uma soma conexa de $g > 0$ toros $T(g)$, ou uma soma conexa de $g > 0$ planos projetivos $M(g)$. Duas dessas superfícies nunca são homeomorfas entre si.*



4.1(a): 2-esfera



4.1(b): Soma de 2 toros



4.1(c): Garrafa de Klein: soma conexa de 2 planos projetivos

Figura 4.1: Exemplos de superfícies sem bordo.

A esfera (figura 4.1(a)) e as somas conexas de toros (figura 4.1(b)) são superfícies orientáveis, e superfícies com faixas de Möbius não são orientáveis (figura 4.1(c)). g é chamado o gênero da superfície. Já que podemos calcular explicitamente os grupos de homologia das superfícies padrões [1], os números de Betti (com coeficientes em \mathbb{Z}_2) e a orientabilidade caracterizam inteiramente a topologia das superfícies:

Proposição 4.2 (Grupos de homologia das superfícies padrão)

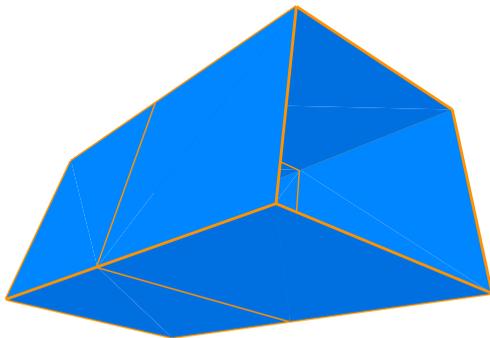
$$\begin{aligned} H_0(S^2) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(S^2) &= 0, & H_2(S^2) &= \mathbb{Z}_2. \\ H_0(T(g)) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(T(g)) &= 2g \cdot \mathbb{Z}_2, & H_2(T(g)) &= \mathbb{Z}_2. \\ H_0(M(g)) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(M(g)) &= g \cdot \mathbb{Z}_2, & H_2(M(g)) &= \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

4.1.2

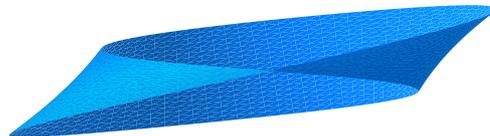
Superfícies com bordo

Proposição 4.3 *Toda superfície compacta, conexa e com bordo não vazio é homeomorfa a exatamente uma das seguintes superfícies: a esfera, uma soma conexa de toros, ou uma soma conexa de planos projetivos, em cada um dos casos com um número finito de discos abertos removidos.*

Uma prova desta extensão do teorema de superfícies sem bordo pode também ser encontrada em [1]. O grupo de homologia H_0 fica inalterados, e H_2 se anula para superfícies com bordo.



4.2(a): Cilindro



4.2(b): Faixa de Möbius

Figura 4.2: Exemplos de superfícies com um bordo não vazio.

Por exemplo, identificando o bordo de dois discos com cada bordo do cilindro (figura 4.2(a)), obtemos uma superfície homeomorfa à esfera. E ao adicionarmos um disco a uma faixa de Möbius (figura 4.2(b)) obtemos uma superfície homeomorfa ao plano projetivo.

4.1.3

Condições suficientes para a otimalidade

Temos agora todos os elementos para enunciar uma condição suficiente para garantir que uma função de Morse discreta é ótima (definição 3.18):

Proposição 4.4 (Superfícies sem bordo) *Seja f uma função de Morse discreta definida numa superfície compacta, conexa e sem bordo. Se f tiver exatamente um vértice crítico e uma face crítica, com possivelmente várias arestas críticas, então a função de Morse é ótima.*

Proposição 4.5 (Superfícies com bordo) *Seja f uma função de Morse discreta definida numa superfície compacta, conexa com um bordo não vazio. Se f tiver exatamente um vértice crítico, nenhuma face crítica, e possivelmente várias arestas críticas, então a função de Morse é ótima.*

Prova. Nos dois exemplos do teorema, suponhamos que $m_0(f) = \beta_0(K) = 1$ e $m_2(f) = \beta_2(K)$. Da segunda desigualdade fraca de Morse (teorema 3.14), sabemos que $\chi(K) = m_2(f) - m_1(f) + m_0(f) = \beta_2(K) - \beta_1(K) + \beta_0(K)$. Assim deduzimos que $m_1(f) = \beta_1(K)$. Da primeira desigualdade fraca de Morse (teorema 3.14), que afirma que $m_p(f) \geq \beta_p(K)$, alcançamos o limite inferior do número de células críticas. Conseqüentemente, f é ótima. \square

4.2

Algoritmo

Dado um complexo celular finito K de dimensão 2 que tem a topologia de uma variedade, o algoritmo prossegue cada componente conexa em 4 etapas:

1. Construir uma árvore geradora T no pseudografo dual de K .
2. Se K tem um bordo, adicionar um laço a T .
3. Definir uma função de Morse discreta em T .
4. Definir uma função de Morse discreta no grafo complementar de T .

Primeira etapa: Construção de uma árvore geradora. A árvore geradora T pode ser construída a partir do pseudografo dual (cf seção 2.2.4) por qualquer um dos algoritmos padrão [17]. em particular, podemos usar estratégias dos algoritmos de compressão de malhas 3d. Por exemplo, o algoritmo de compressão EdgeBreaker [21] (figura 4.3) constrói uma árvore geradora em espiral (Figure 4.4).

Segunda etapa: Adição de um laço. Testamos se a variedade tem um bordo durante a primeira etapa. Se encontrarmos uma aresta de bordo,

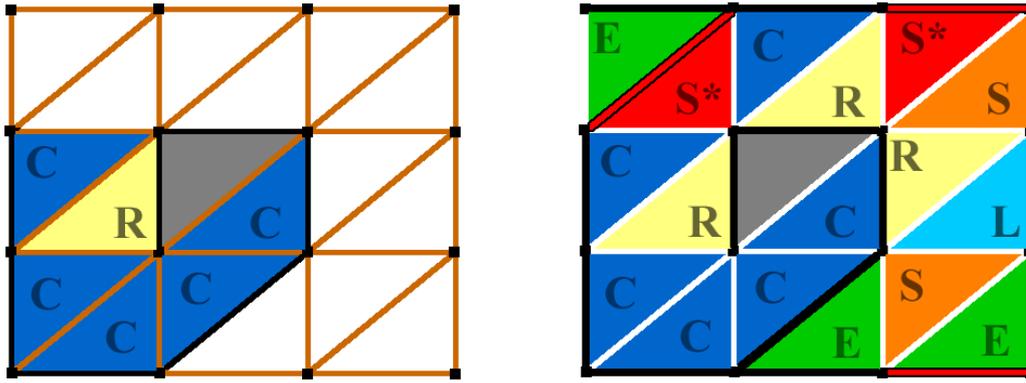
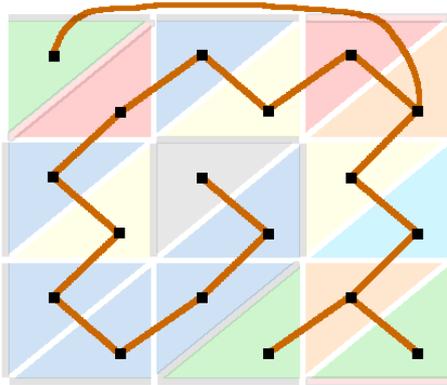
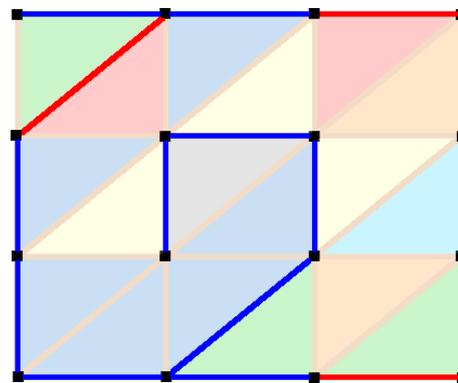


Figura 4.3: Os códigos do EdgeBreaker sobre um toro triangulado.



4.4(a): T



4.4(b): G

Figura 4.4: A árvore geradora T resultante e o seu grafo complementar G .

um laço é adicionado a T , e T se torna um pseudografo. Por exemplo, na figura 2.7, o laço (com valor 21) foi adicionado a T .

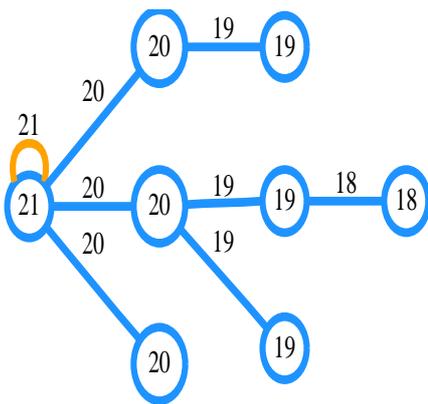


Figura 4.5: Laço adicionado na etapa 2 à árvore geradora T da figura 2.1 (nenhuma célula crítica)

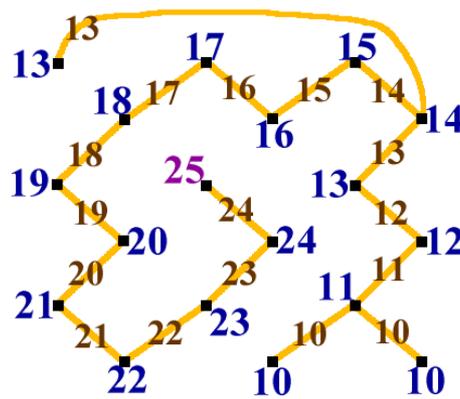


Figura 4.6: A função de Morse discreta na árvore geradora T da figura 4.3 (1 face crítica).

Terceira etapa: Definição da função em T . Seleccionamos uma raiz para T , e atribuímos a cada nó de T (i.e. 2-células de K) a sua altura na árvore

adicionada por uma constante c . Atribuímos a cada linha de T (i.e. 1-células de K) o valor mínimo de seus nós incidentes (cf figura 2.7). O resultado deste processamento no exemplo da figura 4.3 é mostrado na figura 4.6.

Em nossa construção, o valor inicial de c deve ser no mínimo $\#_0 K + 1$.

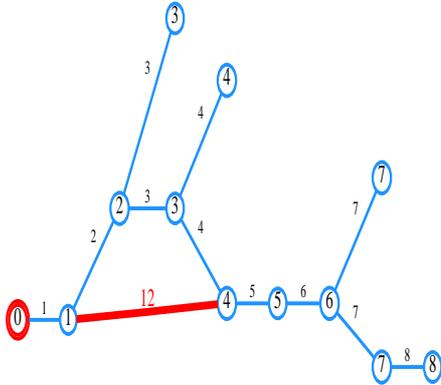


Figura 4.7: O grafo complementar G do cilindro e a sua função de Morse discreta (1 vértice crítico e de 1 aresta crítica).

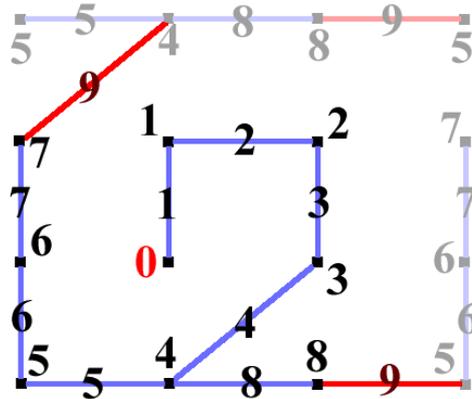


Figura 4.8: A função de Morse discreta no grafo complementar G da figura 4.3 (1 vértice crítico e 2 arestas críticas).

Quarta etapa: Definição da função no grafo complementar de T .

Consideraremos agora G , o grafo complementar de T : G é um grafo sem laços cujos nós são os vértices de K , e cujas linhas são as arestas de K que não são representadas em T .

Construímos uma outra árvore geradora U em G . Atribuímos a cada nó de G sua distância em linhas a uma raiz selecionada de U ; e a cada linha de U o valor máximo dos seus nós incidentes.

Finalmente, atribuímos o valor $(c-1)$ a cada linha de $G \setminus U$ (cf aresta crítica da figura 2.3 com valor 12). O resultado deste processamento no exemplo da figura 4.3 é mostrado na figura 4.8.

4.3

Primeira extensão às não-variedades

Se o nosso complexo não tiver a topologia de uma variedade, algumas arestas podem ser incidentes a 3 faces por exemplo, e a construção acima pode não ser mais ótima. Entretanto, o algoritmo ainda produz uma função de Morse discreta válida, que ainda é ótima em vários casos.

Na verdade, um complexo celular de dimensão 2 não é uma variedade se combinar algumas das seguintes 3 razões:

1. Aresta pendente (cf figura 4.9).
2. Vértice singular (cf figura 4.10).
3. Aresta não-regular (cf figura 4.11).

A vizinhança de um ponto de uma 2-célula sempre é \mathbb{R}^2 .



Figura 4.9: Uma não-variedade com uma aresta pendente (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.



Figura 4.10: Uma não-variedade com um vértice de canto (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.



Figura 4.11: Uma não-variedade com uma aresta não-regular (na esquerda) e suas células críticas (na direita): 1 vértice crítico e 2 faces críticas.

1. aresta pendente. Esse caso se reduz a um grafo colado a um complexo. O grafo não aparecerá nas etapas 1, 2 e 3 do algoritmo, e será

processado na etapa 4. A homologia de um grafo é a sua conectividade, então o algoritmo ainda alcança o ótimo nesse caso.

2. vértice singular. Isto corresponde a diversos complexos celulares colados em um vértice, ou a uma variedade beliscada. Na etapa 1 do algoritmo, não haveria uma árvore geradora T , mas diversas. A otimalidade da função se reduz à otimalidade em cada complexo celular. A etapa 4 gerará um grafo conexo, e haverá somente um vértice crítico. Assim, este caso não afeta a otimalidade de nosso resultado.

3. aresta não-regular. Esse caso é o mais difícil. Daremos somente uma heurística que sempre construí uma função de Morse discreta válida, mas sabemos pela teoria (cf seção 3.4.3) que para alguns casos especiais, as funções resultantes podem ser arbitrariamente longe do ótimo. Outras heurísticas serão discutidas na seção 6.4. Nesse caso, definimos o pseudografo dual com os mesmos nós, e com as linhas que são incidentes a apenas 1 ou 2 nós (i.e. somente as linhas regulares). O algoritmo funcionara depois normalmente, e as linhas não-regulares que não podem fazer parte da árvore geradora da etapa 4 remanesceriam críticas.

4.4

Prova e análise

Validade da função de Morse discreta. Pela própria construção das árvores T (etapa 3) e U (etapa 4), a função f , resultante do algoritmo numa componente conexa de K , respeita as desigualdades da definição 3.6. Além disso, há exatamente um vértice crítico: a raiz de U . Se K não tiver bordo, a raiz de T será a face crítica original, e no caso contrario, não há nenhuma face crítica em K .

Agora necessitamos apenas verificar que tenham sido atribuídos valores válidos para as arestas de K . Pelo próprio valor inicial da constante c , as arestas críticas são as linhas de $G \setminus U$, para os quais são atribuídos valores maiores do que o valor de qualquer vértice, e inferior ao valor de qualquer face (há $\#_0 K < c$ nós em G , e então no máximo $\#_0 K$ valores regulares diferentes). As desigualdades da definição 3.6 são óbvias para cada célula representada nas árvores T e U . Feita a escolha do valor inicial da constante c , cada célula de T tem um valor maior do que qualquer célula de G . Assim, aquelas desigualdades são estritamente respeitadas entre as linhas de T e os nós de G , e entre as linhas de U e os nós de T .

Otimalidade da função de Morse discreta. Então, nossa construção da uma função de Morse discreta f é válida com exatamente 1 vértice crítico

($m_0(f) = 1$), possivelmente muitas arestas críticas, e com apenas uma face crítica ($m_2(f) = 1$) se K for uma variedade sem bordo, e nenhuma face crítica ($m_2(f) = 0$) se K for uma superfície com bordo. Pelas proposições 4.4 e 4.5, sabemos que f é ótima.

Complexidade. Uma vez que as árvores geradoras são construídas, o algoritmo visita cada nó e cada linha no máximo uma vez. Conseqüentemente, as etapas 2, 3 e a segunda parte da etapa 4 têm uma complexidade linear. Construir uma árvore geradora pode ser linear com um algoritmo guloso simples [17]. Assim, o algoritmo inteiro é linear no tempo com respeito a $\#K$.

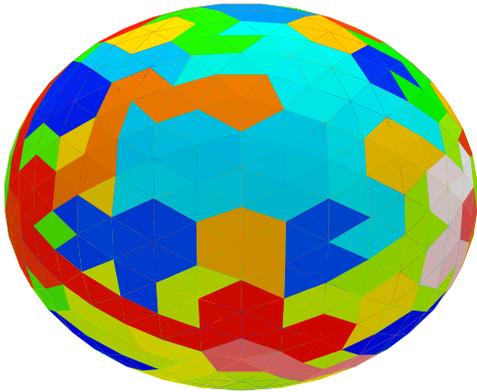
4.5

Adicionando informações geométricas

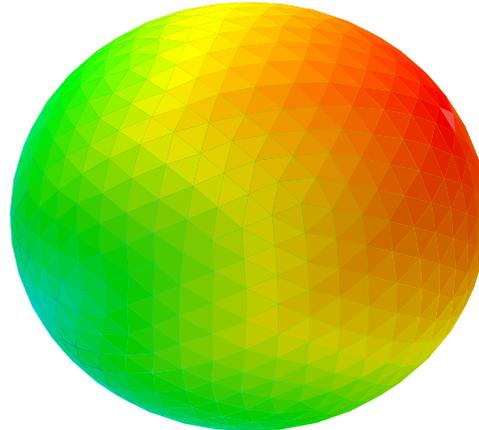
A construção acima é inteiramente independente da geometria. Um dos poderes da teoria de Morse discreta de Forman se reflete aqui em dois pontos. Primeiramente, o algoritmo inteiro é feito sem nenhuma operação em ponto flutuante. Em segundo, é possível adicionar algumas restrições externas, por exemplo geométricas. Há diferentes restrições que podemos adicionar nas funções de Morse discretas:

- A árvore geradora T pode ser escolhida de modo a ser uma árvore geradora mínima. Isto conduz a uma complexidade $O(\#K \cdot \log \#K)$.
- O laço adicionado na etapa 2 pode minimizar o mesmo critério, a fim ter a raiz da árvore geradora numa posição mínima.
- As raízes das árvores geradora T da etapa 1 e U de etapa 4, podem também estar numa posição mínima.
- O valor atribuído nas etapas 3 e 4 pode ser aumentado para alguns galhos da árvore para separar uma parte do objeto ao reconstruir o complexo por alturas sucessivas, como nos teoremas 3.10 e 3.11.

A maneira que incluímos as restrições geométricas não muda a otimalidade da função resultante. Por exemplo, a figura 4.12 mostra dois campos gradientes discretos numa esfera, ambos com as 2 células críticas. Isto pode ser usado para desenvolver ou justificar algoritmos geométricos.



4.12(a): Sem restrição geométrica



4.12(b): Com restrição geométrica

Figura 4.12: Dois campos gradientes discretos numa esfera, com ambos 2 células críticas.

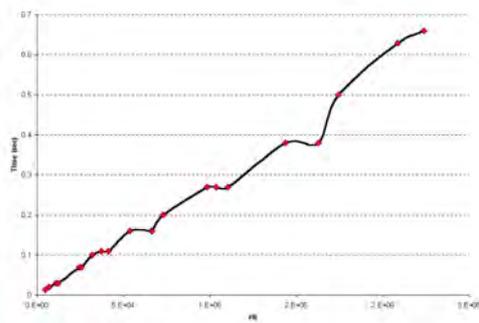


Figura 4.13: Tempo de execução em relação ao número de células do complexo celular K : a complexidade é linear.

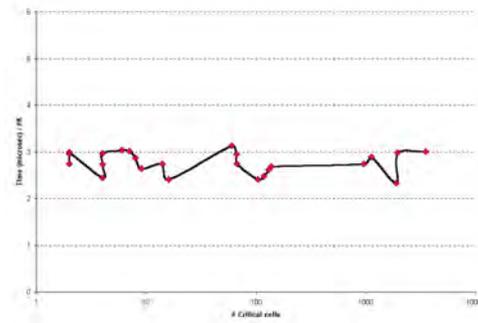


Figura 4.14: Razão tempo de execução / tamanho de K em relação ao número de células críticas de K : independência.

4.6 Resultados

Testamos o algoritmo com mais de 150 modelos de vários tipos: triangulações, quadrangulações e polígonos gerais; variedades e não-variedades; modelos com uma topologia consistentes, saídas de scanner ou importação de modelos VRML com topologia deficiente (figuras 4.15, 4.16 e 4.17). O algoritmo construiu sempre uma função de Morse discreta válida. Para todos os modelos de variedades, a função resultante foi ótima. Para os complexos não-variedades (em particular, para os exemplos de Moriyama e Takeuchi [28]), a função teve no máximo 4 células críticas redundantes. Os resultados experimentais sobre um Pentium III, 550 MHz, confirmam a complexidade linear com respeito a $\#K$ (figura 4.13) e a independência do tempo de execução para a topologia (figura 4.14).

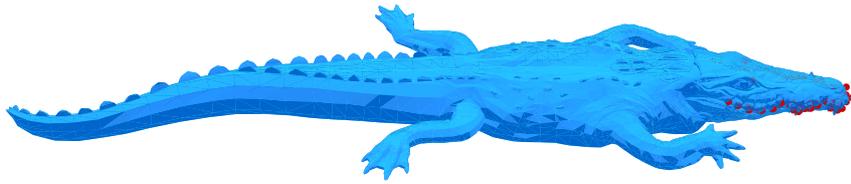


Figura 4.15: Uma função de Morse discreta ótima num modelo VRML importado. Cada dente é uma componente conexa diferente (aqui homeomorfa a uma esfera), e tem duas células críticas. Assim, há 65 vértices críticos e 65 faces críticas (64 dentes + 1 para o corpo).

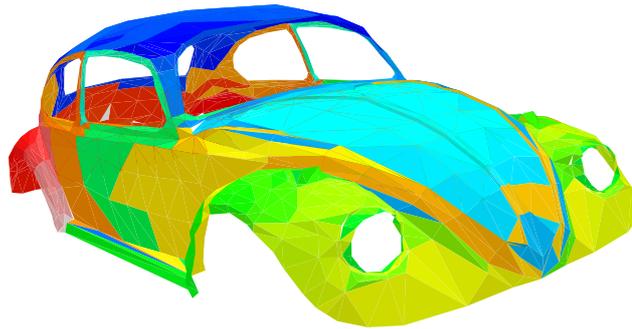


Figura 4.16: Um campo gradiente discreto ótimo num modelo do fusca com 2 componentes conexas.

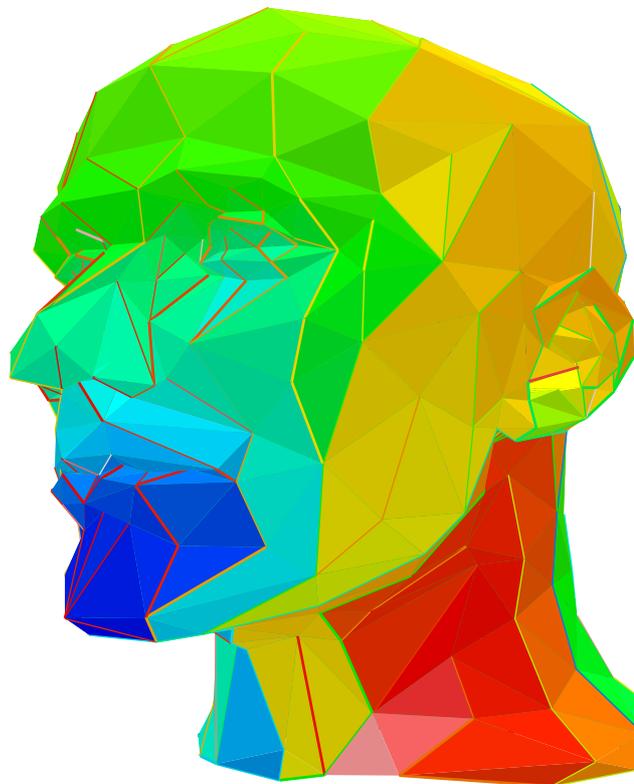


Figura 4.17: Um campo gradiente discreto ótimo com o grafo complementar U .

5

Estrutura de uma função de Morse discreta

5.1

Camadas de um campo de vetor combinatório

As estruturas de grafos são geralmente usadas para representar objetos complexos e suas relações. Demos um exemplo na seção 2.2.3 onde representamos um complexo celular por seu diagrama de Hasse, e outro na seção 2.1.6 onde representamos um hipergrafo por grafos bipartidos. Isto nos permitiu dar uma definição simples de um campo gradiente discreto como um casamento acíclico neste diagrama (cf seção 3.1.3).

Entretanto, o diagrama de Hasse ainda é um objeto complexo de visualizar, e veremos nesta seção como representá-lo de maneira mais simples. Vendo o diagrama de Hasse como uma coleção de grafos bipartidos, poderemos visualizar um complexo celular como uma coleção de hipergrafos e uma função de Morse discreta como hiperflorestas sobre estes hipergrafos.

5.1.1

Camadas do diagrama de Hasse

Vimos na seção 2.2.4 que, numa n -variedade combinatória, uma $(n-1)$ -célula é incidente a 1 ou 2 n -células. A camada dual $n/(n-1)$ do diagrama de Hasse será , portanto, representada por um pseudografo, chamado o pseudografo dual. Este pseudografo pode ser visto como a representação do hipergrafo da *camada dual* $n/(n-1)$ do diagrama de Hasse.

Definição 5.1 (Camada do diagrama de Hasse) *A camada p/q do diagrama de Hasse, $|p - q| = 1$, de um complexo celular K é um grafo simples orientado e bipartido. As suas classes de nós \mathbf{N} e \mathbf{L} são as células de K de dimensão p e q respectivamente. Suas linhas ligam os nós que representam células incidentes de K de dimensão p e q .*

Esta definição estabelece uma diferença entre camadas do tipo p/q e q/p diferenciando as classes de nós \mathbf{N} e \mathbf{L} . A orientação dessas camadas é a

mesma que a do diagrama de Hasse original. Por exemplo, figura 5.2 mostra o hipergrafo da camada 2/1 do diagrama de Hasse da figura 5.1.

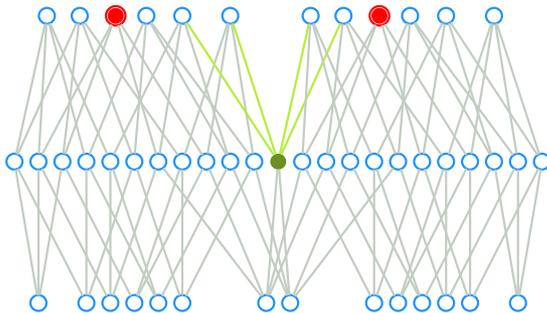


Figura 5.1: O diagrama de Hasse do cubo duplo da figura 4.11.

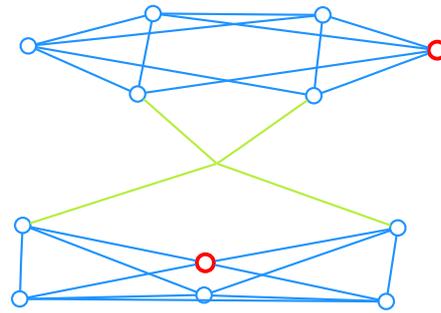


Figura 5.2: O hipergrafo da camada 2/1 da figura 5.1.

5.1.2 Interpretação do algoritmo para superfícies

Uma das estratégias mais eficientes de compressão se baseia na cirurgia topológica [32]: cortar as superfícies ao longo de uma floresta dual geradora e codificar o disco resultante. Usamos um método similar para construir uma função de Morse discreta ótima para 2-variedades (cf o capítulo 4).

Nas etapas 1 e 2 do algoritmo da seção 4.2 construímos um campo gradiente discreto como uma árvore geradora extraída do pseudografo dual. Conseqüentemente, um campo gradiente discreto restringido à camada superior do diagrama de Hasse de uma variedade pode ser representado por uma árvore. Na etapa 4, construímos uma árvore geradora dos vértices de K , e definimos nosso campo gradiente discreto nele. A etapa 3 e a última parte da etapa 4 são a integração deste campo gradiente, no sentido do teorema 3.9.

Assim, a construção da função de Morse discreta ótima para superfícies pode ser vista como processar a camada dual superior do diagrama de Hasse, e depois a camada inferior dele. O processo em cada camada consiste em remover os circuitos, i.e. construir uma árvore geradora. Isso é fácil para grafos e pseudografos simples. Infelizmente, para o caso geral dos hipergrafos este é um problema muito mais difícil. Por isso que o problema da otimalidade é NP-difícil (cf o teorema 3.19).

5.1.3 Camada reduzida de um campo de vetor combinatório

Considerar sucessivas camadas do diagrama de Hasse é redundante: cada p -célula de K aparece em 4 camadas $(p/(p+1), p/(p-1), (p+1)/p, (p-$

1)/ p). Quando o diagrama de Hasse estiver orientado por um campo gradiente discreto (cf seção 3.1.3), o casamento pode ser separado nas diferentes camadas, sem nenhuma redundância. A seguinte redução permite tal partição:

Definição 5.2 (Camadas reduzidas de um campo de vetor combinatório)

Seja K um complexo celular, \mathcal{V} um campo de vetor combinatório definido nele e B a camada p/q do diagrama de Hasse orientado por \mathcal{V} ($|p - q| = 1$). A camada reduzida B' é um grafo bipartido orientado definido como segue:

A classe de nós \mathbf{N} de B' é o conjunto das células de dimensão p de K não casadas ou casadas com uma célula de dimensão q em \mathcal{V}

A classe de nós \mathbf{L} de B' é o conjunto das células de dimensão q de K casadas com uma célula de dimensão p em \mathcal{V}

A orientação de B' é a mesma que aquela do diagrama de Hasse original.

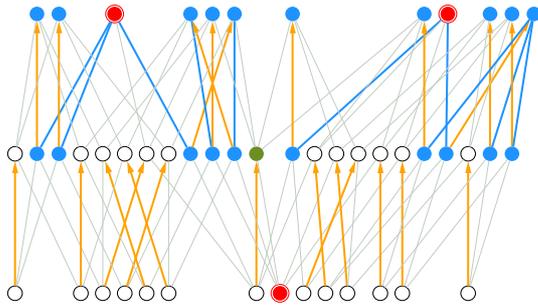


Figura 5.3: A camada reduzida 2/1 do cubo duplo (nós azuis).

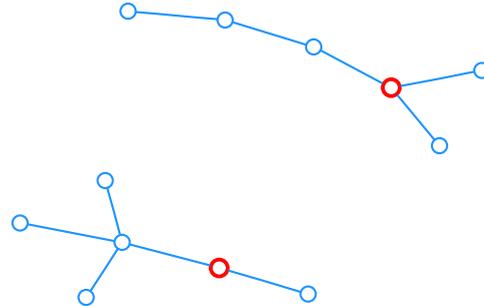


Figura 5.4: O hipergrafo da camada reduzida 2/1 da figura 5.3.

Por exemplo, figura 5.3 mostra em azul as linhas do diagrama de Hasse da figura 5.1 que pertencem à camada reduzida 2/1. O hipergrafo correspondente (cf seção 5.2.2) é uma floresta (cf figura 5.4). Podemos deduzir da definição a seguinte proposição:

Proposição 5.3 Com as notações da definição

- (i) Se \mathcal{V} for um campo gradiente discreto, as p -células críticas de \mathcal{V} aparecem nas camadas reduzidas na classe \mathbf{N} .
- (ii) Uma p -célula de K é um nó \mathbf{N} de exatamente uma camada reduzida.
- (iii) Qualquer \mathcal{V} -caminho é representado inteiramente em duas camadas reduzidas.

Prova. (i). As células críticas de um campo gradiente discreto não são casadas. Conseqüentemente, o item (i) segue diretamente da definição 5.2.

(ii). Se uma p -célula não estiver casada em \mathcal{V} , ela aparece na classe \mathbf{N} das camadas reduzidas $p/(p+1)$ e $p/(p-1)$. Se for casada com uma q -célula em \mathcal{V} , ela aparece na classe \mathbf{N} da camada reduzida p/q e na classe \mathbf{L} da camada reduzida q/p .

(iii). Um \mathcal{V} -caminho é uma seqüência alternada de p - e $(p+1)$ -células casadas. Da definição 5.2, cada p - e $(p+1)$ -células aparecem duas vezes: uma vez na camada $p/(p+1)$, e uma vez na camada $(p+1)/p$. \square

5.2

Funções de Morse discretas, casamentos acíclicos e hiperflorestas

Vimos na seção 3.2.2 que as noções de função de Morse discreta e de campo gradiente discreto são equivalentes. Um campo gradiente discreto foi definido como um casamento acíclico no diagrama de Hasse (cf seção 3.1.3). Isto envolve dois problemas: criar casamentos, e remover os ciclos. Esses dois problemas são separadamente bem entendidos (cf [22] para a teoria dos casamentos, e [17] para algoritmos sobre grafos). Entretanto, quando combinados, eles criam problemas NP-difíceis (cf seção 3.4.3). Nesta seção, nós daremos um outro ponto de vista na teoria de Morse discreta em termos do mais simples daqueles dois problemas (linear em vez de quadrático): criar florestas. Provaremos que nosso problema combinado pode ser visto como um problema de criação de uma *hiperfloresta* extraída de um hipergrafo.

5.2.1

Hiperfloresta

Definimos uma floresta como um grafo sem circuito na seção 2.1.1. Aqui vemos uma extensão natural de florestas para hipergrafos [2]:

Definição 5.4 (Hipercircuito orientado) *Um hipercircuito orientado num hipergrafo is é uma seqüência de nós distintos n_0, n_1, \dots, n_{r+1} tais que $n_{r+1} = n_0$ e para qualquer $0 \leq i \leq r$, n_i é a fonte da hiperlinha ligando-o para n_{i+1} .*

Definição 5.5 (Hiperfloresta) *Diremos que um hipergrafo simplesmente orientado é uma hiperfloresta se cada nó é a fonte de no máximo uma hiperlinha, e se não possuir hipercircuito.*

Por exemplo, figura 5.5 mostra um hipercircuito, e figura 5.6 mostra uma parte de uma hiperfloresta. Podemos deduzir da definição as seguintes propriedades:

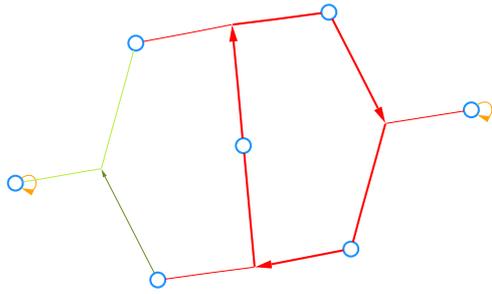


Figura 5.5: Um hipercircuito (em vermelho).

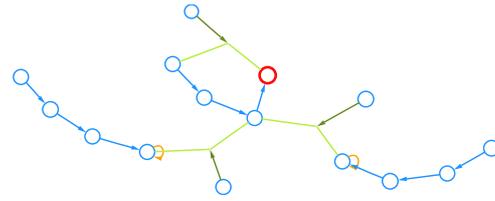


Figura 5.6: Uma parte da hiperfloresta 2/1 resultante do processamento de uma 2-esfera sólida.

Proposição 5.6 *Seja HF uma hiperfloresta, e R uma das suas componentes regulares.*

- (i) *Os componentes regulares de HF são árvores simples.*
- (ii) *Há no máximo um nó em R que é a fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular.*
- (iii) *O dual $\mathcal{D}(HF)$ de HF também é uma hiperfloresta.*

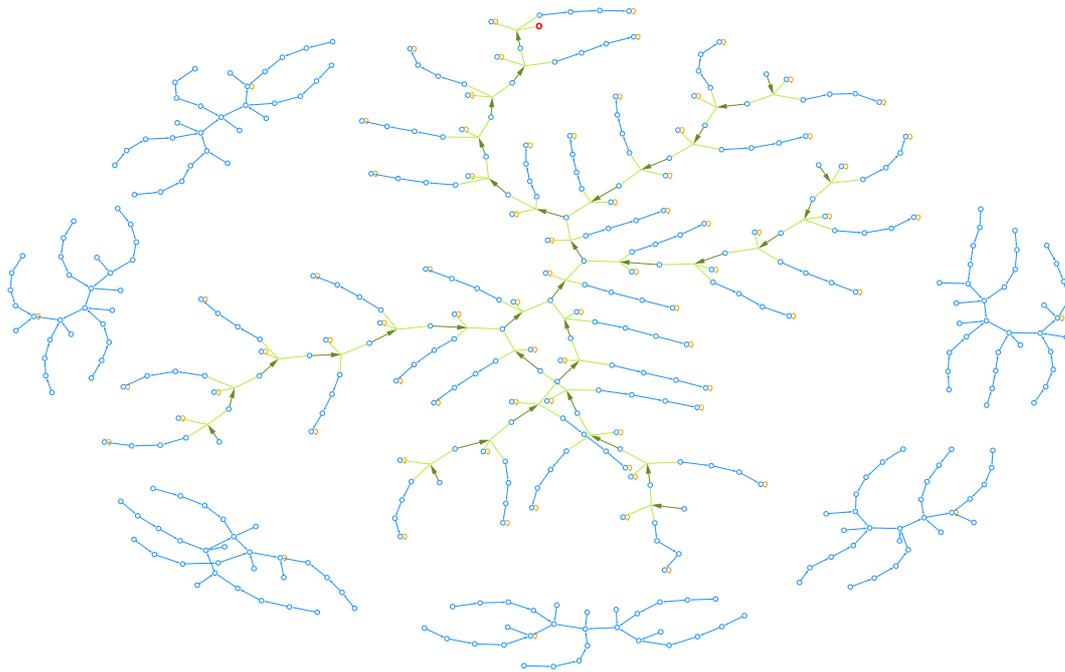


Figura 5.7: A hiperfloresta 2/1 resultante do processamento de um modelo de $S^2 \times S^1$.

Na figura 5.7, por exemplo, podemos ver como uma hiperlinha não-regular (no verde) forma um tipo de floresta.

Prova. (i). Suponha que R possui um circuito (simples) $n_0, n_1, \dots, n_{r+1} = n_0$. Então, há $(r + 1)$ nós e $(r + 1)$ linhas regulares nesse circuito. Porque um nó não pode ser a fonte de duas arestas, cada nó é fonte de exatamente uma linha.

Suponha, sem perda de generalidade, que n_0 é a fonte da linha $\{n_0, n_1\}$. Entretanto, n_1 é incidente a duas linhas do circuito: $\{n_0, n_1\}$ e $\{n_1, n_2\}$. Então, n_1 não é a fonte da primeira aresta, mas de $\{n_1, n_2\}$. Continuando essas deduções, provamos que cada linha do circuito é orientada de tal forma que seja criado um hipercircuito.

Como, por hipótese, HF é uma hiperfloresta, então isso cria uma contradição. Conseqüentemente, R é uma árvore simples.

(ii). Seja k o número de nós de R . Como R é uma árvore, ela possui $(k-1)$ linhas (regulares). Os nós incidentes a estas linhas são nós de R , porque essas arestas são regulares (cf definição 2.7). Conseqüentemente, dentro desses k nós, há $(k-1)$ nós que são a fonte de uma hiperlinha regular. Assim há no máximo $k - (k-1) = 1$ nó em R que é a fonte de um laço ou de um hiperlinha não-regular.

(iii). Seja $l_0, l_1, \dots, l_{r+1} = l_0$ um hipercircuito de $\mathcal{D}(HF)$. Seja n_i o nó compartilhado por l_i e l_{i+1} em HF , que é diferente de n_{i-1} (l_{i-1} é diferente de l_i). Seja n_{t+1} o primeiro nó da seqüência igual a um nó precedente n_s . Então $n_s, n_{s+1}, \dots, n_{t+1} = n_s$ é um hipercircuito de HF . Mas HF é um a hiperfloresta. Conseqüentemente, $\mathcal{D}(HF)$ não tem hipercircuito. Pela orientação definida na seção 2.1.5, podemos deduzir que $\mathcal{D}(HF)$ é uma hiperfloresta. \square

5.2.2

Campo gradiente discreto e hiperflorestas

Definimos um campo gradiente discreto como um casamento acíclico no diagrama de Hasse (cf seção 3.1.3), e uma hiperfloresta como um hipergrafo sem hipercircuitos. Parece natural ver um campo gradiente discreto como uma coleção de hiperflorestas, extraída dos hipergrafos das diferentes camadas do diagrama de Hasse.

Há duas representações dos hipergrafos de índices p e q ($|p - q| = 1$) do diagrama de Hasse: a camada direta p/q e a camada dual q/p . Mas o dual de uma hiperfloresta é também uma hiperfloresta. Conseqüentemente, considerando o campo gradiente discreto como uma coleção dos hiperflorestas é consistente.

Definição 5.7 (Hipergrafos de um campo de vetor combinatório)

Seja K um complexo celular, \mathcal{V} um campo de vetor combinatório definido nele e B' a camada reduzida p/q de \mathcal{V} , com $|p - q| = 1$. O p/q -hipergrafo de \mathcal{V} , H , é a representação por hipergrafo de B' : $H = \mathcal{B}^{-1}(B')$. H é orientado

como segue: o nó fonte de uma hiperlinha de H é o nó que representa a célula casada com ela em \mathcal{V} .

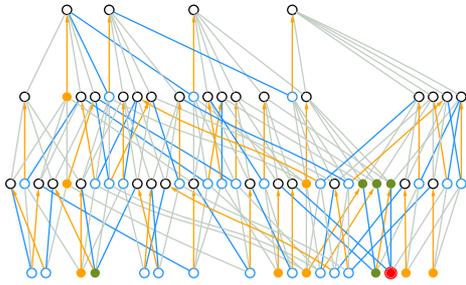


Figura 5.8: O diagrama de Hasse de um campo gradiente discreto em um modelo volumétrico de 4 cubos.

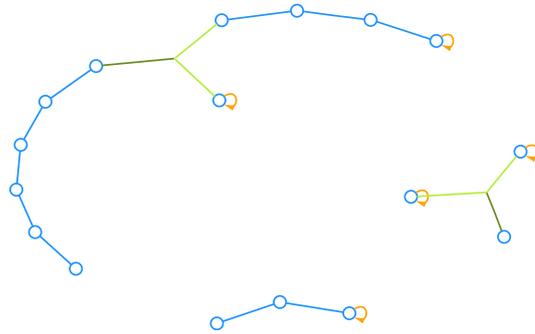


Figura 5.9: A 1/0-hiperfloresta do campo gradiente discreto da figura 5.8.

Por exemplo, figura 5.9 mostra a hiperfloresta do diagrama de Hasse da figura 5.8.

Teorema 5.8 *Seja \mathcal{V} um campo de vetor combinatório. \mathcal{V} é um campo gradiente discreto num complexo celular K de dimensão n se e somente se os $0/1, 1/2, \dots, (n-1)/n$ hipergrafos de \mathcal{V} são hiperflorestas.*

Como o dual de um a hiperfloresta é um a hiperfloresta (proposição 5.6), o teorema é válido para toda a seqüência obtida substituindo o p/q -hipergrafo pelo q/p -hipergrafo de \mathcal{V} .

Prova. A orientação de HF assegura a primeira condição da definição 5.5. Da proposição 5.3, cada célula de K é representada numa das camadas reduzidas e todo \mathcal{V} -caminho é representado num dos hipergrafos. Conseqüentemente, somente precisamos provar que um \mathcal{V} -caminho fechado é um hipercircuito num dos hipergrafos.

Seja $n_0, n_1, \dots, n_{r+1} = n_0$ um hipergrafo orientado no p/q -hipergrafo HF . Da definição 5.4, n_i é a fonte de uma hiperlinha l_i incidente a n_{i+1} . Esta hiperlinha l_i representa uma q -célula β_i de K , e n_i representa uma p -célula α_i . Como n_i é a fonte de l_i , sabemos, pela orientação dada na definição 5.7, que α_i e β_i são incidentes e formam uma par em \mathcal{V} . Então $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$ é um \mathcal{V} -caminho. Como $n_{r+1} = n_0$ e $r \geq 1$, este é um \mathcal{V} -caminho.

Este argumento pode ser invertido para provar que um \mathcal{V} -caminho fechado é um hipercircuito num dos p/q -hipergrafos. \square

Nós definiremos agora o análogo de células críticas para hiperflorestas. Esta será a base do algoritmo do capítulo 6. Um elemento crítico de um campo gradiente discreto será representado por uma componente regular de uma

hiperfloresta. Por exemplo, na figura 5.7, o nó crítico em vermelho corresponde a uma componente crítica da hiperfloresta (ligando 3 nós).

Definição 5.9 (Componente crítica) *Uma componente regular de uma hiperfloresta será chamada de crítica se não possuir um nó fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular.*

Proposição 5.10 *Seja HF a p/q -hiperfloresta de K . O número de componentes críticas de HF é exatamente o número $m_p(K)$ de p -células críticas de K .*

Prova. Pela proposição 5.3 cada p -célula crítica é representada tanto em HF quanto na camada reduzida B' correspondente.

Os nós isolados de B' não são casados com nenhuma célula de K , e ficam como nós isolados em HF . Aqueles nós são componentes críticas, de acordo com a definição 5.9.

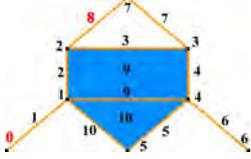
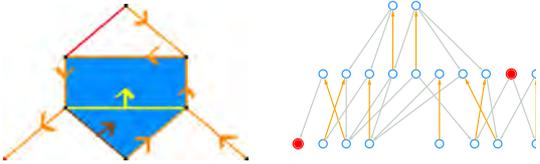
Sabemos da proposição 5.6 que cada componente regular R é uma árvore simples. Numa tal árvore com k nós, há $(k-1)$ linhas regulares. Todas as linhas são orientadas, então dentro desses k nós, $(k-1)$ são fontes de linhas de R , e portanto, não são críticos. Se R não for uma componente crítica, há exatamente um nó de R que é fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular, i.e. não é crítica.

Se R for uma componente crítica, este nó nem é a fonte de um laço nem de uma hiperlinha não-regular. Pela definição 2.7 de uma componente regular, este nó não é incidente a uma hiperlinha regular fora de R . Cada aresta de R já é casada com outro nó. Então, este nó não é casado em B' . Pela definição 5.2, não pode ser casado com uma célula fora de B' . Conseqüentemente, este nó não é casado, i.e. é uma célula crítica. \square

5.2.3

Três pontos de vista sobre a otimalidade na teoria de Morse discreta

Os teoremas 3.8, 3.9 e 5.8 provam a equivalência dos elementos construtivos da teoria de Morse discreta:

<p>Função de Morse discreta</p>	<p>Uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, quase-crescente com a dimensão.</p>	
<p>Campo gradiente discreto</p>	<p>Um casamento acíclico no diagrama de Hasse.</p>	
<p>Coleção de hiperflorestas</p>	<p>Hipergrafos sem hipercircuitos.</p>	

No capítulo 4, estávamos principalmente interessados em otimalidade: a teoria de Morse é uma ferramenta poderosa para descrever propriedades topológicas, e um número pequeno de células críticas dá uma informação mais concisa. Esta caracterização pode ser feita em termos de hiperflorestas: uma função de Morse discreta ótima terá o menor número possível de componentes críticas nas hiperflorestas extraídas das camadas p/q . Há tantos elementos não-críticos numa hiperfloresta quanto hiperlinhas (os elementos não-críticos são casados com uma hiperlinha incidente). Conseqüentemente, uma função de Morse discreta ótima tem o número máximo de hiperlinhas em cada um das suas hiperflorestas. Conseqüentemente, o problema de encontrar uma hiperfloresta máxima num hipergrafo também é MAX-SNP difícil.

5.3

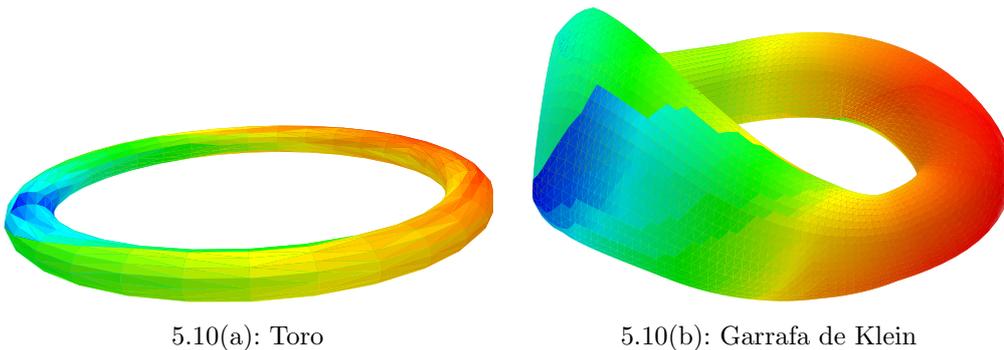
Números de Morse discretos como invariantes topológicos para 3-variedades

Sabemos que os elementos críticos de uma função de Morse em K estão relacionados à topologia de K . Mas será que aqueles elementos são uma caracterização completa da topologia de K ? Já sabemos uma parte da resposta. E mostraremos nesta seção que os números discretos de Morse são invariantes topológicos para 3-variedades.

5.3.1

Exatidão dos números de Morse

Definição 5.11 (Números de Morse) *O número de Morse de índice p $\mathcal{M}_p(K)$ de um complexo celular K é o menor número possível de células críticas de dimensão p , considerando todas as funções de Morse possíveis definidas em K .*



5.10(a): Toro

5.10(b): Garrafa de Klein

Figura 5.10: Um toro e uma garrafa de Klein com ambos um campo gradiente discreto ótimo: 1 vértice crítico, 2 arestas críticas, 1 face crítica.

A teoria de Morse é relacionada ao tipo de homotopia simples [5] de um espaço topológico. Por exemplo, uma função de Morse ótima definida num nó e no nó trivial causará a mesma decomposição. Além disso, se considerarmos somente o número de células críticas, e não suas incidências, não podemos distinguir entre um toro e uma garrafa de Klein (figuras 5.10). O tipo de homotopia pode fazer tal distinção. Entretanto, nós sabemos do teorema 3.16 que dão uma caracterização integral das esferas. Finalmente, os números de Morse são mais precisos do que os números de Betti: considere a esfera homológica de Poincaré. O número de Morse para este espaço não pode ser 1-0-0-1, como os números de Betti, porque a esfera homológica não é homotópica a uma esfera. De fato, nosso algoritmo do capítulo 6 dá a resposta ótima 1-2-2-1 (o grupo fundamental possui 2 geradores).

Aqueles números de Morse poderiam ser vistos como uma informação entre a homologia e a homotopia simples.

5.3.2

Prova da invariância para 3-variedades

Os números discretos de Morse são ligados a homotopia simples. Para provar sua invariância, poderíamos provar que complexos celulares topologicamente equivalentes são simplesmente homotópicos, e que os espaços simplesmente homotópicos têm os mesmos números de Morse discretos. Infelizmente, a primeira afirmação não é verdade no caso geral. Usaremos os seguintes teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas respectivamente dentro [27] o [5, 25.1].

Teorema 5.12 (Hauptvermutung para 3-variedades) *Qualquer par de triangulações de uma 3-variedade topológica tem uma subdivisão em comum.*

Teorema 5.13 *Se K_* é uma subdivisão de K , então K e K_* são simplesmente homotópicos.*

A prova da invariância segue agora:

Teorema 5.14 (Invariância dos números de Morse discretos) *Sejam K e L dois complexos celulares sobre 3-variedades homeomorfas. Então para todo p , $\mathcal{M}_p(K) = \mathcal{M}_p(L)$.*

Prova. Seja f uma função de Morse discreta ótima definida em K . Provaremos o teorema pelo absurdo. Suponhamos que o número de Morse de índice n de L seja maior do que o de K : $\mathcal{M}_n(L) > m_n(f)$. Vamos construir uma função de Morse discreta g em L com o mesmo número de elementos críticos que f .

Pelo teorema 5.12, existe uma subdivisão comum a K e L . Podemos deduzir do teorema 5.13 que L pode ser obtida a partir de K por um número finito de colapsos e extensões.

Se M_* é uma extensão de M , e f é uma função de Morse discreta definida em M , sabemos da seção 3.2.3 que podemos definir uma função de Morse discreta f_* em M_* com o mesmo número de elementos críticos que f . Se M colapsa em M_* , sabemos pela proposição 3.15 que podemos estender f_* em M sem adicionar um elemento crítico.

Conseqüentemente, nós podemos construir uma função de Morse discreta g em L com o mesmo número de elementos críticos que f . isto dá uma contradição à suposição que $\mathcal{M}_n(L) > m_n(f)$. \square

6

Construção de funções de Morse discretas

6.1

Estrutura de dados

Neste capítulo, queremos construir uma função de Morse discreta num complexo celular K . Tal função atribui a cada célula de K um valor real, então precisamos pelo menos uma estrutura de célula e uma entrada para cada célula. A estrutura da célula será composta dos seguintes campos:

- um identificador (unsigned long)
- a dimensão (unsigned char)
- o valor da função de Morse (unsigned long)
- o valor do campo gradiente discreto (0 ou identificador da célula)
- uma lista com os identificadores das células da estrela
- uma lista com os identificadores das células do bordo
- um indicador para indicar se a aresta é uma linha numa hiperfloresta
- um indicador “não-regular”
- um indicador “laço”
- um indicador “crítico”
- um indicador “visitado” para a travessia no grafo
- um identificador de componente para a criação da floresta

O identificador de componente será usado quando incluir a geometria para criar uma floresta geradora mínima, e usado como uma estrutura união-busca [31]. Uma estrutura de complexo celular será uma matriz com cada célula por dimensão. Usaremos também uma matriz com as coordenadas dos vértices para visualizar aqueles modelos.

6.2

Algoritmos para a construir funções Morse discretas a partir de uma hiperfloresta

Os algoritmos introduzidos aqui são extensões do algoritmo da seção 4.2. São também uma dedução natural da teoria desenvolvida no capítulo 5.

Os algoritmos processam cada camada ou camada dual do diagrama de Hasse. Para cada uma delas, eles definem uma hiperfloresta extraída do hipergrafo associado á camada. Depois, eles dão uma orientação a essas hiperflorestas, i.e. definem um campo gradiente discreto. Ao mesmo tempo, os algoritmos podem definir a função de Morse discreta em cada célula.

6.2.1

Hipergrafo das componentes regulares

Construir uma hiperfloresta numa componente regular pode ser feito da mesma maneira que se constrói uma árvore geradora [17]. O problema reside nas hiperlinhas que ligam estas componentes regulares. Podemos representá-los, de novo, com um hipergrafo. Esta redução é o princípio de uma das heurísticas da seção 6.4.2.

Definição 6.1 (Hipergrafo das componentes regulares) *Seja H um hipergrafo. O hipergrafo $\mathcal{C}(H)$ das componentes regulares de H é o hipergrafo com um nó para cada componente regular de H , e cujas hiperlinhas são os laços e as hiperlinhas não-regulares de H .*

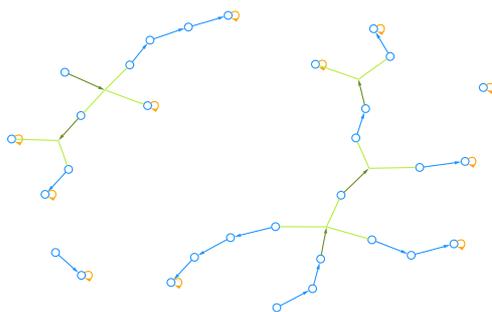


Figura 6.1: Uma 1/0-hiperfloresta de uma pilha de $3 \times 3 \times 1$ cubos.

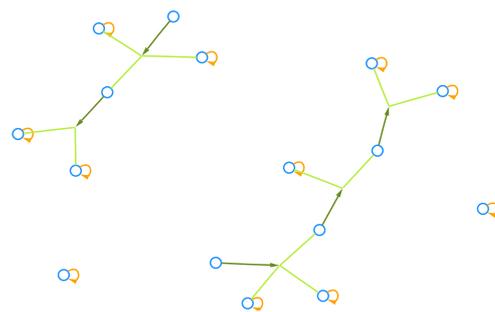


Figura 6.2: O hipergrafo das componentes regulares da figura 6.1.

Observe que o hipergrafo das componentes regulares de uma hiperfloresta HF também é uma hiperfloresta (cf figuras 6.1 e 6.2). Nesse caso, sabemos da seção 5.2.3 que há exatamente $r - h$ p -células críticas, onde r é o número de componentes regulares de uma p/q -hiperfloresta, e l seu número de laços e hiperlinhas não-regulares.

6.2.2 Escolha das raízes

Para uma hiperfloresta HF dado, processaremos seus componentes regulares da raiz até as folhas. Conseqüentemente, precisamos escolher uma componente regular R na hiperfloresta $\mathcal{C}(HF)$ das componentes regulares de HF .

Em cada componente conexa de $\mathcal{C}(HF)$, há uma componente crítica R ou pelo menos um laço incidente a uma componente regular R . Caso contrario, ela teria o mesmo número de nós e de hiperlinhas não-regulares. Como um nó só pode ser a fonte de apenas uma hiperlinha, $\mathcal{C}(HF)$ possuiria um hipercircuito. Mas $\mathcal{C}(HF)$ é uma hiperfloresta, o que gera uma contradição.

Em cada componente regular R , escolheremos uma raiz. Se a componente for uma componente crítica, a raiz pode ser qualquer nó de R . Se a componente não for crítica, sabemos da definição 5.9 que exatamente um nó é a fonte de um laço ou de uma hiperlinha não-regular. A raiz de R será esse nó.

A componente regular raiz R e as raízes das componentes regulares podem ser escolhidas entre os diferentes nós incidentes a um laço para satisfazer a restrições geométricas (cf seção 6.4.4).

6.2.3 Construção de um campo gradiente discreto

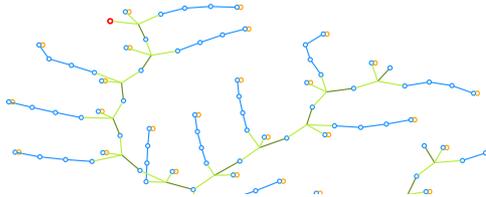


Figura 6.3: Uma parte de uma hiperfloresta 2/1 de $S^2 \times S^1$.

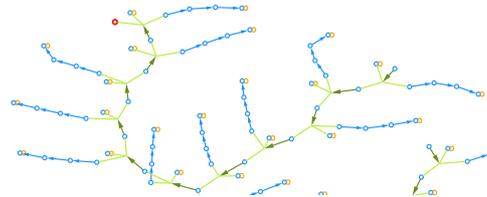


Figura 6.4: Orientação do hipergrafo da figura 6.3.

Para cada componente regular R , precisamos casar cada um dos seus nós, exceto um se R for crítica. Por exemplo, figura 6.4 mostra o resultado deste processamento no modelo da figura 6.3. Escolhemos primeiramente um nó raiz na componente como descrito na seção 6.2.2. Casamos depois as folhas de R com a sua única linha incidente. Considerando $R^{(1)}$ como sendo composta pelos nós e das linhas não casadas de R , casamos as folhas de $R^{(1)}$ com a sua única linha incidente. Repetiremos o processo em $R^{(2)}$ como sendo composta pelos elementos não casados de $R^{(1)}$, e assim por diante.

Após este processamento, o último nó é a raiz. Se a componente for crítica, essa fica não casada e o nó raiz será crítico. Se a componente não for

crítica, casamos este nó raiz com a sua hiperlinha não regular ou o seu laço incidente. Assim, cada hiperlinha da hiperfloresta e cada nó, exceto um para cada componente crítica, terá sido casado.

6.2.4 Construção de uma função de Morse discreta

Discutiremos as diferentes heurísticas usadas para a criação de hiperflorestas na seção 6.4. Dependendo da heurística usada, dois tipos de hiperflorestas podem aparecer: hiperfloresta direta (do tipo $p/(p+1)$) e hiperfloresta dual (do tipo $(p+1)/p$).

Hiperfloresta direta. Numa hiperfloresta direta HF , os nós representam células de dimensão menor que a dimensão das células representadas pelas hiperlinhas. Conseqüentemente, cada nó de HF deve ser atribuído um valor menor do que as suas linhas incidentes. Isto será chamado de construção primária.

Hiperfloresta dual. Numa hiperfloresta dual HF , os nós representam células de dimensão maior que a dimensão das células representadas pelas hiperlinhas. Conseqüentemente, cada nó de HF deve ser atribuído um valor maior do que as suas linhas incidentes. Podemos transformar a construção primária para satisfazer essa observação, bastando considerar a função de Morse discreta $g : x \mapsto C - f(x)$, e escolhendo C de tal forma que $\text{Img} = \text{Im}f$.

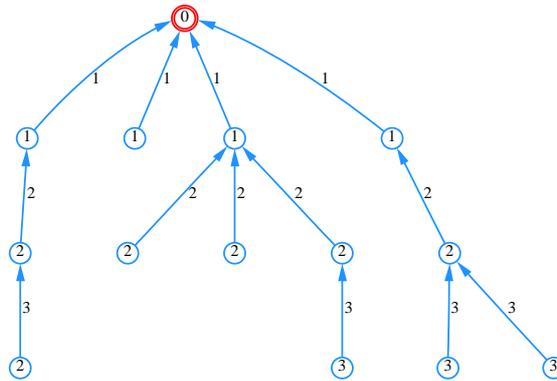


Figura 6.5: A distância em linhas num pequeno exemplo de árvore.

Dentro da componente regular raiz R de HF , atribuímos o valor c para o nó raiz e o seu laço ou hiperlinha não-regular incidente se existir (cf seção 6.2.2). Depois, atribuímos a cada nó de R a sua distância em linhas (cf figura 6.5) do nó raiz de R adicionado de c , e a cada linha de R o valor máximo dos seus dois nós incidentes, da mesma maneira que na etapa 4 do algoritmo da seção 4.2.

Se a componente regular raiz R for isolada em $\mathcal{C}(HF)$, já teríamos atribuído todos os elementos de $\mathcal{C}(HF)$. Se essa componente raiz não estiver isolada, repetimos o processo acima numa componente regular incidente a essa componente raiz, com o valor inicial de c igual ao maior valor já atribuído na hiperfloresta. Processando cada componente conexa de $\mathcal{C}(HF)$ dessa maneira, atribuímos a cada elemento de HF o valor da função de Morse discreta.

Entretanto, para assegurar as desigualdades da definição 3.6, devemos evitar que uma célula de uma outra camada do hipergrafo interfira com as células do hipergrafo que consideremos. Uma maneira simples de conseguir isso é de dar ao valor inicial de c o número de células de K de dimensão inferior ou igual a p .

Observe que esta função de Morse discreta terá os mesmos elementos críticos que o campo gradiente discreto da seção 6.2.3. Isto dá uma outra prova do teorema 3.9: considerando um campo gradiente discreto, podemos construir seu diagrama de Hasse e uma coleção de hiperflorestas diretas das camadas $0/1, 1/2, \dots, (n-1)/n$. Então nós podemos construir a função de Morse discreta como acima, e provamos assim o teorema.

6.3

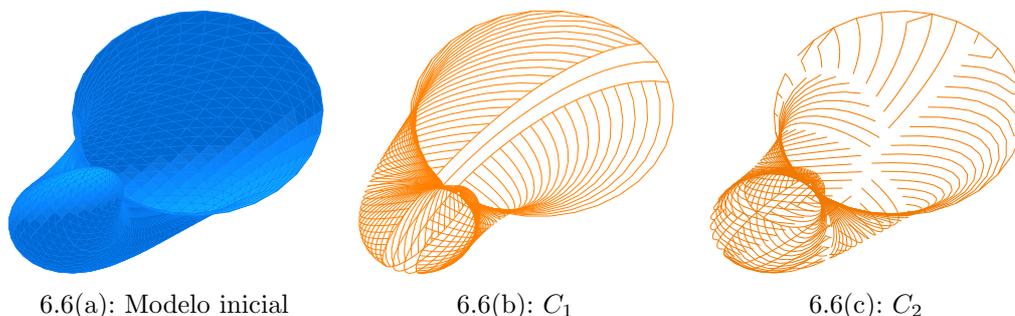
Considerações sobre otimalidade

A parte mais difícil do algoritmo é criar a hiperfloresta. Como nós vimos nas seções 6.2.3 e 6.2.4, não necessitamos nos importar com a orientação. Nosso objetivo é alcançar a otimalidade. Infelizmente, isto não é possível em tempo polinomial (a menos que $P=NP$). Além disso, nós vimos na seção 3.4.3 que qualquer aproximação polinomial pode dar um resultado arbitrariamente longe do ótimo. Conseqüentemente, nós escolhemos estender nosso algoritmo do capítulo 4, que é provado ser ótimo para 2-variedades.

6.3.1

Validez da otimização local

Como vimos na seção 5.3, o número mínimo de células críticas é um invariante, pelo menos para 3-variedades. Conseqüentemente, maximizar o número de hiperlinhas em cada camada do diagrama de Hasse dá o máximo global:



6.6(a): Modelo inicial

6.6(b): C_1

6.6(c): C_2

Figura 6.6: Um espaço contrátil e os complexos celulares complementares C_1 e C_2 de duas hiperflorestas HF_1 e HF_2 definidas nele.

Considere duas diferentes $n/(n-1)$ -hiperflorestas HF_1 e HF_2 dando o mesmo número de células críticas (ou de componentes críticas). Agora, seja C_1 e C_2 os dois complexos celulares representados por células de dimensão inferiores ou iguais a n e cujas $(n-1)$ -células não pertencem a HF_1 e HF_2 respectivamente (cf figura 6.6). Dos teoremas 3.10 e 3.11, C_1 e C_2 têm o mesmo tipo de homotopia simples. Conseqüentemente, têm o mesmo número discreto de Morse. Deduzimos por indução que, no caso das 3-variedades, maximizar o número de hiperlinhas em cada hiperfloresta gera uma função de Morse discreta ótima.

6.3.2

Componentes regulares

Cada componente regular R de H é determinado antes de qualquer construção de HF . Para qualquer hiperfloresta HF , considere o grafo simples RT cujos nós são os n nós de R e cujas linhas são as hiperlinhas regulares de HF incidentes àqueles nós. Como R é uma componente regular de H , não há hiperlinha regular incidente a um nó de R e a um nó fora de R , então RT é bem definido. Como HF é um a hiperfloresta, não há nenhum circuito em RT : RT é uma coleção de k árvores. Então RT tem $(n - k)$ linhas. O número máximo de linhas será então para k mínimo, i.e. quando RT for uma árvore (conexa) só. Este ótimo pode ser alcançado construindo uma árvore geradora em cada componente regular de H [17].

6.3.3 Laços

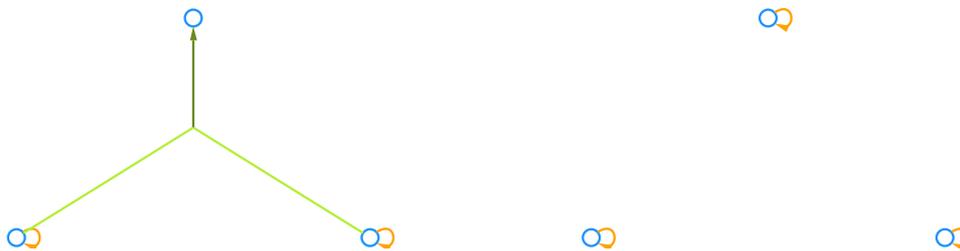


Figura 6.7: Substituindo uma hiperlinha não-regular por um laço.

Cada componente conexa de $\mathcal{C}(HF)$ é crítica ou incidente a um laço ou a uma hiperlinha não-regular. O problema das hiperlinhas regulares foi resolvido de maneira ótima, e nós queremos agora maximizar o número de laços e de hiperlinhas não-regulares de HF . Se uma componente crítica for incidente a um laço em H , então adicionar este laço à HF gera outra hiperfloresta com uma hiperlinha a mais e uma componente crítica a menos. Se uma componente regular for incidente a um laço l em H e a uma hiperlinha não-regular nl em H e HF , então substituindo nl por l em HF gera uma outra hiperfloresta com o mesmo número de hiperlinhas (e menos riscos de criar hipercircuitos). Esse processamento é ilustrado na figura 6.7. Conseqüentemente, podemos sempre gerar uma hiperfloresta HF com o maior número possível de hiperlinhas de tal forma que cada componente regular incidente a um laço em H seja incidente a um laço em HF .

6.4 Diferentes heurísticas

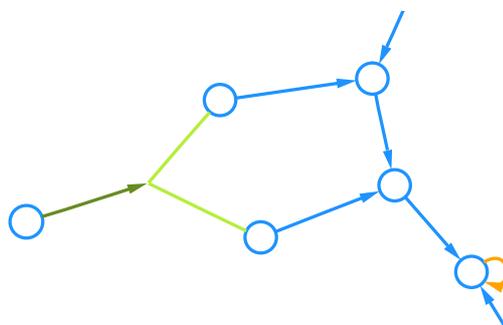


Figura 6.8: Detalhe da inserção de uma hiperlinha na hiperfloresta dual surgindo de um modelo de toro sólido.

Na seção 6.3, provamos que alcançar um campo gradiente discreto ótima pode ser obtidos, pelo menos para 3-variedades, maximizando o número de

hiperlinhas das hiperflorestas HF extraídas das camadas H do diagrama de Hasse (definição 5.1). Este máximo sempre pode ser alcançado, para cada componente regular R de H , gerando uma árvore geradora, adicionando as linhas desta árvore à HF , e se R for incidente a um laço, adicionando-o à HF . Depois, podemos processar as hiperlinhas não-regulares H . Queremos que HF tenha o maior número possível de hiperlinhas, porque isso minimizará o número de células críticas. Por exemplo, adicionar a hiperlinha no lado esquerdo da figura 6.8 permite casar o nó da esquerda. Assim, haverá menos nós críticos (não casados).

6.4.1

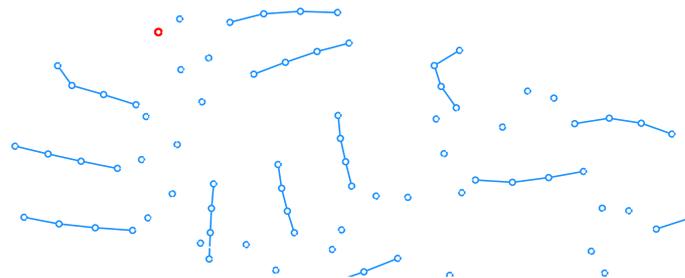
Esboço do algoritmo

Devemos primeiramente escolher quais camadas do diagrama de Hasse processaremos. De fato, podemos processar todas elas, independentemente da sua representação direta ou sua dual do hipergrafo. Sabemos que o pseudografo dual de uma variedade não tem hiperlinha não-regular, e que o hipergrafo direto da primeira camada é um grafo simples. Esses dois casos simples poderiam ser úteis porque construção de hiperflorestas é linear nos pseudografos e quadrática para hipergrafos gerais. Por exemplo, um modelo volumétrico podia ser processado pela seguinte seqüência de camadas: 0/1.1/2.3/2; ou 3/2.2/1.0/1.

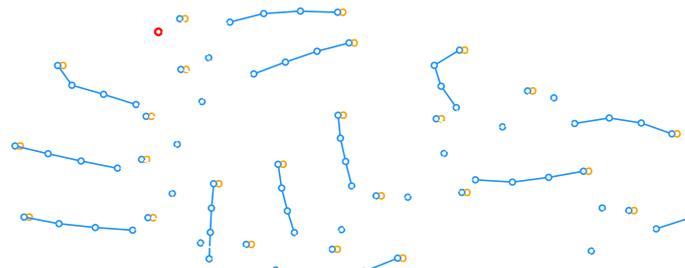
Neste trabalho, todos os algoritmos para extrair uma hiperfloresta HF de um hipergrafo H executam as seguintes etapas (cf figuras 6.9(a), 6.9(b) e fig:s2xs1 2):

1. Inicie HF com os nós de H .
2. Gere uma árvore geradora em cada componente regular de H .
3. Adicione todas as arestas dessas árvores a HF .
4. Se uma componente regular for incidente a alguns laços, adicione um deles a HF .
5. Processe as hiperlinhas não-regulares de H .

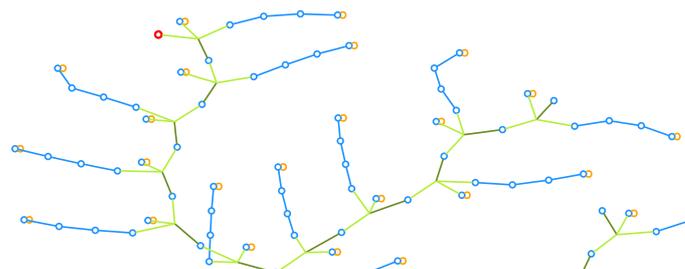
As 4 primeiras etapas do algoritmo são lineares, e garantidas serem ótima em todos os casos. A última etapa requer alguma heurística como será detalhado em seguir.



6.9(a): etapas 1–3: Floresta com as componentes regulares



6.9(b): etapa 4: Adição de laços



6.9(c): etapa 5: Adição de hiperlinhas não regulares

Figura 6.9: Etapas do algoritmo numa parte da hiperfloresta 2/1 de $S^2 \times S^1$.

6.4.2 Simplificação de hipergrafos

Seja HF a hiperfloresta sendo criada a partir do hipergrafo H . Há uma célula crítica em HF para cada uma das suas componentes críticas (proposição 5.10).

Há um caso óbvio para hiperlinhas não-regulares. Uma hiperlinha não-regular nl pode criar um hipercircuito numa componente regular R quando é incidente mais de uma vez a R^1 , e quando a fonte de nl é um nó de R . Uma hiperlinha pode ser adicionada à HF somente se é incidente à pelo menos uma componente crítica. Se uma hiperlinha cria um laço em todas as componentes críticas de HF a qual está incidente, podemos removê-la de H porque nunca vai fazer parte de HF . Esse critério é satisfeito se a hiperlinha não for incidente

¹hiperlinhas são famílias de nós, e não conjuntos de nós

a uma componente crítica.

Há duas configurações óbvias para uma componente regular R de H : quando a componente regular é incidente a um laço e quando for incidente a somente uma hiperlinha. No primeiro caso, podemos adicionar o laço a HF , e remover R e o seu laço de H (etapa 4). O segundo caso, se a hiperlinha não criar um hipercircuito em R , a adicionamos a HF , e removemos R e esta hiperlinha de H . Os dois grafos da figura 6.7 são óbvios nesse sentido.

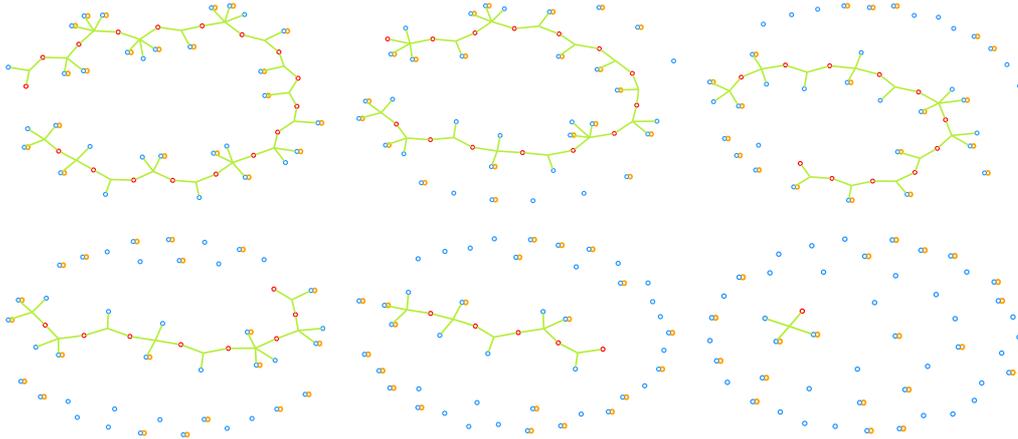


Figura 6.10: Simplificações sucessivas de um hipergrafo (3 por a etapa).

Simplificar completamente o hipergrafo $\mathcal{C}(H)$ das componentes regulares (cf seção 6.2.1) requer um tempo de execução quadrático (cf figura 6.10). Entretanto, se algumas hiperlinhas de $\mathcal{C}(HF)$ não forem removidas, precisamos de algum processamento adicional para concluir. Podemos ou usar um algoritmo exponencial para alcançar otimalidade, se o tamanho do hipergrafo o permite, ou usar uma das outras heurísticas para completar a hiperfloresta.

6.4.3 Métodos gulosos

Seja HF a hiperfloresta que está sendo criada a partir do hipergrafo H . Podemos tentar adicionar as hiperlinhas de H a HF na ordem que aparecem após uma prévia ordenação. Os critérios para uma hiperlinha não ser adicionada a HF (e para ser removido de H) são os casos óbvios da seção 6.4.2: quando é incidente mais de uma vez a cada componente crítica incidente.

A prioridade nas arestas (que aparece na ordenação) pode ser completamente arbitrária, porque não há nenhuma aproximação polinomial boa. Testamos 3 delas:

- número mínimo de componentes regulares incidentes.

- número mínimo de componentes críticas incidentes em HF .
- número máximo de componentes não-críticas incidentes em HF .

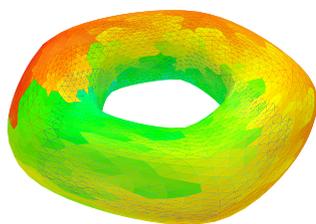
O problema que aparece com esses critérios é que a prioridade deve ser calculada cada vez que uma hiperlinha é adicionada à HF (porque alguns componentes mudam de estado entre crítica a não-crítica). Assim as complexidades de tais heurísticas são quadráticas, como aquela da seção 6.4.2.

6.4.4 Adicionando informações geométricas

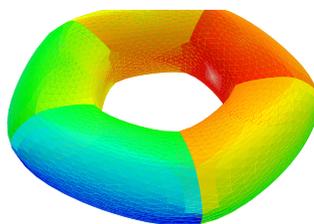
Do mesmo jeito que no algoritmo do capítulo 4 (cf seção 6.4.4), podemos impor algumas restrições sobre funções de Morse discretas. Entretanto, existe uma diferença com esse caso: a geometria pode influenciar o resultado, porque a hiperfloresta de uma camada será diferente se a hiperfloresta da camada anteriormente processada corresponde a um mínimo geométrico (cf tabelas 6.21 a 6.26).

Há diferentes restrições que podemos adicionar sobre a hiperfloresta HF :

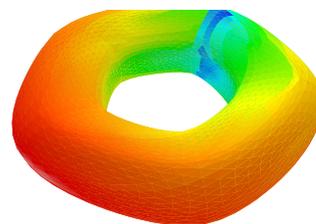
- A árvore geradora das componentes regulares de HF pode ser escolhida como sendo uma árvore geradora mínima.
- Os laços adicionados às componentes regulares de HF podem minimizar a mesma função, a fim de ter a raiz das árvores geradora em uma posição mínima.
- As raízes das árvores geradoras das componentes críticas de HF podem também estar numa posição mínima.
- As prioridades usadas nas heurísticas gulosas (cf seção 6.4.3) podem ser derivadas da mesma função geométrica.



6.11(a): Sem restrições geométricas



6.11(b): Distância mínima à origem



6.11(c): Coordenada mínima Z

Figura 6.11: Campos gradientes discretos com restrições geométricas.

6.5 Resultados

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	1208	530	14	402
Dual	7258	728	8	934
Sim Direto	3580	658	50	702
Sim Dual	3842	566	6	722

Tabela 6.1: Número de células redundantes para cada método, no painel dos modelos das tabelas 6.2 e 6.3. Morse Robusto: 56.

Comparamos as diferentes heurísticas da seção 6.4 em dois tipos de modelos: os exemplos de Hachimori [15] (principalmente não-constructivos, cf tabela 6.2) e outros modelos volumétricos do laboratório Mat&Mídia (tabela 6.3). As diferentes heurísticas que implementamos são:

- Direto: prosseguindo as camadas 0/1, 1/2, 2/3.
- Dual: prosseguindo as camadas 3/2, 2/1, 1/0.
- Sim Direto: prosseguindo as camadas 0/1, 1/2, 3/2.
- Sim Dual: prosseguindo as camadas 3/2, 2/1, 0/1.
- HG Simpl: somente simplificando o hipergrafo, sem pós-processamento.
- Min Def: prioridade às hiperlinhas incidentes ao menor número de componentes críticas.
- Min Deg: prioridade às hiperlinhas de grau mínimo.
- Max Cpl: prioridade às hiperlinhas incidentes ao maior número de componentes não-críticas.

Adicionamos uma comparação simples chamada “Morse Robusto”, que é uma versão reforçada de Direto/Min Def. O algoritmo é ótimo para superfícies no caso de Sim Dual. Os resultados daqueles processamentos são dados na tabela 6.1. Os resultados detalhados aparecem nas tabelas 6.4 a 6.26.

Para ilustrar o efeito das restrições geométricas na criação das hiperflorestas, aplicamos diferentes restrições geométricas nos modelos volumétricos da tabela 6.3:

- Sem restrições geométricas: as hiperlinhas aparecem na ordem da importação modelo (cf figura 6.11(a)).

- Distância mínima à origem: as hiperlinhas são ordenadas primeiramente pela distância a um ponto de referência, e as árvores geradoras são geometricamente mínimas, com a raiz a mais próxima da origem (cf figura 6.11(b)).
- Coordenada Z mínima: as hiperlinhas são ordenadas primeiramente pela altura, e as árvores geradoras são geometricamente mínimas, com a raiz na menor altura possível (cf figura 6.11(c)).

Modelo	Topologia	Número de células	Euler	Robusto	Melhor Morse
bing	3-bola	(480,2511,3586,1554)	1	(1,2,2,0)	(1,1,1,0)
bjorner	plano pro- jetivo + uma face	(6,15,11)	2	(1,0,1)	
c-ns	contrátil	(12,37,26)	1	(1,2,2)	(1,1,1)
c-ns2	contrátil	(13,39,27)	1	(1,2,2)	(1,0,0)
c-ns3	contrátil	(10,31,22)	1	(1,1,1)	
dunce hat	Dunce hat	(8,24,17)	1	(1,1,1)	
gruenbaum	3-bola	(14,54,70,29)	1	(1,0,0,0)	
knot	3-bola	(380,1929,2722,1172)	1	(1,1,1,0)	
lockerberg	3-esfera	(12,60,96,48)	0	(1,0,0,1)	
mani-walkup- C	3-esfera	(20,126,212,106)	0	(1,0,0,1)	
mani-walkup- D	3-esfera	(16,106,180,90)	0	(1,0,0,1)	
nonextend	contrátil	(7,19,13)	1	(1,1,1)	(1,0,0)
poincare	esfera ho- mologica	(16,106,180,90)	0	(1,2,2,1)	
projective	plano pro- jetivo	(6,15,10)	1	(1,1,1)	
rudin	3-bola	(14,66,94,41)	1	(1,0,0,0)	
simon	contrátil	(7,20,14)	1	(1,1,1)	(1,0,0)
ziegler	3-esfera	(10,38,50,21)	1	(1,0,0,0)	

Tabela 6.2: Resultados nos modelos de Hachimori [15].

Modelo	Topologia	Número de células	Euler	Robusto	Melhor Morse
Pilha de cubos	contrátil	(572,1477,1266,360)	1	(1,0,0,0)	
s2xs1	$S^2 \times S^1$	(192,588,612,216)	0	(1,3,4,2)	(1,1,1,1)
s3	3-esfera	(162,522,576,216)	0	(1,1,1,1)	(1,0,0,1)
solid 2sphere	2-esfera	(64,144,108,26)	2	(1,0,1,0)	
Furch knotted ball	3-bola	(600,1580,1350,369)	1	(1,1,1,0)	

Tabela 6.3: Resultados em modelos volumétricos.

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,526,572,46)	(1,119,119,0)	(1,1,1,0)	(1,84,88,4)
Dual	(410,1084,675,0)	(32,186,155,0)	(3,5,3,0)	(40,179,140,0)
Sim Direto	(1,526,526,0)	(1,119,119,0)	(1,1,1,0)	(1,84,84,0)
Sim Dual	(1,675,675,0)	(1,155,155,0)	(1,3,3,0)	(1,140,140,0)

Tabela 6.4: bing. Células: (480,2511,3586,1554). Morse Robusto: (1,2,2,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,1,2)	(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,1)
Dual	(2,2,2)	(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,1)
Sim Direto	(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,1)
Sim Dual	(1,1,2)	(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,1)

Tabela 6.5: bjoner. Células: (6,15,11). Morse Robusto: (1,0,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,8,8)	(1,2,2)	(1,2,2)	(1,1,1)
Dual	(2,2,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Direto	(1,3,3)	(1,2,2)	(1,2,2)	(1,2,2)
Sim Dual	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)

Tabela 6.6: c-ns. Células: (12,37,26). Morse Robusto: (1,2,2).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,3,3)	(1,2,2)	(1,2,2)	(1,2,2)
Dual	(3,2,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)
Sim Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Dual	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)

Tabela 6.7: c-ns2. Células: (13,39,27). Morse Robusto: (1,2,2).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,5,5)	(1,2,2)	(1,1,1)	(1,1,1)
Dual	(2,2,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Dual	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)

Tabela 6.8: c-ns3. Células: (10,31,22). Morse Robusto: (1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,7,7)	(1,2,2)	(1,1,1)	(1,2,2)
Dual	(2,2,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Dual	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)

Tabela 6.9: dunce hat. Células: (8,24,17). Morse Robusto: (1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,5,5,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)
Dual	(10,18,9,0)	(1,2,2,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)
Sim Direto	(1,5,5,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)
Sim Dual	(1,9,9,0)	(1,2,2,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)

Tabela 6.10: gruenbaum. Células: (14,54,70,29). Morse Robusto: (1,0,0,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,408,439,31)	(1,83,83,0)	(1,2,2,0)	(1,75,77,2)
Dual	(270,734,465,0)	(25,134,110,0)	(2,3,2,0)	(21,120,100,0)
Sim Direto	(1,408,408,0)	(1,83,83,0)	(1,2,2,0)	(1,75,75,0)
Sim Dual	(1,465,465,0)	(1,110,110,0)	(1,2,2,0)	(1,100,100,0)

Tabela 6.11: knot. Células: (380,1929,2722,1172). Morse Robusto: (1,1,1,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,7,20,14)	(1,2,3,2)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)
Dual	(11,23,13,1)	(1,2,2,1)	(1,0,0,1)	(1,2,2,1)
Sim Direto	(1,7,7,1)	(1,2,2,1)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)
Sim Dual	(1,13,13,1)	(1,2,2,1)	(1,0,0,1)	(1,2,2,1)

Tabela 6.12: lockeberg. Células: (12,60,96,48). Morse Robusto: (1,0,0,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,31,68,38)	(1,10,16,7)	(1,0,0,1)	(1,5,7,3)
Dual	(19,56,38,1)	(2,11,10,1)	(1,0,0,1)	(2,9,8,1)
Sim Direto	(1,31,31,1)	(1,10,10,1)	(1,0,0,1)	(1,5,5,1)
Sim Dual	(1,38,38,1)	(1,10,10,1)	(1,0,0,1)	(1,8,8,1)

Tabela 6.13: mani-walkup-C. Células: (20,126,212,106). Morse Robusto: (1,0,0,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,26,58,33)	(1,7,10,4)	(1,0,0,1)	(1,2,4,3)
Dual	(16,54,39,1)	(2,8,7,1)	(1,0,0,1)	(1,9,9,1)
Sim Direto	(1,26,26,1)	(1,7,7,1)	(1,0,0,1)	(1,2,2,1)
Sim Dual	(1,39,39,1)	(1,7,7,1)	(1,0,0,1)	(1,9,9,1)

Tabela 6.14: mani-walkup-D. Células: (16,106,180,90). Morse Robusto: (1,0,0,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Dual	(2,1,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)
Sim Direto	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)
Sim Dual	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)

Tabela 6.15: nonextend. Células: (7,19,13). Morse Robusto: (1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,28,63,36)	(1,9,12,4)	(1,2,3,2)	(1,7,10,4)
Dual	(14,47,34,1)	(2,12,11,1)	(1,2,2,1)	(3,12,10,1)
Sim Direto	(1,28,28,1)	(1,9,9,1)	(1,2,2,1)	(1,7,7,1)
Sim Dual	(1,34,34,1)	(1,11,11,1)	(1,2,2,1)	(1,10,10,1)

Tabela 6.16: poincare. Células: (16,106,180,90). Morse Robusto: (1,2,2,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,2,2)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Dual	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Dual	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)

Tabela 6.17: projective. Células: (6,15,10). Morse Robusto: (1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,11,12,1)	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)
Dual	(12,29,18,0)	(1,4,4,0)	(1,0,0,0)	(1,4,4,0)
Sim Direto	(1,11,11,0)	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,1,1,0)
Sim Dual	(1,18,18,0)	(1,4,4,0)	(1,0,0,0)	(1,4,4,0)

Tabela 6.18: rudin. Células: (14,66,94,41). Morse Robusto: (1,0,0,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,4,4)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Dual	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)
Sim Direto	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)
Sim Dual	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,0)

Tabela 6.19: simon. Células: (7,20,14). Morse Robusto: (1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)
Dual	(7,12,6,0)	(1,1,1,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)
Sim Direto	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)
Sim Dual	(1,6,6,0)	(1,1,1,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)

Tabela 6.20: ziegler. Células: (10,38,50,21). Morse Robusto: (1,0,0,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,258,303,45)	(1,56,66,10)	(1,0,0,0)	(1,64,74,10)
Dual	(199,327,129,0)	(12,35,24,0)	(1,0,0,0)	(14,28,15,0)
Sim Direto	(1,258,258,0)	(1,56,56,0)	(1,0,0,0)	(1,64,64,0)
Sim Dual	(1,129,129,0)	(1,24,24,0)	(1,0,0,0)	(1,15,15,0)

(a) Sem restrições geométricas

Direto	(1,20,20,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,3,3,0)
Dual	(48,73,26,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(5,6,2,0)
Sim Direto	(1,20,20,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,3,3,0)
Sim Dual	(1,26,26,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,0)	(1,2,2,0)

(b) Distância mínima à origem

Direto	(1,32,32,0)	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,2,2,0)
Dual	(126,228,103,0)	(8,17,10,0)	(1,0,0,0)	(9,14,6,0)
Sim Direto	(1,32,32,0)	(1,3,3,0)	(1,0,0,0)	(1,2,2,0)
Sim Dual	(1,103,103,0)	(1,10,10,0)	(1,0,0,0)	(1,6,6,0)

(c) Coordenada Z mínima

Tabela 6.21: Pilha de Cubos. Células: (572,1477,1266,360). Morse Robusto: (1,0,0,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,104,216,113)	(1,20,27,8)	(1,1,1,1)	(1,24,31,8)
Dual	(99,208,110,1)	(8,28,21,1)	(1,1,1,1)	(8,33,26,1)
Sim Direto	(1,104,104,1)	(1,20,20,1)	(1,1,1,1)	(1,24,24,1)
Sim Dual	(1,110,110,1)	(1,21,21,1)	(1,1,1,1)	(1,26,26,1)
(a) Sem restrições geométricas				
Direto	(1,53,103,51)	(1,6,8,3)	(1,1,1,1)	(1,10,15,6)
Dual	(6,8,3,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)
Sim Direto	(1,53,53,1)	(1,6,6,1)	(1,1,1,1)	(1,10,10,1)
Sim Dual	(1,3,3,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)
(b) Distância mínima à origem				
Direto	(1,69,124,56)	(1,12,15,4)	(1,1,1,1)	(1,16,24,9)
Dual	(32,79,48,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(2,11,10,1)
Sim Direto	(1,69,69,1)	(1,12,12,1)	(1,1,1,1)	(1,16,16,1)
Sim Dual	(1,48,48,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,10,10,1)
(c) Coordenada Z mínima				

Tabela 6.22: s2xs1. Células: (192,588,612,216). Morse Robusto: (1,3,4,2).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,73,154,82)	(1,11,16,6)	(1,0,0,1)	(1,12,18,7)
Dual	(74,166,93,1)	(6,18,13,1)	(1,1,1,1)	(7,20,14,1)
Sim Direto	(1,73,73,1)	(1,11,11,1)	(1,0,0,1)	(1,12,12,1)
Sim Dual	(1,93,93,1)	(1,13,13,1)	(1,1,1,1)	(1,14,14,1)
(a) Sem restrições geométricas				
Direto	(1,99,208,110)	(1,20,26,7)	(1,1,1,1)	(1,11,17,7)
Dual				
Sim Direto	(1,99,99,1)	(1,20,20,1)	(1,1,1,1)	(1,11,11,1)
Sim Dual				
(b) Distância mínima à origem				
Direto	(1,44,90,47)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)	(1,5,7,3)
Dual	(34,66,33,1)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)	(4,6,3,1)
Sim Direto	(1,44,44,1)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)	(1,5,5,1)
Sim Dual	(1,33,33,1)	(1,0,0,1)	(1,0,0,1)	(1,3,3,1)
(c) Coordenada Z mínima				

Tabela 6.23: s3. Células: (162,522,576,216). Morse Robusto: (1,1,1,1).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,16,17,0)	(1,2,3,0)	(1,0,1,0)	(1,2,3,0)
Dual	(19,25,8,0)	(2,1,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
Sim Direto	(1,16,17,0)	(1,2,3,0)	(1,0,1,0)	(1,2,3,0)
Sim Dual	(1,7,8,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
(a) Sem restrições geométricas				
Direto	(1,5,6,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
Dual	(21,27,8,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(3,2,1,0)
Sim Direto	(1,5,6,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
Sim Dual	(1,7,8,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
(b) Distância mínima à origem				
Direto	(1,1,2,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
Dual	(13,16,5,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(2,1,1,0)
Sim Direto	(1,1,2,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
Sim Dual	(1,4,5,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)
(c) Coordenada Z mínima				

Tabela 6.24: solid 2sphere. Células: (64,144,108,26). Morse Robusto: (1,0,1,0).

	HG Simpl	Min Deg	Min Def	Max Cpl
Direto	(1,221,235,14)	(1,46,47,1)	(1,1,1,0)	(1,47,48,1)
Dual	(241,446,206,0)	(18,62,45,0)	(1,1,1,0)	(14,53,40,0)
Sim Direto	(1,221,221,0)	(1,46,46,0)	(1,1,1,0)	(1,47,47,0)
Sim Dual	(1,206,206,0)	(1,45,45,0)	(1,1,1,0)	(1,40,40,0)
(a) Sem restrições geométricas				
Direto	(1,52,52,0)	(1,6,6,0)	(1,1,1,0)	(1,7,7,0)
Dual	(165,302,138,0)	(3,5,3,0)	(1,2,2,0)	(11,36,26,0)
Sim Direto	(1,52,52,0)	(1,6,6,0)	(1,1,1,0)	(1,7,7,0)
Sim Dual	(1,138,138,0)	(1,3,3,0)	(1,2,2,0)	(1,26,26,0)
(b) Distância mínima à origem				
Direto	(1,50,50,0)	(1,9,9,0)	(1,1,1,0)	(1,9,9,0)
Dual	(159,302,144,0)	(2,11,10,0)	(1,1,1,0)	(10,34,25,0)
Sim Direto	(1,50,50,0)	(1,9,9,0)	(1,1,1,0)	(1,9,9,0)
Sim Dual	(1,144,144,0)	(1,10,10,0)	(1,1,1,0)	(1,25,25,0)
(c) Coordenada Z mínima				

Tabela 6.25: Furch. Células: (600,1580,1350,369). Morse Robusto: (1,1,1,0).

7

Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho foi focado na teoria discreta de Morse de Forman. Analisamos os elementos básicos desta teoria, e provamos a estrutura em camadas das funções de Morse discretas. Representamos esta estrutura de camadas por uma coleção de hiperflorestas e demos uma caracterização completa das células críticas em termos de componentes regulares das hiperflorestas. Usamos esta análise para introduzir um esquema para construir funções de Morse discretas em complexos celulares finitos de dimensão arbitrária. Esta construção é quadrática no tempo no pior caso, e foi provada que ela é linear e ótima no caso das variedades de dimensão 2. Os resultados experimentais mostraram que o algoritmo deu um resultado ótimo na maioria dos casos. Isto abriu uma nova pergunta: quais são as condições sobre um complexo celular que asseguram que o algoritmo fornece uma função ótima.

Uma aplicação importante deste trabalho em computação gráfica estaria no campo da compressão geométrica. O algoritmo Grow&Fold de A. Szymczak e J. Rossignac [30] poderia ser justificado e melhorado por nosso algoritmo com o objetivo de minimizar o número de “glue faces” a fim conseguir uma compressão mais eficiente. Esta proposta foi feita de maneira ótima para o caso de compressão de superfícies com alças em [21].

Planejamos continuar este trabalho em três direções. Primeiramente, como mencionado acima, aplicar a teoria de Forman e a análise de nosso algoritmo para a compressão de malhas volumétricas em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Tentaremos também aplicar a teoria de Morse discreta para resolver as singularidades que aparecem nas reconstruções de modelos. Finalmente, esperamos produzir um morphing topologicamente consistente utilizando o campo gradiente discreto de dois objetos com o mesmo tipo de homotopia.

Referências Bibliográficas

- [1] ARMSTRONG, M.. **Basic topology**. McGraw-Hill, London, 1979.
- [2] BERGE, C.. **Graphes et hypergraphes**. Dunod, Paris, 1970.
- [3] BERN, M. W.; EPPSTEIN, D. ; OTHERS. **Emerging challenges in computational topology**. ACM Computing Research Repository, 1999.
- [4] BOISSONNAT, J.-D.; YVINEC, M.. **Algorithmic Geometry**. Cambridge University Press, 1998.
- [5] COHEN, M. M.. **A course in simple homotopy theory**. Springer, New York, 1973.
- [6] DELFINADO, C. J. A.; EDELSBRUNNER, H.. **An Incremental Algorithm for Betti Numbers of Simplicial Complexes**. In: PROCEEDINGS OF 9TH ANNUAL SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY, p. 232–239, 1993.
- [7] DEY, T. K.; EDELSBRUNNER, H. ; GUHA, S.. **Computational topology**. In: Chazelle, B.; Goodman, J. ; Pollack, R., editors, ADVANCES IN DISCRETE AND COMPUTATIONAL GEOMETRY, volumen 223 de **Contemporary mathematics**, p. 109–143. American Mathematical Society, Providence, 1999.
- [8] DEY, T. K.; GUHA, S.. **Algorithms for manifolds and simplicial complexes in euclidean 3-Space**. preprint, 2001.
- [9] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J. L. ; ZOMORODIAN, A.. **Hierarchical Morse Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds**. In: PROCEEDINGS OF THE 17TH SYMPOSIUM OF COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 70–79, 2001.
- [10] ÖMER EĞECIOĞLU; GONZALEZ, T. F.. **A computationally intractable problem on simplicial complexes**. Computational Geometry: Theory and Applications, 6:85–98, 1996.

- [11] FORMAN, R.. **A discrete morse theory for cell complexes**. In: Yau, S. T., editor, **GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS FOR RAOUL BOTT**. International Press, 1995.
- [12] FORMAN, R.. **Morse theory for cell complexes**. *Advances in Mathematics*, 134:90–145, 1998.
- [13] FORMAN, R.. **Some applications of combinatorial differential topology**. preprint, 2001.
- [14] FORMAN, R.. **A user guide to discrete Morse theory**. preprint, 2001.
- [15] HACHIMORI, M.. **Simplicial complex library**. www.qci.jst.go.jp/~hachi.
- [16] HART, J. C.. **Morse theory for implicit surface modeling**. In: Hege, H.-C.; Polthier, K., editors, **MATHEMATICAL VISUALIZATION**, p. 257–268. Springer, Berlin, 1998.
- [17] HOPCROFT, J.; TARJAN, R. E.. **Efficient algorithms for graph manipulation**. *Communications of the ACM*, 16:372–378, 1973.
- [18] LEWINER, T.; TAVARES, G. ; LOPES, H.. **Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds**. preprint, 2001.
- [19] LEWINER, T.; LOPES, H. ; TAVARES, G.. **Visualizing Forman’s discrete vector field**. In: Hege, H.-C.; Polthier, K., editors, **MATHEMATICAL VISUALIZATION III**. Springer, Berlin, 2002.
- [20] LOPES, H.. **Algorithm to build and unbuild 2 and 3 dimensional manifolds**. PhD thesis, Department of Mathematics, PUC-Rio, 1996.
- [21] LOPES, H.; ROSSIGNAC, J.; SAFANOVA, A.; SZYMCZAK, A. ; TAVARES, G.. **Edgebreaker: a simple compression for surfaces with handles**. In: **7TH ACM SIGGRAPH SYMPOSIUM ON SOLID MODELING AND APPLICATION**, 2002.
- [22] LOVÁSZ, L.; PLUMMER, M. D.. **Matching Theory**. Van Nostrand Reinhold, Amsterdam, 1986.
- [23] LUNDELL, A.; WEINGRAM, S.. **The topology of CW complexes**. Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [24] MARKOV, A.. **Insolvability of the problem of homeomorphy**. In: **PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS**, p. 300–306, 1958.

- [25] MEYER, M.; DESBRUN, M.; SCHRÖDER, P. ; BARR, A.. **Discrete Differential–Geometry Operators for Triangulated 2–Manifolds**. In: Hege, H.-C.; Polthier, K., editors, MATHEMATICAL VISUALIZATION III. Springer, Berlin, 2002.
- [26] MILNOR, J. W.. **Morse theory**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [27] MOÏSE, E. E.. **Affine structures in 3–manifolds**. *Annals of Math*, 56(2):96–114, 1952.
- [28] MORIYAMA, S.; TAKEUCHI, F.. **Incremental construction properties in dimension two—shellability, extendable shellability and vertex decomposability**. In: PROCEEDINGS OF THE 12TH CANADIAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 65–72, Fredericton, 2000.
- [29] SHINAGAWA, Y.; KUNII, T. ; KERGOSIEN, Y.. **Surface coding based on morse theory**. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11:66–78, 1991.
- [30] SZYMCZAK, A.; ROSSIGNAC, J.. **Grow & Fold: Compression of Tetrahedral Meshes**. In: SOLID MODELLING '99, 1999. to appear.
- [31] TARJAN, R. E.. **Efficiency of a good but not linear set union algorithm**. *Journal of the ACM*, 22(2):215–225, 1975.
- [32] TAUBIN, G.; ROSSIGNAC, J.. **Geometric compression through topological surgery**. *ACM Transactions on Graphics*, 17(2):84–115, 1998.
- [33] VEGTER, G.. **Computational topology**. In: Goodman, J. E.; O’Rourke, J., editors, HANDLEBOOK OF DISCRETE COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 517–536. CRC Press, 1997.
- [34] KOUTSOFIOS, E.; NORTH, S. C.. **Drawing graphs with dot**. Technical report, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1993.
- [35] NORTH, S. C.. **Neato User’s Guide**. Technical report, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1992.