



Maria de Andrade Costa e Silva

**Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às
Isossuperfícies**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio
como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em
Matemática

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro
Agosto de 2011



Maria de Andrade Costa e Silva

**Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às
Isossuperfícies**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Thomas Lewiner

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Adailson Peixoto

Instituto de Matemática – UFAL

Prof. Wu Shin Ting

Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação-UNICAMP

Prof. Moacyr A. H. B. Silva

FGV

Prof. Luiz Velho

IMPA

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Nicolau Saldanha

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 3 de Agosto de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Maria de Andrade Costa e Silva

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Sergipe-UFS. Obteve o mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas-UFAL.

Ficha Catalográfica

Andrade, Maria

Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies / Maria de Andrade Costa e Silva; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 82 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Superfícies Regulares. 3. Invariante Afim. 4. Curvatura Gaussiana. 5. Curvatura Média. 6. Isossuperfícies. 7. Estimação de Derivadas. 8. Marching Cubes. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

“A Pietro, pelo amor, paciência, incentivos e por acreditar em mim. ”

Maria Andrade.

Agradecimentos

A Deus por tudo.

Aos meus queridos pais, Josefa e Miguel (*in memoriam*), aos meus irmãos, à minha querida família e amigos em Itabaiana-SE, em especial a Aline Alves, à minha segunda família em Aracaju e ao meu querido esposo Pietro, pela enorme paciência, amor, encorajamento, discussões matemáticas e por tudo que fez por mim para eu continuar meu doutorado.

Durante minha graduação na UFS alguns professores me incentivaram a continuar meus estudos, a eles meus sinceros agradecimentos, em especial aos professores e amigos: Paulo Rabelo, Valdenberg Araújo, Almir Rogério, André Vinícius e Anderson Valença.

Em seguida, fiz o mestrado na UFAL e obtive a contribuição de outros professores na minha formação, agradeço a todos pela confiança e pelas aulas, em especial aos professores Adán Corcho e Adailson Peixoto, que apesar da distância estiveram presentes em vários momentos importantes ao longo desses anos.

Um agradecimento especial às duas instituições que possibilitaram a minha formação acadêmica e pessoal nos últimos anos: o IMPA e a PUC. Aos funcionários e professores dessas instituições meu muito obrigada, em especial ao professor Fernando Codá pelos ótimos cursos ministrados de Geometria Diferencial e pelo apoio, e aos professores: Alexandre Arbieto, Carlos Matheus, Carlos Tomei, Marcos Craizer e Sinésio Pesco pelo apoio. Aos amigos que se tornaram uma grande família, especialmente a: Adriana, Aline, Andréa, Cabral, Cristina, Claudemir, Emílio, Fernando, Grigori, Ives, João, Júlio, Lis, Marcelo, Patrícia e Renata.

Ao meu orientador professor Thomas Lewiner por todo apoio nestes dois anos, confiança, paciência, motivação no trabalho e amizade.

À minha querida amiga Clarissa Codá pela amizade ao longo desses anos. Pela constante presença tão fundamental e por me ajudar a seguir em frente em vários momentos.

Aos professores que fizeram parte desta banca por todos os comentários.

A todas as pessoas que contribuíram de alguma forma.

E finalmente, à PUC-Rio/VRAC, CNPq e CAPES pelo financiamento de bolsas, as quais foram fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

Resumo

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas. **Cálculo de Estruturas Afins e Aplicação às Isossuperfícies**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A geometria diferencial provê um conjunto de medidas invariantes sob a ação de um grupo de transformações, em particular rígidas, afins e projetivas. Os invariantes por transformações rígidas são usados em quase todas as aplicações de computação gráfica e modelagem geométrica. O caso afim, por ser mais geral, permite estender essas ferramentas. Neste trabalho, propriedades geométricas são apresentadas no caso de superfícies paramétricas ou implícitas, em particular, a métrica afim, os vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins. Alguns resultados usuais de geometria Euclidiana, como a fórmula de Minkowski, são estendidos para o caso afim. Esse estudo permite definir estimadores das estruturas afins no caso de isossuperfícies. Porém, um cálculo direto dessas estruturas resulta em um grande número de operações e instabilidade numérica. Uma redução geométrica é proposta, obtendo fórmulas mais simples e mais estáveis numericamente. As propriedades geométricas incorporadas no *Marching Cubes* são analisadas e discutidas.

Palavras-chave

Superfícies Regulares ; Invariante Afim ; Curvatura Gaussiana ; Curvatura Média ; Isossuperfícies ; Estimação de Derivadas ; Marching Cubes.

Abstract

Andrade, Maria; Lewiner, Thomas (Advisor) . **Calculus of Affine Structures and Applications for Isosurfaces**. Rio de Janeiro, 2011. 82p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Differential Geometry provides a set of measures invariant under a set of transformations, in particular rigid, affine, and projective. The invariants by rigid motions are using almost all applications of computer graphics and geometric modeling. The affine case, since it is more general, allows to extend these tools. In this work, geometric properties are presented in the case of parametric or implicit surfaces, in particular the affine metric, the co-normal and normal vectors, and the affine Gaussian and mean curvatures. Some usual results of Euclidean geometry, as the Minkowski formula, are extended for the affine case. This study allows to define estimators of affines structure in the case of isosurfaces. Although, the direct calculation of these structures greatly increases the number of operations and numerical instabilities. A geometrical reduction is proposed obtaining a much simpler and numerical stabler formulae. The geometrical properties are incorporated in the Marching Cubes algorithms, then they are analyzed and discussed.

Keywords

Regular Surfaces ; Affine Invariant ; Gaussian Curvature ; Mean Curvature ; Isosurfaces ; Derivatives Estimation ; Marching Cubes.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivação	13
1.2	Trabalhos Relacionados	15
1.3	Estrutura da Tese	17
2	Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas	19
2.1	Transformações Afins e Curvas Assintóticas	20
2.2	Co-normal Afim e Normal Afim	29
2.3	Curvaturas Afins	32
2.4	Caso de Superfície Parametrizadas como Gráfico	33
3	Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas	43
3.1	Plano Tangente e Métrica Afim	44
3.2	Co-normal Afim e Normal Afim	45
3.3	Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas	46
4	Cálculo de Estruturas Afins para Iossuperfícies	52
4.1	Aproximação das Derivadas Discretas	52
4.2	Implementação dentro do <i>Marching Cubes</i>	54
4.3	Estabilidade Numérica	55
4.4	Medidas de Qualidade	57
5	Família de Parabolóides	59
6	Resultados	63
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	68
	Referências Bibliográficas	70
A	Cálculo dos Invariantes Diretamente	74

Lista de figuras

1.1	Reconhecimento de formas (31).	13
1.2	Mudanças do ponto de vista, em (a) primeiro ponto de vista e em (b,c) segundo ponto de vista. Fixar um círculo em (a,b) não é suficiente para lidar com as mudanças do ponto de vista. Neste caso, foi utilizado uma transformação equiafim (c) para aproximar as propriedades geométricas (28).	14
2.1	Transformações equiafins bidimensionais.	21
2.2	Definição de superfície parametrizada.	22
2.3	Ilustração do plano osculador (©wikipedia).	22
2.4	Curvatura normal.	23
2.5	Interpretação geométrica do sinal de d . As regiões vermelhas, verdes e azuis indicam respectivamente curvaturas Gaussianas positivas, nulas e negativas (9).	29
2.6	Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm co-normal afim apontando para o centro de cada superfície.	31
2.7	Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm normal afim ξ constante. Eles têm o papel do plano Euclidiano na geometria afim.	33
2.8	(©Wikipedia) Interpretação geométrica do normal afim.	34
2.9	Curvas paralelas.	39
2.10	Superfícies paralelas afins no parabolóide elíptico.	41
3.1	Em (a) modelo implícito de uma banana com as curvaturas Gaussiana (à esquerda) e média afins (à direita), cores escuras indicam maiores curvaturas. Resultado após aplicar transformações afins $p \mapsto A \cdot p$. Notemos que as características das cores se preservaram, ou seja, as curvaturas se mantiveram. No caso Euclidiano isso não ocorreria.	43
3.2	Vetores normal afim ξ (à esquerda) e co-normal afim ν (à direita) direções num elipsóide. O co-normal é linear com o normal Euclidiano, enquanto que o normal afim aponta em direção ao centro do elipsóide, enfatizando que um elipsóide é a imagem afim de uma esfera.	45
3.3	Estruturas afins na superfície <i>blobby</i> dada pela expressão $(3x)^4 + (3y)^4 + (3z)^4 - 45x^2 - 45y^2 - 45z^2 + 6 = 0$. Da esquerda para a direita, direção co-normal ν , direção normal ξ , curvaturas Gaussianas \mathcal{K} e média \mathcal{H} , coloridas de vermelho para azul, a parte central verde correspondente a métrica degenerada.	46
3.4	A curvatura afim do parabolóide é $\mathcal{K} = 0$, mas uma estimativa direta usando diretamente o teorema da função implícita apresenta uma grande instabilidade numérica (à esquerda). Com fórmulas simplificadas a estimativa é mais estável (à direita).	47

3.5	A escolha de um eixo não invariante leva a descontinuidades na estimativa de ν (à esquerda) e mais ainda na curvatura. Com uma redução geométrica, a curvatura média afim \mathcal{H} é melhor aproximada (à direita).	47
3.6	Construção da transformação A.	48
4.1	Função spline σ_1 de grau 5 em uma variável.	53
4.2	Incorporando os estimadores dentro do <i>Marching Cubes</i> revela o padrão não-invariante da grade baseado na estimação das derivadas. As curvaturas Gaussiana afim \mathcal{K} (à esquerda) e média afim \mathcal{H} (à direita) antes (em cima) com um aumento da escala e depois (em baixo) com a transformação afim $((0.9, 0, 0.9), (0, 2, 0), (1.1, 0, 0.6))$.	54
4.3	Implementação dentro do <i>Marching Cubes</i> . Na primeira linha temos a primeira tentativa e na segunda linha a última tentativa que resultou melhores resultados.	55
4.4	Correção do domínio caso bidimensional.	57
5.1	Parabolóide elíptico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.	61
5.2	Parabolóide hiperbólico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.	62
6.1	Comparações do normal afim ξ quando calculado usando: z na derivação implícita (à esquerda), o eixo na maioria dos casos alinhado com o gradiente (meio), ou a nossa redução geométrica (à direita).	63
6.2	Comparação na superfície de equação $2z^2 - \sin(5x + 3y^2 - 1) = 0$ dos estimadores da curvatura média \mathcal{H} (em cima) e da curvatura Gaussiana \mathcal{K} (em baixo), usando método direto (à esquerda) e o método com transformação (à direita), com a mesma escala de cores, ambos métodos mostram descontinuidades nas regiões degeneradas $K_e = 0$.	64
6.3	Convergência sobre o modelo da esfera: erro absoluto em relação ao tamanho da grade, antes (sólido) e depois (tracejada) da transformação afim da figura 4.2: método direto (à esquerda, em escala linear) e o método de transformação (à direita, em escala logarítmica). A barra de erro representa o quinto da variância do erro absoluto.	65
6.4	No toro $z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5)^2 = 0$, a distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} é melhor preservada sobre a transformação afim $((1.4, -0.2, 0), (0.1, 0.7, 0), (0, 0, 1))$ se usamos o método com transformação (embaixo) do que o direto (em cima).	66
6.5	Mesmo em uma isossuperfície mais complexa, a curvatura Gaussiana afim estimada com nosso método é preservada após uma aplicação afim.	67

Lista de tabelas

- 2.1 Exemplos fundamentais de estruturas afins. 34
- 4.1 Número de operações de cada passo do estimador para um único ponto. As fórmulas simplificadas são muito mais concisas e são mais intensas computacionalmente nas operações de mapear as derivadas. 56

Sumário de Anotações

Símbolo	Significado
$M(n)$	Conjunto das matrizes quadradas $n \times n$
$\det(A)$	Determinante da matriz A
$\text{tr}(A)$	Traço da matriz A
$[u, v, w]$	Determinante da matriz 3×3 formada pelos vetores u, v, w
dA	Elemento de área Euclidiano
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana
S	Superfície
$T_p S$	Plano tangente de S em p
\mathbf{x}	Parametrização local da superfície
\mathbf{x}_α	Derivada da parametrização com respeito a coordenada $\alpha \in \{u, v\}$
I_p	Primeira Forma Fundamental Euclidiana no ponto p
E_e, F_e, G_e	Coefficientes da Primeira Forma Fundamental Euclidiana
N_e	Vetor Normal Euclidiano
K_e	Curvatura Gaussiana Euclidiana
L, M, N	Coefficientes da métrica de Berwald- Blaschke
d	Coefficiente da métrica afim
\mathcal{I}_x	Primeira Forma Fundamental Afim
ν	Vetor co-normal afim
ξ	Vetor normal afim
\mathcal{K}	Curvatura Gaussiana afim
\mathcal{H}	Curvatura média afim
$V_{\{u,v\}}$	Derivadas do vetor V com relação a u, v
$d\tilde{A}$	Elemento de área afim
\mathcal{S}	Operador de forma afim
b_{ij}	Coefficientes do operador forma afim

1 Introdução

1.1 Motivação

Nas últimas décadas, modelos tridimensionais estão se tornando indispensáveis para diversas aplicações, como por exemplo em jogos, diagnósticos médicos, arquitetura entre outros. Em particular, classificar e reconhecer objetos geométricos (ver figura 1.1) tem despertado bastante interesse em várias áreas, tais como engenharia, biometria e computação visual.

 mão	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	✓	✓	✓	✗	✗	✗
	✗	✗	✗	✗	✓	✗

Figura 1.1: Reconhecimento de formas (31).

Conseqüentemente, vários problemas interessantes têm surgido em computação visual. Um desses problemas consiste em reconhecer se um objeto pertence a uma determinada classe.

Um ponto importante na classificação e reconhecimento de objetos geométricos em imagens é o fato que um objeto pode ser visto por diferentes pontos de vista, resultando em diferentes imagens deformadas (ver figura 1.2). Portanto, a invariância do ponto de vista é uma propriedade desejada. Na geometria clássica, classificar e reconhecer objetos geométricos é usualmente feito através do cálculo de invariantes, para isso é necessário estimar invariantes discretos comparáveis aos invariantes da geometria diferencial.

Notemos que no caso da figura figura 1.2 a geometria que melhor preserva as propriedades geométricas é a projetiva, no entanto foi usado a geometria afim (28) para fazer uma aproximação das propriedades geométricas, pois a imagem é tirada em perspectiva fraca que é bem aproximada pela geometria afim.

Nesse contexto, a aproximação de medidas invariantes de forma calculável no computador e numericamente estável apresenta alguns desafios. Em particular, é preciso mostrar que essas medidas convergem para os invariantes diferenciais e garantir que cada estimador seja também invariante e que portanto preserva sua característica geométrica.

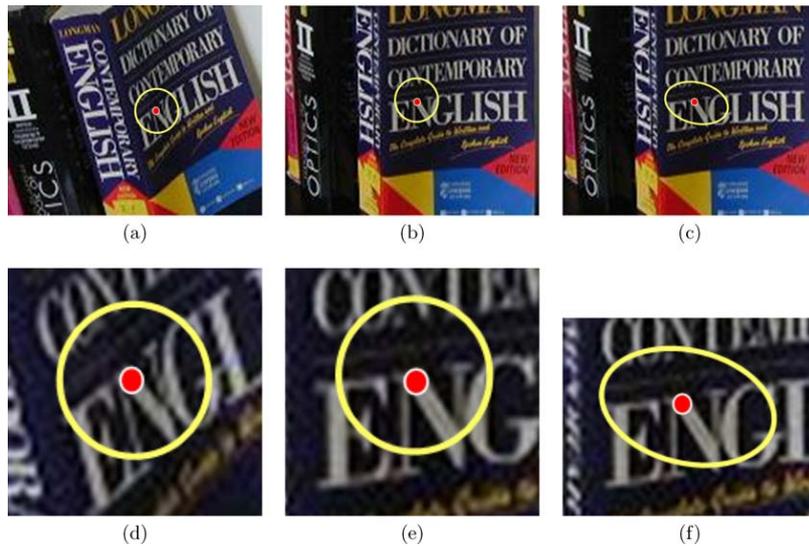


Figura 1.2: Mudanças do ponto de vista, em (a) primeiro ponto de vista e em (b,c) segundo ponto de vista. Fixar um círculo em (a,b) não é suficiente para lidar com as mudanças do ponto de vista. Neste caso, foi utilizado uma transformação equiafim (c) para aproximar as propriedades geométricas (28).

1.1.1 Contribuições

Esta tese pretende apresentar algumas propriedades geométricas em superfícies paramétricas ou implícitas em \mathbb{R}^3 que são invariantes por transformações *equiafins*, ou seja, transformações que preservam volumes, e mostrar os estimadores para tais propriedades. Como aplicação visualizaremos as propriedades geométricas como vetores co-normais e normais afins e as curvaturas afins em superfícies.

O problema inicial proposto para o desenvolvimento desta tese foi uma extensão natural do resultado de polígonos parabólicos (13) para três dimensões, ou seja, dado uma amostragem de três pontos de uma superfície

e planos tangentes definidos nestes pontos deseja-se construir um parabolóide de forma invariante afim. Vimos no decorrer da pesquisa que só é possível ter um parabolóide que interpole os três pontos e seja tangente aos três planos se colocarmos algumas condições sobre os planos. Mas, até o presente momento não temos a solução completa para este problema e observamos que um possível caminho para a solução desse problema é o estudo de cúbicas osculadoras.

Os resultados iniciais desta tese foram no caso paramétrico suave, a saber

- Interpretação geométrica para a curvatura Gaussiana afim.
- Existência local e global da vizinhança tubular afim para superfícies conexas, compactas e estritamente convexas.
- Condição necessária e suficiente para a superfície paralela ser regular.
- Fórmula de Minkowski afim.

Além disso, durante as pesquisas resolvemos usar as descrições diferenciais (10) para ganhar mais intuição na construção geométrica. Motivados pelos trabalhos de cálculo e visualização de curvaturas em superfícies implícitas (9, 21) decidimos pesquisar invariantes afins em superfícies implícitas, o que em particular gerou alguns resultados nesta tese

- Definição de um caso de referência.
- Construção de uma redução geométrica para reduzir ao caso de referência.
- Métodos de visualização das propriedades estimadas.
- Validação da estabilidade numérica, invariância e convergência.

Submetemos alguns trabalhos relacionados com os resultados desta tese (2, 3, 4, 5).

1.2

Trabalhos Relacionados

Geometria afim plana é frequentemente usada em processamento de imagens e visão computacional incluindo processamentos de invariantes afins de curvas (18, 36) e a definição de alguns descritores dos invariantes afins (27). Estes trabalhos são motivados pela descrição geométrica da mudança do ponto de vista em projeções fotográficas, as quais são bem aproximadas por transformações afins (26). Em particular, Mikolajczyk e Schmid (27, 28) forneceram um apanhado geral sobre as formas locais de descritores com ênfase em invariantes afins.

Para curvas planas descritas explicitamente um modelo de polígono parabólico (13) foi proposto para a construção local de invariantes afins, com o qual foi deduzido o comprimento, normal e curvatura afins de curvas discretas. Zuliani et al. (39) apresentaram um descritor invariante afim global baseado na equação de Helmholtz para a membrana vibratória com uma aplicação de correspondência. Além disso, Alvin (1) estudou equações diferenciais que descrevem as distâncias afins.

Para formas tridimensionais, descritores invariantes afins têm sido estudados desde 1990. Por exemplo, Arbtert et al. (6) apresentaram descritores invariantes afins globais para modelos paramétricos através da normalização da transformada de Fourier. Craizer et al. (12) descreveram relações entre distância, área e esferas impróprias afins. Já Betelu et al. (7) definiram distâncias afins invariantes para encontrar o esqueleto por erosão. Rothganger et al. (35) usam parametrização local de formas 3d para encontrar descritores afins, os quais são utilizados no reconhecimento de formas.

Recentemente, medidas invariantes afins têm recebido muita atenção na comunidade de visão computacional para melhorar correspondência e registro em curvas (27, 28, 39). Na verdade, curvas em um objeto vistas em duas fotos distintas têm diferentes medidas Euclidianas (distância ou curvatura) (26). Para dados tridimensionais a quantificação de formas similares tem sido usada em um grande número de aplicações em correspondência e registro (6, 19, 34) e reconstrução (20). Embora alguns objetos sejam claramente similares, eles não são localmente correspondentes sobre movimentos rígidos. Além disso, a definição da métrica afim foi usada para estender técnicas que calculam distâncias geodésicas em superfícies, onde as distâncias são definidas com respeito ao comprimento de arco afim, o que possibilitou várias aplicações, como por exemplo em detecção de simetrias e correspondência (33).

Uma medida de similaridade melhor para tais objetos pode ser obtida usando um conjunto maior de transformações, o que requer medidas mais sofisticadas. Com essa intenção, a geometria mais simples acima da Euclidiana é a geometria afim (22), a qual define medidas que são invariantes sobre transformações afins incluindo mudança de escalas não-uniforme e cisalhamento.

Assim, exibiremos as fórmulas para as principais estruturas afins: vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins para superfícies descritas como um gráfico, e deduziremos as fórmulas para o caso implícito usando o teorema da função implícita, como Goldman (21) fez no caso Euclidiano. Uma exposição completa de estruturas afins pode ser encontrada nos livros de Buchin (8) ou Nomizu (29).

1.3

Estrutura da Tese

Ao longo deste trabalho, estudamos estruturas invariantes sobre o grupo das transformações equiafins. Usamos o termo afim ao invés de equiafim para facilitar a leitura. O desenvolvimento teórico no caso da superfície ser definida implicitamente considerará apenas funções de classe C^4 e pontos regulares.

Neste trabalho, apresentamos estimadores robustos para os vetores co-normais e normais afins e para as curvaturas Gaussiana e média afins no caso de superfície. Expomos num primeiro momento as fórmulas diferenciais desses invariantes deduzidos no caso paramétrico e usando o teorema da função implícita obtemos os invariantes afins de superfícies implícitas. O cálculo dessas fórmulas é computacionalmente intenso (23.000 *flops* por ponto) e instável. Propomos uma transformação geométrica para reduzir o custo computacional (1.500 *flops* por ponto). Experimentamos essas abordagens incorporando os estimadores ao algoritmo *Marching Cubes*, para a visualização das propriedades geométricas. Encontramos condições suficientes para a existência do parabolóide interpolante. Procuramos interpretações geométricas para os invariantes afins, para poder construir estimadores no caso implícito (complexo celular). Além disso, obtemos o equivalente da fórmula de Minkowski no caso afim, que pode ser útil para obter melhores estimativas de curvaturas a partir de amostras de superfícies suaves (11). A tese está organizada como mostrado abaixo

Capítulo 2: Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas

No capítulo 2 são apresentados os conceitos de transformações afins, curvas assintóticas (que motivam a definição da métrica de Berwald-Blaschke), estruturas afins, como vetores co-normal e normal além das curvaturas. O capítulo mostra ainda a interpretação geométrica da curvatura afim, a existência da vizinhança tubular afim local e global e a generalização da fórmula de Minkowski para a geometria afim. Estes últimos resultados são aparentemente inéditos.

Capítulo 3: Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas

O capítulo apresenta a nova dedução de fórmulas para o cálculo das estruturas afins em superfícies implícitas. São apresentados os exemplos fundamentais dessas estruturas. Em particular, será definida a redução geométrica permitindo obter as fórmulas simplificadas.

Capítulo 4: Cálculo de Invariantes Afins para Isossuperfícies

No capítulo 4 é discutido o método de aproximação de derivadas discretas que usamos nos experimentos, é apresentada a estabilidade numérica, a implementação das estruturas afins dentro do *Marching Cubes* e as medidas de qualidade dos estimadores.

Capítulo 5: Família de Parabolóides

No capítulo 5 apresentamos a solução parcial do primeiro problema proposto para esta tese, na qual encontramos condições sobre os planos tangentes que são suficientes para garantir a existência de um parabolóide interpolante.

Capítulo 6: Resultados

Este capítulo mostra os resultados de nossos estimadores para isossuperfícies e faz uma análise da estabilidade numérica, convergência e invariância afim. Também são discutidas algumas limitações dos nossos resultados.

Capítulo 7: Conclusão e Trabalhos Futuros

O capítulo 7 contém as conclusões deste trabalho e indica alguns caminhos para pesquisas subsequentes.

2

Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas

Este capítulo apresenta algumas propriedades geométricas, em superfícies regulares paramétricas em \mathbb{R}^3 , invariantes por transformações afins.

A etimologia da palavra *geometria* significa “medir a terra”, e de fato os primeiros estudos geométricos descrevem métodos para medir objetos. A medição consiste em associar a um objeto (ou a parte deste objeto) um número (ou nos estudos mais recentes uma estrutura matemática) de forma *reprodutível*.

Existe mais de uma noção da forma como a operação de medir pode ser reproduzida, cada noção gerando uma geometria diferente: geometria Euclidiana, afim, projetiva, etc. Por exemplo, a geometria Euclidiana define medidas que podem ser extraídas de um objeto rígido, e reproduzidas com resultado equivalente no mesmo objeto após movimentos rígidos: translações, rotações e simetrias.

Essas formas foram caracterizadas por Felix Klein no final do século *XIX* no seu programa de Erlangen associando a cada geometria um grupo de transformações que um objeto S pode sofrer. A geometria Euclidiana estuda as propriedades sob a ação do grupo dos movimentos rígidos, enquanto a geometria afim abrange todas as transformações afins, ou seja, incluindo cisalhamento. Nesta tese, chamaremos (por um leve abuso de linguagem) de geometria afim a geometria equiafim, incluindo transformações equiafins que preservem a forma de volume no espaço.

Objetos Geométricos

Entendemos por objeto geométrico um conjunto contínuo de pontos no espaço \mathbb{R}^n . Nesta tese, limitaremos ao caso $n = 3$, ou seja, objetos no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Além de continuidade, exigiremos do conjunto a propriedade de variedade, isto é, de ter uma dimensão, e de diferenciabilidade.

Mais precisamente, um objeto geométrico S é uma variedade de dimensão d se ele é localmente *equivalente* ao espaço vetorial \mathbb{R}^d : para qualquer ponto $p \in S$, existe uma bola \mathcal{B} de \mathbb{R}^n tal que $\mathcal{B} \cap S$ é equivalente a uma bola \mathcal{B} de

\mathbb{R}^d . É importante notar que a dimensão d é a mesma para todos os pontos p . Se $d = 2$ então S é chamada de superfície.

A notação de equivalência do parágrafo anterior varia dependendo do contexto de estudo. Para estudar as propriedades topológicas usa-se geralmente a notação de homeomorfismo (existe uma função f contínua de inversa contínua entre $\mathcal{B} \cap S$ e \mathcal{B}). Para estudos de geometria diferencial, será necessária uma equivalência com difeomorfismo (a função f precisa ser de classe \mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^∞). No caso da geometria discreta, ainda não foi desenvolvido uma noção de equivalência única comum aos diversos estudos.

Medidas Invariantes

Uma vez escolhida uma geometria, e definido o grupo \mathcal{G} de transformações associadas, uma medida geométrica m é *invariante* pelo grupo \mathcal{G} se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = m(S)$. Tipicamente, medidas numéricas ($m(S) \in \mathbb{R}$) como o comprimento e a curvatura são invariantes, dependendo da geometria e do grupo \mathcal{G} . Quando a medida gera uma estrutura como um vetor, uma matriz ou um tensor, a medida geralmente não é invariante. Por exemplo, no caso Euclidiano a direção do vetor tangente a uma curva varia quando a curva sofre uma rotação. Porém, essa variação é simples de prever quando a rotação é conhecida. Uma medida m é *covariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A(m(S))$, e *contravariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A^{-T}(m(S))$. O vetor tangente é covariante, e o vetor normal, dual do vetor tangente, é portanto de natureza contravariante. No caso Euclidiano, as transformações essencialmente matrizes ortogonais $A^{-T} = A$, portanto a distinção é menos relevante, mas será mais clara no caso afim. Observemos ainda que no caso implícito, a transformação A se traduz algebricamente por A^{-1} nas fórmulas, portanto as noções de co e contra variância se escrevem de forma diferente.

2.1

Transformações Afins e Curvas Assintóticas

Queremos encontrar propriedades geométricas m que sejam invariantes por transformações do grupo

$$\mathcal{G} = SA(3, \mathbb{R}) = \{B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; Bp = Ap + b, A \in M(3); \det(A) = 1, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Para isso, o primeiro passo é entendermos o significado de transformações *equiafins* e logo em seguida definirmos uma métrica que seja invariante em superfícies regulares.

2.1.1

Transformações Equiafins

As transformações *equiafins* são transformações do espaço que preservam volumes, mais precisamente

Definição 1 Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é equiafim se e só se T é da forma $T(u) = B(u) + v_0$, onde B é linear, $\det(B) = 1$ e $v_0 \in \mathbb{R}^3$.

Ou seja, T é equiafim se, somente se T é da forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + t_0 \\ dx + ey + fz + t_1 \\ gx + hy + iz + t_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

onde $\det(B) = 1$ e $v_0 = (t_0, t_1, t_2)$.

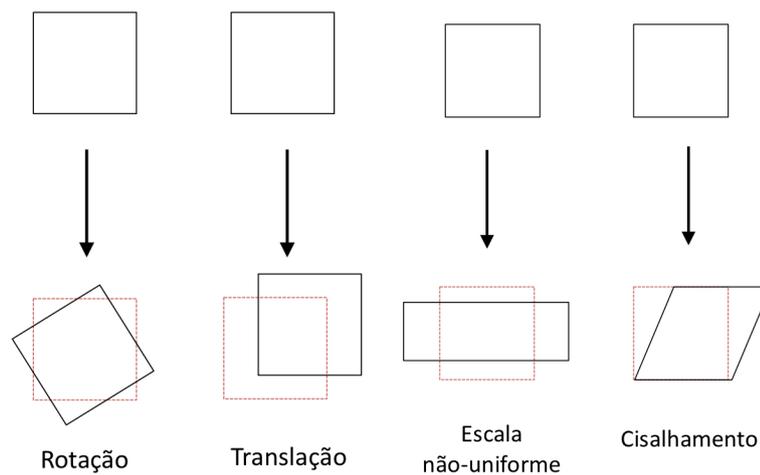


Figura 2.1: Transformações equiafins bidimensionais.

Em particular, obtemos que as transformações rígidas, que é o grupo das transformações da geometria Euclidiana, são transformações equiafins. Casos particulares de transformações equiafins são: identidade, translação, escalonamento, rotação e cisalhamento. A figura 2.1 exemplifica algumas transformações equiafins bidimensionais.

2.1.2

Curvas Assintóticas

Queremos encontrar uma métrica que seja invariante sobre transformações equiafins. A motivação dessa métrica vem do estudo de curvas assintóticas em superfícies regulares (8).

Uma superfície regular (15) em \mathbb{R}^3 é obtida tomando pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si de tal forma que a figura resultante não tenha pontas, arestas ou auto-interseções.

Definição 2 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S$ tal que

- \mathbf{x} é difeomorfismo: \mathbf{x} é diferenciável e \mathbf{x} tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é diferenciável.
- Para todo $q \in U$ a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

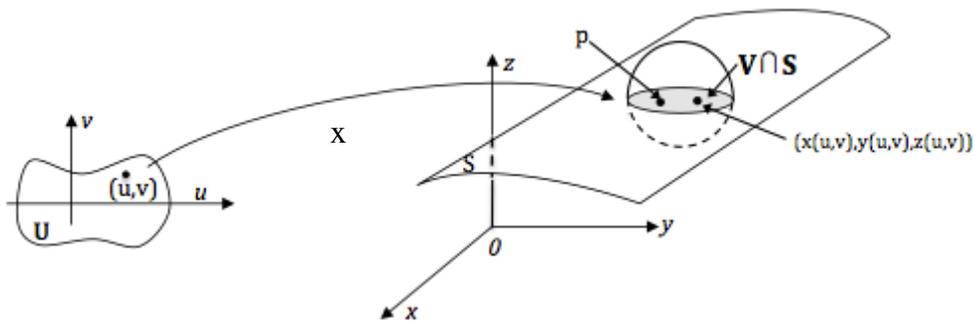


Figura 2.2: Definição de superfície parametrizada.

A figura 2.2 ilustra a definição de superfície regular.

Definição 3 O plano definido pelos vetores tangente e normal a uma curva é chamado de plano osculador (ver figura 2.3).

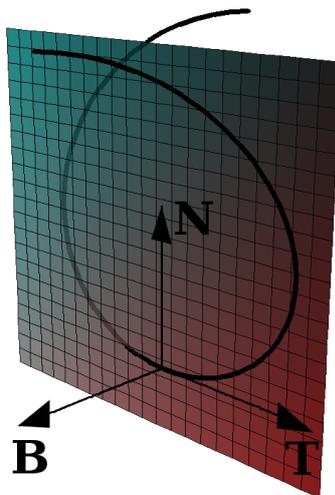


Figura 2.3: Ilustração do plano osculador (©wikipedia).

Definição 4 Uma curva em uma superfície S é dita assintótica se em cada ponto da curva seu plano osculador coincide com o plano tangente da superfície no mesmo ponto.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S , onde U é um aberto e seja $\gamma : I \rightarrow U$ uma curva no domínio da parametrização, ou seja, $\gamma(t) = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto real. A curva $\mathbf{x} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *curva assintótica* se, e somente se,

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] = 0, \quad \forall t \in I, \quad (2-1)$$

onde denotamos $[u, v, w]$ como o determinante da matriz 3×3 formada pelos vetores u, v, w (ver sumário de notações).

Notemos que os vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v definem o plano tangente a superfície em cada ponto e $(\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}$ define a direção do vetor normal a curva $\mathbf{x} \circ \gamma$. Por definição (ver (15)), uma curva é assintótica quando a curvatura normal $k_n = k \cos(\theta) = 0$ (ver figura 2.4), onde k é a curvatura da curva no ponto p e θ é o ângulo entre os vetores normal a curva $\mathbf{x} \circ \gamma$ e o normal a superfície S no ponto p . Daí temos que $(\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt} \in T_p S$, em particular $[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] = 0, \quad \forall t \in I$.

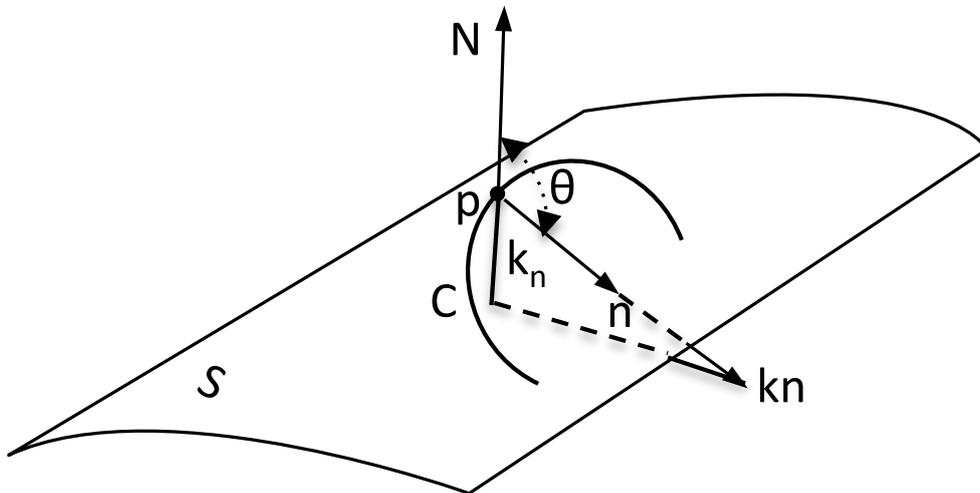


Figura 2.4: Curvatura normal.

A equação (2-1) é invariante por transformação equiafim, pois o plano tangente é covariante afim. Utilizando a regra da cadeia temos

$$(\mathbf{x} \circ \gamma)_t = \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \frac{dv}{dt} = \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt} &= \mathbf{x}_{uu} \circ \gamma \cdot \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \circ \gamma \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \mathbf{x}_{vv} \circ \gamma \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \\
&+ \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \frac{d^2v}{dt^2} \\
&= \mathbf{x}_{uu} \circ \gamma \cdot \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \circ \gamma \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + \mathbf{x}_{vv} \circ \gamma \cdot \dot{v}^2 + \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \ddot{u} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \ddot{v},
\end{aligned}$$

onde $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Assim, no ponto $p = \gamma(t)$ temos

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p), (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] &= [\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p), \dot{u}^2 \mathbf{x}_{uu}(p) + 2\dot{u}\dot{v} \mathbf{x}_{uv}(p) + \dot{v}^2 \mathbf{x}_{vv}(p)] \\
&= \dot{u}^2 [\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p), \mathbf{x}_{uu}(p)] \\
&+ 2\dot{u}\dot{v} [\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p), \mathbf{x}_{uv}(p)] + \dot{v}^2 [\mathbf{x}_u(p), \mathbf{x}_v(p), \mathbf{x}_{vv}(p)].
\end{aligned}$$

Definindo $L = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}]$, $M = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}]$ e $N = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}]$, obtemos $[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$.

Portanto a curva $\mathbf{x} \circ \gamma$ é assintótica se, e somente se,

$$L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = 0 = (\gamma')^T \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} (\gamma'). \quad (2-2)$$

Os determinantes L, M e N e a forma quadrática (2-2) são todos invariantes sobre um sistema fixo de parâmetros u e v.

Vamos estudar a forma diferencial

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (2-3)$$

mudando o sistema de coordenadas

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{x}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Notando que

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\
\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.
\end{aligned} \quad (2-4)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, (\bar{\mathbf{x}} \circ \bar{\gamma})_{tt}] &= \left[\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt} \right] \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + [\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] jac, \quad (2-5)
\end{aligned}$$

onde $jac = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$ é o Jacobiano da mudança de parâmetros, $\bar{\gamma}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ é uma curva no domínio da nova parametrização e a curva $\gamma(t) = (u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t)))$ é tal que

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{\gamma}(t)) = \mathbf{x}(u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t))) = \mathbf{x}(\gamma(t)).$$

Utilizamos a propriedade da função determinante ser multilinear e a propriedade antisimétrica para obtermos a equação (2-5).

Logo,

$$[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, (\bar{\mathbf{x}} \circ \bar{\gamma})_{tt}] = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \cdot jac. \quad (2-6)$$

Podemos ainda escrever a equação (2-6) da seguinte maneira

$$\bar{L}d\bar{u}^2 + 2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{N}d\bar{v}^2 = (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)jac. \quad (2-7)$$

Vamos encontrar os coeficientes \bar{L} , \bar{M} e \bar{N} . Para isso, notemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}} &= \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 + \mathbf{x}_u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} \right) + \mathbf{x}_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}^2} \right), \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}} &= \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \\ &\quad + \mathbf{x}_v \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}} &= \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 + \mathbf{x}_u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{v}^2} \right) + \mathbf{x}_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{v}^2} \right), \end{aligned}$$

daí, por definição temos que

$$\begin{aligned} \bar{L} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] \\ &= \left[\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}} \right] \\ &= \left[\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}} \right] + \left[\mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] \\ &= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] jac \\ &= \left[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}_u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2} \right) + \mathbf{x}_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}^2} \right) \right] jac \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \right. \\
&+ \left. [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}] \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \right\} jac \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \right\} jac.
\end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos que no cálculo do coeficiente \bar{L} , ou seja, utilizando as propriedades da função determinante, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}}] \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}}] jac \\
&= \left[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \right. \\
&+ \left. \mathbf{x}_u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right] jac \\
&= \left\{ [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) \right. \\
&+ \left. [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}] \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \right\} jac \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \right\} jac.
\end{aligned}$$

Para encontrarmos $\bar{N} = [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}}]$ basta trocarmos na expressão do \bar{L} a variável \bar{u} por \bar{v} , daí

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}}] \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 \right\} jac.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = (LN - M^2)jac^4$.

De fato, como

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right\} jac, \\
\bar{M} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} jac, \\
\bar{N} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} jac,
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \bar{L}\bar{N} &= jac^2 \left\{ L^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2LM \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{v}} \right) + LN \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 \right. \\ &+ 2LM \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{u}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 4M^2 \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{u}} \right) \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{v}} \right) + 2MN \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{u}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 \\ &\left. + LN \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2NM \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{v}} \right) + N^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 \right\} \quad (2-8) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{M}^2 &= jac^2 \left\{ L^2 \left(\frac{\partial u \partial u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} + \frac{\partial v \partial u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 + N^2 \left(\frac{\partial v \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 \right. \\ &+ 2LM \left(\frac{\partial u \partial u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right) \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} + \frac{\partial v \partial u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right) + 2LN \left(\frac{\partial u \partial u \partial v \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v} \partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right) \\ &\left. + 2MN \left(\frac{\partial v \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right) \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} + \frac{\partial v \partial u}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right) \right\}. \quad (2-9) \end{aligned}$$

Notemos que

$$jac^2 = \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u \partial v \partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v} \partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right) + \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right)^2. \quad (2-10)$$

Subtraindo (2-8) por (2-9) temos

$$\begin{aligned} \bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 &= jac^2 \left\{ LN \left(\left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u \partial v \partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v} \partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right) + \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right)^2 \right) \right. \\ &- M^2 \left(\left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u \partial v \partial u \partial v}{\partial \bar{u} \partial \bar{v} \partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right) + \left(\frac{\partial u \partial v}{\partial \bar{v} \partial \bar{u}} \right)^2 \right) \left. \right\} \quad (2-11) \\ &= jac^2 \{ (LN - M^2) jac^2 \} \\ &= jac^4 (LN - M^2). \end{aligned}$$

O que mostra o afirmado.

Finalmente, usando as equações (2-7) e (2-11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, (\bar{\mathbf{x}} \circ \bar{\gamma})_{tt}]}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} dt^2 &= \frac{\bar{L}d\bar{u}^2 + 2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{N}d\bar{v}^2}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} \\ &= \frac{(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)jac}{|\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2|^{1/4}} \\ &= \frac{(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)jac}{|jac^4(LN - M^2)|^{1/4}} \\ &= \frac{[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}]}{|LN - M^2|^{1/4}} dt^2. \end{aligned}$$

Isto mostra, que exceto pela eventual mudança de sinal, devido a $\frac{jac}{(jac^4)^{1/4}}$, mas que não gera problemas se fixarmos uma orientação, a forma quadrática (2-7) é uma forma diferencial invariante afim.

Essa forma quadrática é a métrica de Berwald-Blaschke dada por

$$ds^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}},$$

onde $L = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}]$, $M = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}]$ e $N = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}]$, e $d = LN - M^2$ é o coeficiente da métrica. Ao longo do desenvolvimento teórico, a métrica será considerada não-degenerada, isto é, $d \neq 0$.

Na geometria Euclidiana a primeira forma fundamental $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ é definida pela forma quadrática $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p \geq 0$. Escrevendo I_p em coordenadas, obtemos $I_p = E_e du^2 + 2F_e dudv + G_e dv^2$, onde $E_e = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F_e = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$, $G_e = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle$ e o produto interno definido no plano tangente T_pS é herdado do espaço vetorial ambiente, ou seja, em coordenadas é dado por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$, sendo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Observemos que na geometria Euclidiana buscamos propriedades geométricas que são invariantes por movimentos rígidos, ou ainda transformações que preservam ângulos, já na geometria afim (equiafim) tentamos encontrar propriedades que são invariantes por transformações equiafins, ou seja, as transformações que preservam volumes, em particular as transformações rígidas estão contidas nas transformações equiafins.

Observação 1 *Por simplicidade no texto ao escrevermos transformação afim estamos nos restringirmos as transformações equiafins.*

Definição 5 *A primeira forma fundamental afim é a aplicação definida por*

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=u,v} g_{ij} di dj,$$

onde $g_{11} = \frac{L}{|LN - M^2|^{1/4}}$, $g_{12} = g_{21} = \frac{M}{|LN - M^2|^{1/4}}$ e $g_{22} = \frac{N}{|LN - M^2|^{1/4}}$.

Observação 2 *Podemos relacionar os coeficientes da primeira forma fundamental afim com os coeficientes l_{ij} da segunda forma fundamental Euclidiana da seguinte maneira*

$$l_{ij} = \langle \mathbf{N}_e, \mathbf{x}_{ij} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}, \mathbf{x}_{ij} \right\rangle = \frac{[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{ij}]}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

sendo \mathbf{N}_e o normal Euclidiano dado por

$$\mathbf{N}_e = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Dessa forma, temos que o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana $K_e = \frac{\det(l_{ij})}{E_e G_e - F_e^2}$ está relacionada com o de $d = LN - M^2$. Logo,

1. $K_e < 0 \iff d < 0$,
2. $K_e = 0 \iff d = 0$,
3. $K_e > 0 \iff d > 0$.

O ponto onde $d < 0$, $d = 0$ ou $d > 0$ é chamado, respectivamente, ponto hiperbólico, parabólico ou elíptico (ver figura 2.5).

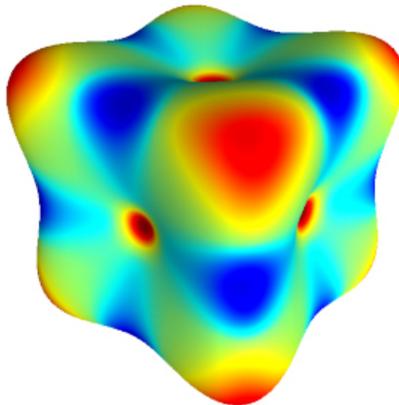


Figura 2.5: Interpretação geométrica do sinal de d . As regiões vermelhas, verdes e azuis indicam respectivamente curvaturas Gaussianas positivas, nulas e negativas (9).

2.2

Co-normal Afim e Normal Afim

Os vetores co-normal e normal afins são propriedades geométricas fundamentais para definirmos as curvaturas Gaussiana e média afins. Inicialmente, temos que calcular o normal Euclidiano e a curvatura Gaussiana Euclidiana. Seguimos a abordagem de Calabi (10) para a definição dos vetores co-normal e normal afins.

Consideremos uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície S . Relações de ortonormalidade não são preservadas sobre transformações afins. O normal Euclidiano \mathbf{N}_e é um vetor que satisfaz $\mathbf{N}_e(A(p)) = \frac{1}{\|A^T \mathbf{N}_e\|} A^{-T} \mathbf{N}_e$, onde

$A \in M(3)$; $\det(A) = 1$ e $p \in S$, ou seja, o normal Euclidiano não é contravariante, mas notemos que o plano tangente é de natureza covariante, pois se $\mathbf{x}_u \in T_p S$ e $\langle \mathbf{N}_e, \mathbf{x}_u \rangle = 0$, então $\langle A^{-T} \mathbf{N}_e, A \mathbf{x}_u \rangle = 0$. Portanto, podemos definir um vetor contravariante afim com a mesma direção de \mathbf{N}_e chamado de *co-normal afim* ν (ver figura 2.6). Ele é obtido fazendo uma mudança de escala no vetor normal Euclidiano

$$\nu = |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_e, \quad (2-12)$$

onde K_e é a curvatura Gaussiana Euclidiana. O co-normal afim satisfaz $\langle \nu, \mathbf{x}_u \rangle = 0$, $\mathbf{x}_u \in T_p S$ e a métrica afim satisfaz $\mathbf{d}^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$. O sinal \pm depende se o ponto é elíptico ou hiperbólico. De fato, usando a definição do co-normal afim temos

$$\begin{aligned} \nu_u &= (|K_e|^{-1/4})_u \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_{eu} \\ &= (|K_e|^{-1/4})_u \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4} (a_{11} \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_v), \\ \nu_v &= (|K_e|^{-1/4})_v \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_{ev} \\ &= (|K_e|^{-1/4})_v \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4} (a_{21} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

sendo $K_e = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Utilizando a multilinearidade e a antisimetria da função determinante, obtemos

$$\begin{aligned} [\nu, \nu_u, \nu_v] &= K_e^{-3/4} [\mathbf{N}_e, a_{11} \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_v, a_{21} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v] \\ &= K_e^{-3/4} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) [\mathbf{N}_e, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] \\ &= K_e^{1/4} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \\ &= K_e^{1/4} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|. \end{aligned}$$

Notando que $\mathbf{d} = K_e \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^4$. Temos que $\mathbf{d}^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$.

Por simplicidade no texto vamos considerar que estamos trabalhando em pontos elípticos.

Afirmção 1 *O vetor co-normal afim definido na equação (2-12) é um vetor contravariante, ou seja, $\nu(A(p)) = A^{-T}(\nu(p))$, onde $p \in S$ e A é uma transformação afim.*

Demonstração: Com efeito, por definição de curvatura Gaussiana Euclidiana

$$K_e(p) = \frac{\det(l_{ij})}{E_e G_e - F_e^2} = \frac{\det(l_{ij})}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2}$$

e como $A\mathbf{x}_u \times A\mathbf{x}_v = A^{-T}(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$, temos $K_e(A(p)) = \frac{K_e(p)}{\|A^{-T}\mathbf{N}_e\|^4}$.

Usando a definição do co-normal afim, obtemos

$$\begin{aligned}\nu(A(p)) &= |K_e(A(p))|^{-1/4}\mathbf{N}_e(A(p)) = \left(\frac{K_e(p)}{\|A^{-T}\mathbf{N}_e\|^4}\right)^{-1/4} \cdot \frac{1}{\|A^{-T}\mathbf{N}_e\|}A^{-T}\mathbf{N}_e \\ &= A^{-T}(\nu(p)).\end{aligned}$$

□

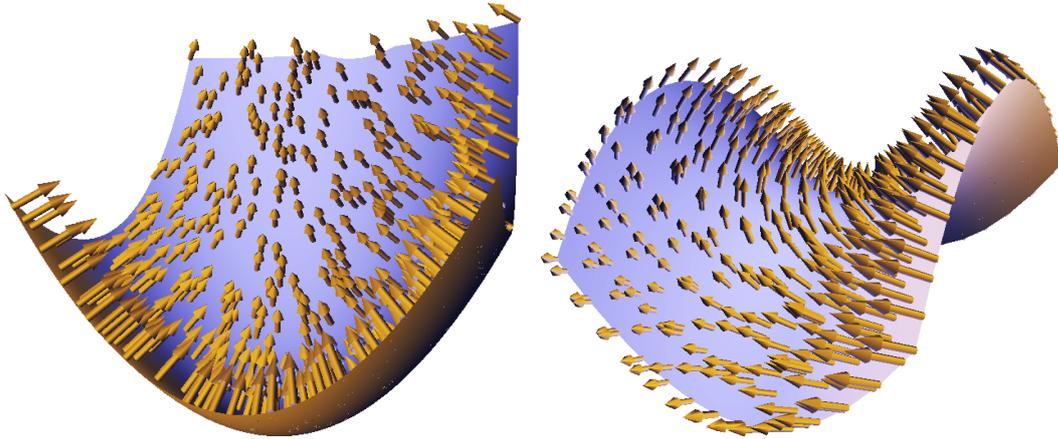


Figura 2.6: Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm co-normal afim apontando para o centro de cada superfície.

Como $\mathbf{d}^{1/4} = [\nu, \nu_u, \nu_v] \neq 0$, as derivadas $\nu_{\{u,v\}}$ definem um plano não degenerado. O vetor normal afim pode ser obtido através do vetor ortogonal ao plano gerado por $\{\nu_u, \nu_v\}$, este seria análogo ao vetor normal Euclidiano \mathbf{N}_e . Mais precisamente, o vetor *normal afim* ξ é definido localmente pela relação

$$\langle \nu, \xi \rangle = 1, \quad \langle \xi, \nu_u \rangle = 0, \quad \langle \xi, \nu_v \rangle = 0.$$

Se A é uma transformação afim, então os vetores co-normal e normal afins da superfície AS satisfazem

$$\langle \nu(A(p)), \xi(A(p)) \rangle = \langle A^{-T}\nu(p), A\xi(p) \rangle = \langle \nu, \xi \rangle = 1.$$

O normal afim satisfaz $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$ e $\mathbf{d}^{1/4} = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi]$, pois $\langle \nu, \xi \rangle = 1$ e usando a equação (2-12) temos

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] = K_e^{1/4}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = |LN - M^2|^{1/4} = \mathbf{d}^{1/4} \neq 0.$$

Esta última relação mostra que uma base local em cada ponto p da superfície pode ser obtida por $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi\}$.

Isto permite definir estruturas a partir da teoria de Cartan dos “moving frames”. Como $\langle \nu, \xi \rangle = 1$, $\langle \xi, \nu_u \rangle = 0$ e $\langle \xi, \nu_v \rangle = 0$, temos que existe uma função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi = \lambda(\nu_u \times \nu_v)$, com $\lambda = [\nu, \nu_u, \nu_v]^{-1} = \mathbf{d}^{-1/4}$.

2.3

Curvaturas Afins

No caso de geometria Euclidiana as curvaturas descrevem a variação do normal. Vimos que $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$, isto é, as derivadas $\xi_{\{u,v\}}$ são ortogonais a ν , que é paralelo a \mathbf{N}_e . Portanto, podemos definir o operador forma $\mathcal{S}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ por $\mathcal{S}_p(w) = -D_w \xi$.

Definição 6 *Os autovetores e autovalores do operador forma são chamados, respectivamente, direções e curvaturas principais afins.*

Como $\xi_{\{u,v\}}$ são tangentes à superfície temos que existem funções $(b_{ij})_{1 \leq i \leq 2} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\xi_u &= b_{11}\mathbf{x}_u + b_{12}\mathbf{x}_v, \\ \xi_v &= b_{21}\mathbf{x}_u + b_{22}\mathbf{x}_v.\end{aligned}\tag{2-13}$$

Podemos escrevê-los explicitamente como

$$\begin{aligned}b_{11} &= \mathbf{d}^{-1/4} \cdot [\xi_u, \mathbf{x}_v, \xi], \\ b_{12} &= \mathbf{d}^{-1/4} \cdot [\mathbf{x}_u, \xi_u, \xi], \\ b_{21} &= \mathbf{d}^{-1/4} \cdot [\xi_v, \mathbf{x}_v, \xi], \\ b_{22} &= \mathbf{d}^{-1/4} \cdot [\mathbf{x}_u, \xi_v, \xi].\end{aligned}$$

Os coeficientes b_{ij} formam uma matrix $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq 2}$, cujo determinante e o traço são respectivamente a curvaturas Gaussiana $\mathcal{K} = \det B$ e menos o dobro da curvatura média afim $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\text{tr} B$.

Observação 3 *Notemos que para calcularmos as curvaturas Gaussiana e média afins em cada ponto da superfície são necessários obtermos a variação do vetor normal afim, ou seja, é necessário termos a derivada da parametrização da superfície até a quarta ordem, enquanto que na geometria Euclidiana precisava apenas da derivada segunda, mas no caso afim ganhamos a invariância dessas curvaturas por transformações afins.*

2.4

Caso de Superfície Parametrizadas como Gráfico

Suponhamos que a superfície S seja um gráfico, ou seja, ele é parametrizado por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, onde $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, U é um aberto e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função.

Vamos encontrar as fórmulas dos invariantes afins definidos anteriormente.

Os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke são dados por

$$L = g_{xx}, \quad M = g_{xy} \quad e \quad N = g_{yy} \quad e \quad d = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2.$$

O vetor co-normal é dado por

$$\nu = |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_e = |g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2|^{-1/4} (-g_x, -g_y, 1), \quad (2-14)$$

sendo $K_e = (1 + g_x^2 + g_y^2)^{-2} (g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2)$ a curvatura Gaussiana Euclidiana.

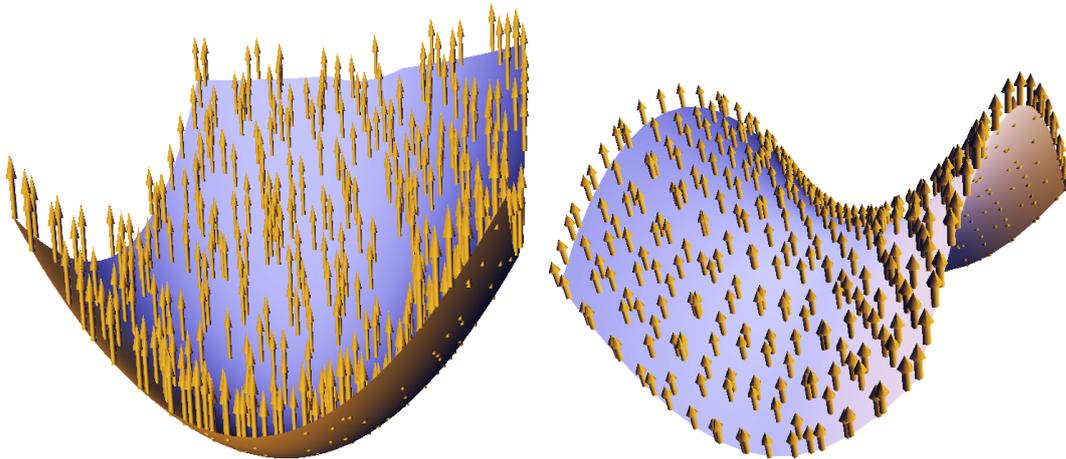


Figura 2.7: Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm normal afim ξ constante. Eles têm o papel do plano Euclidiano na geometria afim.

As coordenadas do normal afim ξ são

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} (g_{xx}g_{xy}g_{yyy} - g_{xx}g_{yy}g_{xyy} - g_{yy}^2g_{xxx} - 2g_{xy}^2g_{xyy} + 3g_{yy}g_{xy}g_{xxy}), \\ \xi_2 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} (g_{yy}g_{xy}g_{xxx} - g_{xx}g_{yy}g_{xxy} - g_{xx}^2g_{yyy} - 2g_{xy}^2g_{xxy} + 3g_{xx}g_{xy}g_{xyy}), \\ \xi_3 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} (4g_{xy}^4 + 4g_{xx}^2g_{yy}^2 - 8g_{xx}g_{yy}g_{xy}^2 + 3g_xg_{yy}g_{xy}g_{xxy} + 3g_yg_{xx}g_{xy}g_{xxy} \\ &\quad - g_xg_{yy}^2g_{xxx} - g_yg_{xx}^2g_{yyy} - 2g_xg_{xy}^2g_{xyy} - 2g_yg_{x,y}^2g_{xxy} \\ &\quad - g_xg_{xx}g_{yy}g_{xyy} - g_yg_{xx}g_{yy}g_{xxy} + g_xg_{xx}g_{xy}g_{yyy} + g_yg_{yy}g_{xy}g_{xxx}). \end{aligned} \quad (2-15)$$

Agora usando as equações (2-13) temos as curvaturas Gaussiana e média afins.

2.4.1

Exemplos Fundamentais

As formas mais simples da geometria Euclidiana são o plano cuja normal é constante e portanto a curvatura é zero e a esfera com curvatura constante. Na geometria afim as formas equivalentes são os parabolóides elíptico e hiperbólico com normal afim constante (ver figura 2.7), o elipsóide com curvatura constante. Suas estruturas afins estão atribuídas na tabela 2.1.

	Parabolóide Elíptico	Parabolóide Hiperbólico	Esfera
$\mathbf{x}(x, y)$	$(x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$	$(x, y, \frac{1}{2}(x^2 - y^2))$	$(x, y, \sqrt{-x^2 - y^2 + r^2})$
\mathbf{N}_e	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot (-x, -y, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot (-x, y, 1)$	$\frac{1}{r} \cdot (x, y, 1)$
K_e	$(1 + x^2 + y^2)^{-2}$	$-(1 + x^2 + y^2)^{-2}$	r^{-2}
d	1	-1	$r^2(-x^2 - y^2 + r^2)^{-2}$
ν	$(-x, -y, 1)$	$(-x, y, 1)$	$r^{-1/2} \left(x, y, \sqrt{-x^2 - y^2 + r^2} \right)$
ξ	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$r^{-3/2} \left(x, y, \sqrt{-x^2 - y^2 + r^2} \right)$
\mathcal{K}	0	0	r^{-3}
\mathcal{H}	0	0	$-2r^{-3/2}$

Tabela 2.1: Exemplos fundamentais de estruturas afins.

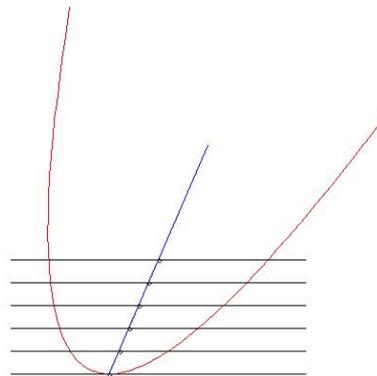


Figura 2.8: ((©)Wikipedia) Interpretação geométrica do normal afim.

2.4.2

Interpretação Geométrica do Normal Afim

Existe uma interpretação geométrica do normal afim em pontos elípticos (8). Consideremos uma superfície S e seja $p \in S$ um ponto elíptico. Seja \mathcal{T}_t uma família de planos paralelos ao plano tangente a distância t de $\mathcal{T}_0 = T_p S$. A interseção de \mathcal{T}_t com a superfície, para t suficientemente pequeno, limita um domínio convexo em \mathcal{T}_t . Cada domínio convexo tem um centro de massa. O lugar do centro de massa, ou centro de gravidade, desses domínios define uma curva $c(t)$ cuja direção tangente é a direção do normal afim de \mathbf{x} em p : $\xi = c'(t)$. A figura 2.8 ilustra essa interpretação geométrica.

2.4.3

Interpretação Geométrica da Curvatura Afim

Nesta subseção apresentaremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana afim. Esse resultado é uma extensão da interpretação geométrica da curvatura Gaussiana Euclidiana (15).

Teorema 1 (Interpretação Geométrica da Curvatura Gaussiana)

Seja p um ponto de uma superfície S e seja V uma vizinhança conexa de $p \in S$, onde $\mathcal{K}(p) > 0$. Sejam $A(B)$ a área de uma região $B \subset V$, contendo p , $A'(B)$ é a área da imagem de B pela imersão $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ induzida pelo normal afim ξ . Então a curvatura Gaussiana afim no ponto p é dada por

$$\mathcal{K}(p) = \lim_{B_n \rightarrow p} \frac{A'(B_n)}{A(B_n)},$$

onde o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n cujos diâmetros decrescem para 0.

Demonstração: A área de B é dada por

$$A(B) = \iint_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv,$$

onde $\mathbf{x}(u, v)$ é uma parametrização com $\mathbf{x}(0) = p$, cuja vizinhança contém V e R é a região do plano uv parametrizando B . A área $A'(B)$ é dada a partir das equações de ξ na parametrização dada por

$$A'(B) = \iint_R \|\xi_u \times \xi_v\| dudv.$$

Sabemos por (2-13) que podemos escrever

$$\xi_u = b_{11}\mathbf{x}_u + b_{12}\mathbf{x}_v, \quad (2-16)$$

$$\xi_v = b_{21}\mathbf{x}_u + b_{22}\mathbf{x}_v,$$

sendo a curvatura Gaussiana afim em p igual a $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$, obtemos

$$A'(B) = \iint_R \mathcal{K} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv. \quad (2-17)$$

Passando ao limite quando $|R| \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{\overline{A'}}{\overline{A}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{A'}{A} &= \frac{\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R \mathcal{K} \|x_u \times x_v\| dudv}{\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R \|x_u \times x_v\| dudv} \\
&= \frac{\mathcal{K} \|x_u \times x_v\|}{\|x_u \times x_v\|} = \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Usamos o teorema do valor médio na penúltima igualdade.

□

Vale comentar que usamos a convensão de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa V e a área de sua imagem por ξ , equação (2-17), têm o mesmo sinal se $\mathcal{K} > 0$ em V , e sinais opostos se $\mathcal{K} < 0$ em V . Sendo assim, o resultado acima também é válido quando $\mathcal{K}(p) < 0$.

2.4.4

Vizinhança Tubular Afim

Na geometria Euclidiana é possível mostrar a existência de vizinhança tubular, além disso prova-se que uma superfície orientável em \mathbb{R}^3 é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável (15). Neste sentido, mostraremos a existência de uma vizinhança tubular afim e provaremos que localmente a superfície é dada como a pré-imagem do valor regular 0.

Definição 7 (Vizinhança Tubular Afim) Dizemos que V é uma vizinhança tubular afim de S , se é possível escolher sobre a reta normal afim passando por $p \in S$ um intervalo aberto Q_p em torno de p e de comprimento $2\epsilon_p$, $\epsilon_p > 0$ variando com p , de tal forma que se $p \neq q \in S$ então $Q_p \cap Q_q = \emptyset$. Além disso, a união $\bigcup Q_p$, $p \in S$, constitui um conjunto aberto V em \mathbb{R}^3 , que contém S e tem a propriedade de que para cada ponto de V passa uma única reta normal afim a S .

Mostraremos agora a existência da vizinhança tubular afim de uma superfície conexa, convexa e orientável. Inicialmente, provaremos uma versão local desse fato, isto é, mostraremos que para cada p de uma superfície regular existe uma vizinhança de p em S que tem uma vizinhança tubular afim.

Proposição 1 (Existência da Vizinhança Tubular Afim Local) Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, conexa, convexa e orientável e $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e seja $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$ ponto tal que $K_e \neq 0$, então, existe uma vizinhança tubular afim $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p \in W$.

Demonstração: Seja $T : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação definida por

$$T(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + t\xi(u, v) \quad (u, v) \in U \text{ e } t \in \mathbb{R},$$

onde $\xi(u, v)$ é o vetor normal afim calculado em p . Notemos que T é diferenciável e em $(u_0, v_0, 0)$ o seu Jacobiano é $[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] \neq 0$. Pelo Teorema da função inversa existe um paralelepípedo $\mathcal{P} = (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$, com $\epsilon > 0, \delta > 0$, em torno de $(u_0, v_0, 0)$, tal que $T|_{\mathcal{P}}$ é injetiva. Basta tomar $W = T(\mathcal{P})$. Com efeito, se $p \neq q \in W \cap S$ então existem $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ tais que $\mathbf{x}(u_1, v_1) = p$ e $\mathbf{x}(u_2, v_2) = q$.

Logo para todo $r, s \in (-\epsilon, \epsilon)$, pela injetividade de $T|_{\mathcal{P}}$, temos $T(u_1, v_1, r) \neq T(u_2, v_2, s)$. O que mostra que W é uma vizinhança tubular afim.

□

Fixemos uma orientação para a superfície convexa S , vimos na proposição 1 que o par de segmentos Q_p e Q_q , $p \neq q$ da vizinhança tubular W não se intersectam. Assim, para cada $w \in W$ passa uma única reta normal afim a S que encontra S em um ponto s . Com a notação da proposição 1 obtemos que $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora e seu Jacobiano não se anula. Logo, a aplicação $T^{-1} : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}$ dada por $T^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z))$ é diferenciável e em particular $t : W \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Como $t^{-1}(0) = W \cap S$ e 0 é valor regular para t , pois o Jacobiano de T não se anula e portanto $dT^{-1} \neq 0$.

Queremos estudar o caso global, isto é, provar a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície convexa e orientável inteira. Vamos nos restringir ao caso de superfície compacta.

Proposição 2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta, orientável e estritamente convexa. Então existe um número $\epsilon > 0$ tal que sempre que $p, q \in S$, os segmentos das retas normais de comprimento 2ϵ , centrados em p e q , são disjuntos, ou seja, S tem uma vizinhança tubular afim.*

Demonstração: Pela propriedade de Lebesgue da cobertura de compactos, temos que para cada $p \in S$ existe uma vizinhança W_p e um número $\epsilon_p > 0$ tais que vale a proposição para pontos de W_p com $\epsilon = \epsilon_p$. Tomando todos os pontos $p \in S$, obtemos uma família de $\{W_p\}$ com $S \subset \bigcup_{p \in S} W_p$. Utilizando a propriedade de Heine-Borel da cobertura de compactos é possível escolher um número finito de elementos de $\{W_p\}$, digamos, W_1, \dots, W_k correspondendo a

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$, tais que $S \subset \bigcup_{i=1}^k W_i$. Tome

$$0 < \epsilon < \min \left(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \frac{\delta}{2} \right),$$

onde δ é o número de Lebesgue da família $\{W_i\}$.

Mostraremos que ϵ definido acima satisfaz a proposição. De fato, sejam dois pontos distintos $p, q \in S$. Suponhamos que ambos pertençam a algum W_i , $i = 1, \dots, k$, então os segmentos das retas normais afins centrados em p e q com comprimento 2ϵ não se intersectam, pois $\epsilon < \epsilon_i$.

Agora, se p e q não pertencem a um mesmo W_i , então a distância entre eles é maior ou igual a δ , caso os segmentos das retas normais afins centrados em p e q e com comprimento 2ϵ , se encontrassem em um ponto $Q \in \mathbb{R}^3$, teríamos

$$2\epsilon \geq d(p, Q) + d(Q, q) \geq d(p, q) \geq \delta,$$

o que contradiz a definição do ϵ .

□

Usando o resultado da proposição 2 temos imediatamente o seguinte teorema.

Teorema 2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta, orientável e estritamente convexa. Então existe uma função diferenciável $t : W \rightarrow \mathbb{R}$, definida em $W \subset \mathbb{R}^3$, com $W \supset S$, vizinhança tubular afim de S , que tem zero como valor regular e é tal que $S = t^{-1}(0)$.*

2.4.5 Superfícies Paralelas Afins

Seja S superfície convexa parametrizada por $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a superfície paralela afim S_t é parametrizada por $T_t = \mathbf{x} + t\xi$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Na literatura encontramos um texto que trabalha com superfícies paralelas afins (14), cujo objetivo do autor é obter informações sobre singularidades em determinados conjuntos. Já o nosso objetivo é relacionar as informações geométricas das superfícies paralelas afins com a vizinhança tubular afim. O número t é conhecido na literatura como distância afim.

Uma pergunta natural de se fazer é a seguinte

“Qual a condição sobre t para que S_t seja uma superfície regular?”

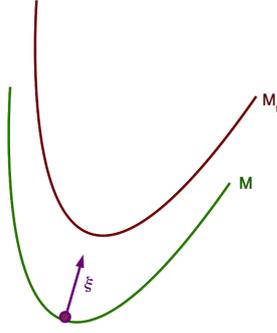


Figura 2.9: Curvas paralelas.

Notemos que T_t é diferenciável, vamos encontrar os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke L_t , M_t e $N_t : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} L_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{uu}], \\ M_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{uv}], \\ N_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{vv}]. \end{aligned}$$

Utilizando as equações (2-16) temos que

$$\begin{aligned} (T_t)_u &= (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_u + tb_{12}\mathbf{x}_v, \\ (T_t)_v &= tb_{21}\mathbf{x}_u + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_v, \\ (T_t)_{uu} &= (b_{11})_u t\mathbf{x}_u + (b_{12})_u t\mathbf{x}_v + (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_{uu} + tb_{12}\mathbf{x}_{uv}, \\ (T_t)_{uv} &= (b_{11})_v t\mathbf{x}_u + (b_{12})_v t\mathbf{x}_v + (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_{uv} + tb_{12}\mathbf{x}_{vv}, \\ (T_t)_{vu} &= (b_{21})_u t\mathbf{x}_u + (b_{22})_u t\mathbf{x}_v + b_{21}t\mathbf{x}_{uu} + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_{uv}, \\ (T_t)_{vv} &= (b_{21})_v t\mathbf{x}_u + (b_{22})_v t\mathbf{x}_v + b_{21}t\mathbf{x}_{uv} + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_{vv}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

Proposição 3 *O coeficiente da nova métrica é dado por*

$$d_t = |L_t N_t - M_t^2|^{1/4} = \mathbf{d}(1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})^{3/4}. \quad (2-19)$$

Demonstração: Com efeito, usando a expressão (2-18), temos que os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke L_t, M_t, N_t são dados por

$$\begin{aligned} L_t(u, v) &= p(t)((1 + tb_{11})L_0 + tb_{12}M_0), \\ M_t(u, v) &= p(t)((1 + tb_{11})M_0 + tb_{12}N_0), \\ M_t(u, v) &= p(t)(tb_{21}L_0 + (1 + tb_{22})M_0), \\ N_t(u, v) &= p(t)(tb_{21}M_0 + (1 + tb_{22})N_0), \end{aligned}$$

onde $p(t) = t^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + t(b_{11} + b_{22}) + 1$.

Temos duas expressões para $M_t(u, v)$ que são iguais, devido a definição de $(T_t)_{uv} = (T_t)_{vu}$. Escrevendo em forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} L_t \\ M_t \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} (1 + tb_{11}) & tb_{12} \\ tb_{21} & (1 + tb_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} N_t \\ -M_t \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} (1 + tb_{22}) & -tb_{21} \\ -tb_{12} & (1 + tb_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ -M_0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$L_t N_t - M_t^2 = \begin{pmatrix} L_t & M_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t \\ -M_t \end{pmatrix}.$$

Segue que $L_t N_t - M_t^2 = p(t)^3 (L_0 N_0 - M_0^2) = \mathbf{d}^4 (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})$, donde

$$d_t = |L_t N_t - M_t^2|^{1/4} = \mathbf{d} (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})^{3/4}.$$

□

Logo, dentro das hipóteses da proposição 2 podemos enunciar o seguinte resultado

Proposição 4 *A superfície S_t é regular com métrica não degenerada se, e somente se, $(1 - 2\mathcal{H}t + \mathcal{K}t^2) \neq 0$, para $t < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é dado na proposição 2.*

Observação 4 *Da proposição anterior temos que se \mathbf{x}_t é regular, então os vetores ξ_u e ξ_v são linearmente independentes, pois*

$$1 + (b_{11} + b_{22})t + (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})t^2 \neq 0,$$

ou ainda que $1/t$ não é um autovalor do operador forma.

Colorário 1 *Se $p \in S$ é uma ponto elíptico ou hiperbólico, então $p_t \in S_t$ também será, desde que S_t seja uma superfície regular.*

Demonstração: Isto segue diretamente da equação (2-19).

□

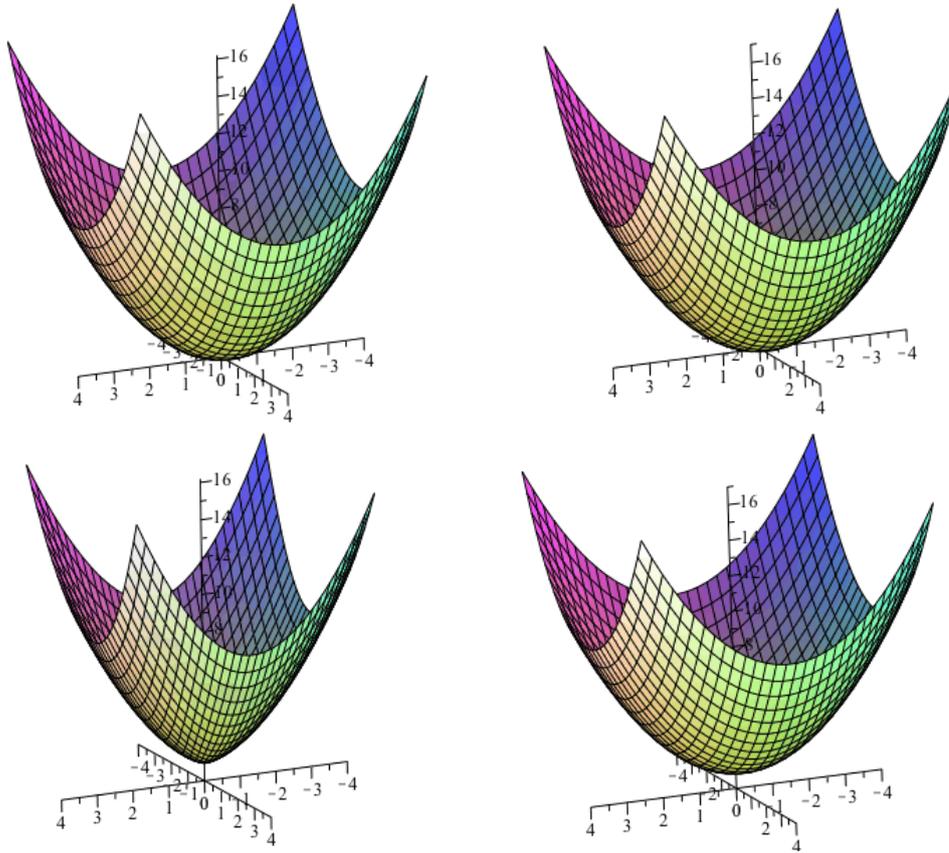


Figura 2.10: Superfícies paralelas afins no parabolóide elíptico.

Na figura 2.10 usamos o normal Euclidiano (à esquerda) e o normal afim (à direita) para obter as superfícies paralelas para o parabolóide elíptico.

2.4.6 Fórmula de Minkowski Afim

Nesta subsecção estendemos a conhecida fórmula de Minkowski para dados geométricos afins.

Teorema 3 (Fórmula de Minkowski Afim) *Sejam S uma superfície compacta e convexa, e $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ parametrização de S . Consideremos uma variação dessa superfície ao longo do vetor normal afim, isto é,*

$$T_t(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + t\xi(u, v),$$

onde $0 \leq t \leq M$, de modo que S_t seja regular. Então,

$$\text{Vol}(S_t) = \text{Vol}(S) + M\bar{A}(S) - M^2 \int_S \mathcal{H}d\bar{A} + \frac{M^3}{3} \int_S \mathcal{K}d\bar{A},$$

onde $d\bar{A} = d^{1/4}dA = K_e^{1/4} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv$ é forma de área afim.

Demonstração: Por definição temos que

$$Vol(S_t) = Vol(S) + \iiint_{T_t(\mathcal{D})} 1dV,$$

onde $\mathcal{D} = \{(u, v, w) / (u, v) \in U, w \in [0, M]\}$. Usando a fórmula de mudança de variáveis temos que

$$\iiint_{T_t(\mathcal{D})} 1dV = \iiint_{\mathcal{D}} 1|\det(jac(T_t))|dtdA,$$

onde $jac(T_t)$ é a matriz Jacobiana de T_t . Obtemos

$$\begin{aligned} \det(jac(T_t)) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_t}{\partial u} & \frac{\partial T_t}{\partial v} & \frac{\partial T_t}{\partial t} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{x}_u + t\xi_u, \mathbf{x}_v + t\xi_v, \xi] \\ &= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] + t([\xi_u, \mathbf{x}_v, \xi] + [\mathbf{x}_u, \xi_v, \xi]) + t^2 [\xi_u, \xi_v, \xi] \\ &= (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})(d^{1/4}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Vol(S_t) &= Vol(S) + \iint_U \int_{w=0}^M (1 - 2w\mathcal{H} + w^2\mathcal{K})d^{1/4}dw dA \\ &= Vol(S) + \iint_U \int_{w=0}^M (1 - 2w\mathcal{H} + w^2\mathcal{K})d\bar{A}dw \\ &= Vol(S) + M\bar{A}(S) - M^2 \int_S \mathcal{H}d\bar{A} + \frac{M^3}{3} \int_S \mathcal{K}d\bar{A}. \end{aligned}$$

□

3

Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Implícitas

Representações implícitas de modelos geométricos são amplamente usados em aplicações (38), como por exemplo para deformação, operações Booleanas e offsets (16). O cálculo das estruturas geométricas e topológicas de tais representações pode ser complicado, embora ele seja bastante conhecido para representações paramétricas (15). Fórmulas de curvaturas para superfícies implícitas não tinham sido dadas de forma clara até recentemente (21). Há pouco, a métrica de Berwald-Blaschke (33) foi usada para determinar geodésicas invariantes e tal ferramenta permite dá várias aplicações em análise de formas. A figura 3.1 item (a) ilustra as curvaturas Gaussiana e média afins na superfície banana, nos itens (b) e (c) foram aplicado transformações afins na banana e notemos que as propriedades geométricas se preservaram. Em particular tais propriedades poderão ser aplicadas para identificar regiões.

Neste capítulo, propomos obter as fórmulas para calcular as estruturas afins de superfícies implícitas e uma redução geométrica para calculá-las de forma robusta.¹

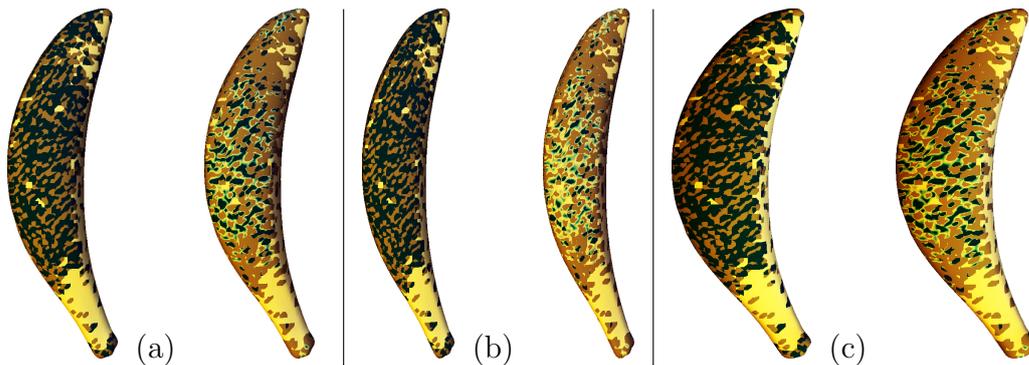


Figura 3.1: Em (a) modelo implícito de uma banana com as curvaturas Gaussiana (à esquerda) e média afins (à direita), cores escuras indicam maiores curvaturas. Resultado após aplicar transformações afins $p \mapsto A \cdot p$. Notemos que as características das cores se preservaram, ou seja, as curvaturas se mantiveram. No caso Euclidiano isso não ocorreria.

¹O conteúdo exposto nesse capítulo tem interseção com o artigo intitulado “Affine-Invariant Curvature Estimators for Implicit Surfaces”, submetido para o jornal “Computer Aided Geometric Design”, os revisores deram como resposta somente “Minor Revision”, cujos os autores são Maria Andrade e Thomas Lewiner.

Consideremos a partir daqui estruturas afins de uma superfície descrita implicitamente, ou seja, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, onde f é de classe C^4 e 0 é valor regular de f .

3.1

Plano Tangente e Métrica Afim

Dado um ponto $p \in S$ que é regular, isto é $\nabla f(p) = (f_x, f_y, f_z)(p) \neq 0$, assumiremos, sem perda de generalidade que $f_z(p) \neq 0$. O próximo resultado diz que sob certas condições de f a superfície localmente é um gráfico, a saber

Teorema 4 (Teorema da Função Implícita) *Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe $C^k, k \geq 1$. Um ponto do \mathbb{R}^{n+1} será denotado por (x, z) , onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x_0, z_0) = 0$ e $\nabla f(x_0, z_0) \neq 0$. Então, existe uma bola aberta $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e uma vizinhança V de z_0 tal que $z = g(x)$, para uma única função g de classe C^k em \mathcal{B} e que satisfaz $f(x, g(x)) = 0$. Além disso,*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, i = 1 \dots n, \quad (3-1)$$

onde as derivadas de f são calculadas em $(x, z) \in V$ e as de g em $x \in \mathcal{B}$.

Portanto, o teorema da função implícita garante a existência de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a equação $z = g(x, y)$ descreve a superfície S em uma vizinhança de p . Assim, S pode ser parametrizada em volta de p como um gráfico $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$.

Notemos que as derivadas de g obtidas a partir do teorema da função implícita podem conduzir a instabilidades numéricas quando $|f_z(p)|$ tem valor pequeno. Os *vetores tangentes* são $\mathbf{g}_x = (1, 0, g_x)$ e $\mathbf{g}_y = (0, 1, g_y)$.

A métrica afim de *Berwald-Blaschke* (ver subseção 2.1.2) é expressa pela forma bilinear

$$\mathbf{d}^{-1/4} \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} L &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xx}] = g_{xx}(x, y), & M &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xy}] = g_{xy}(x, y), \\ N &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{yy}] = g_{yy}(x, y), & \mathbf{d} &= LN - M^2 = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2. \end{aligned}$$

O elemento de área afim da superfície é dado por $\mathbf{d}\bar{A} = |\mathbf{d}|^{1/4} \cdot \mathbf{d}x\mathbf{d}y$.

A partir das equações $f(x, y, g(x, y)) = 0$ e (3-1), obtemos

$$g_{xx} = -\frac{f_{xx}}{f_z} + \frac{2f_{xz}f_x}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_x^2}{f_z^3},$$

$$\begin{aligned}
g_{xy} &= -\frac{f_{xy}}{f_z} + \frac{f_{yz}f_x + f_yf_{xz}}{f_z^2} - \frac{f_yf_{zz}f_x}{f_z^3} \\
g_{yy} &= -\frac{f_{yy}}{f_z} + \frac{2f_{yz}f_y}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_y^2}{f_z^3},
\end{aligned} \tag{3-2}$$

onde as derivadas de g são calculadas em (x, y) e as de f em $(x, y, g(x, y))$.

Em particular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} = \frac{1}{f_z^4} \cdot \left(\right. & (f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2) f_x^2 + 2(f_{xz}f_{xy} - f_{xx}f_{yz}) f_y f_z + \\
& (f_{zz}f_{xx} - f_{xz}^2) f_y^2 + 2(f_{xy}f_{yz} - f_{yy}f_{xz}) f_z f_x + \\
& \left. (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2 + 2(f_{yz}f_{xz} - f_{zz}f_{xy}) f_x f_y \right).
\end{aligned} \tag{3-3}$$

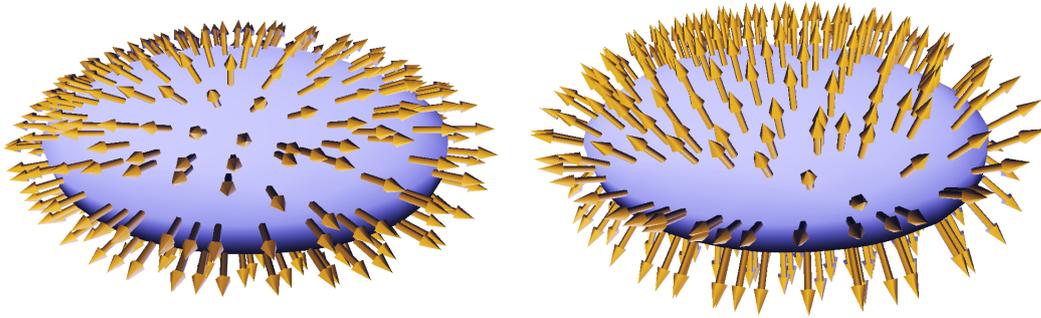


Figura 3.2: Vetores normal afim ξ (à esquerda) e co-normal afim ν (à direita) direções num elipsóide. O co-normal é linear com o normal Euclidiano, enquanto que o normal afim aponta em direção ao centro do elipsóide, enfatizando que um elipsóide é a imagem afim de uma esfera.

3.2

Co-normal Afim e Normal Afim

O vetor contravariante afim, chamado de *co-normal afim* ν pode ser obtido a partir de uma escala no vetor normal Euclidiano (10) (ver figura 3.2):

$$\nu = |K_e|^{-1/4} \mathbf{N}_e = |g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2|^{-1/4} (-g_x, -g_y, 1), \tag{3-4}$$

onde K_e é a curvatura Gaussiana Euclidiana dada por

$$K_e = (1 + g_y^2 + g_x^2)^{-2} (g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2).$$

O co-normal afim satisfaz $\langle \nu, \mathbf{g}_{\{x,y\}} \rangle = 0$ e a métrica $\mathbf{d}^{1/4} = [\nu, \nu_x, \nu_y]$.

A fórmula geral para o co-normal em uma superfície implícita pode ser

encontrada a partir da equação (3-4)

$$\nu = \frac{1}{f_z d^{1/4}} (f_x, f_y, f_z).$$

A fórmula explícita para o normal afim em função das derivadas de g foi dada nas equações (2-15), para encontrarmos ξ em função de f basta encontrar as derivadas de g até a terceira ordem como fizemos em (3-2) no cálculo da segunda derivada de g (ver apêndice A).

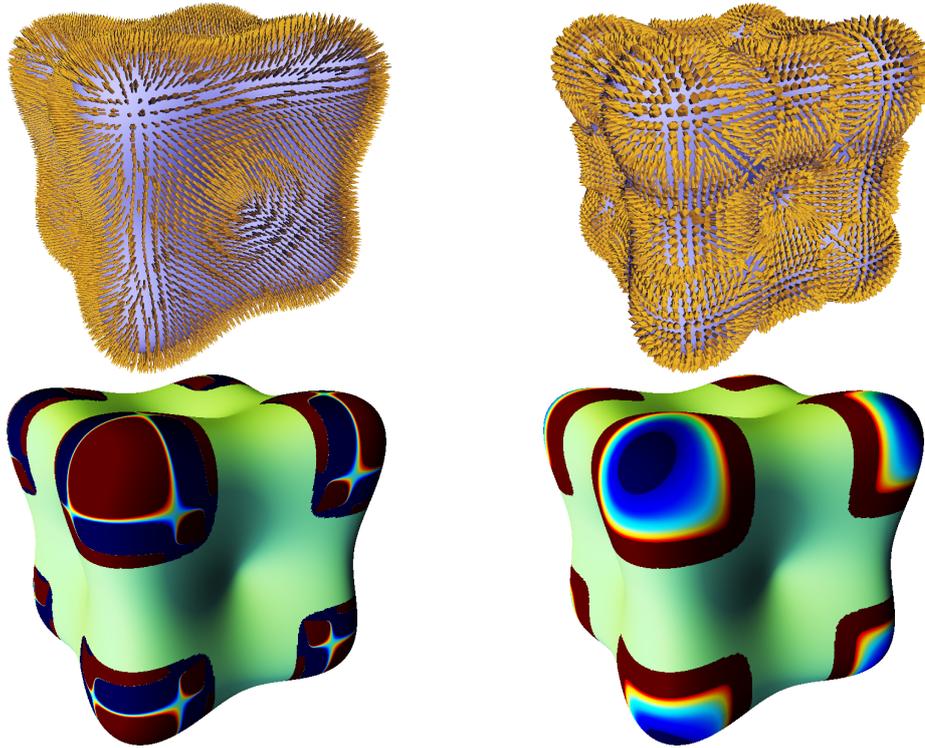


Figura 3.3: Estruturas afins na superfície *blobby* dada pela expressão $(3x)^4 + (3y)^4 + (3z)^4 - 45x^2 - 45y^2 - 45z^2 + 6 = 0$. Da esquerda para a direita, direção co-normal ν , direção normal ξ , curvaturas Gaussiana \mathcal{K} e média \mathcal{H} , coloridas de vermelho para azul, a parte central verde correspondente a métrica degenerada.

Notemos que normalizamos os vetores co-normais e normais afins, pois quando $K_e \approx 0$ estes têm comprimento infinito.

De forma similar encontra-se os coeficientes b_{ij} dados no capítulo 2 e assim as curvaturas Gaussiana e média afim (ver figura 3.3) em função de f (ver apêndice A).

3.3

Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas

As fórmulas para as estruturas afins encontradas na seção anterior são uma extensão para o caso de gráfico $G = \{ (x, y, g(x, y)), (x, y) \in U \}$ e seus tamanhos crescem bastante quando usamos o teorema da função implícita para

expressar essas estruturas afins diretamente em termos da função implícita f . Isso leva à uma significativa instabilidade numérica durante o cálculo (ver figura 3.4) e prejudica a invariância afim das quantidades calculadas (ver figura 3.5).

No entanto, sabemos como cada quantidade varia sobre uma transformação afim: a métrica e as curvaturas Gaussina e média são invariantes, o co-normal é contravariante e o normal é covariante. Aqui definimos uma transformação afim A que simplifica as fórmulas acima e contorna (ou isola) as instabilidades numéricas.

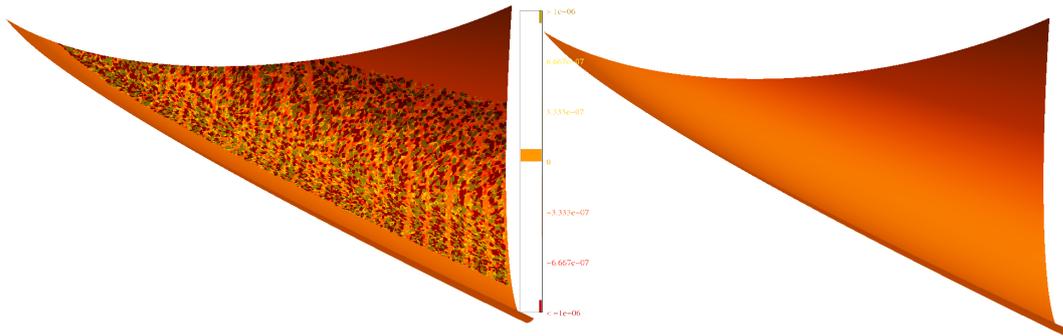


Figura 3.4: A curvatura afim do parabolóide é $\mathcal{K} = 0$, mas uma estimativa direta usando diretamente o teorema da função implícita apresenta uma grande instabilidade numérica (à esquerda). Com fórmulas simplificadas a estimativa é mais estável (à direita).

Na próxima seção, primeiro introduziremos esta transformação, encontraremos as fórmulas para a estrutura afim depois da simplificação e finalmente mostraremos como calcular a estrutura afim para a superfície implícita no caso geral usando a simplificação. No apêndice A colocamos as fórmulas para os invariantes afins sem a transformação.

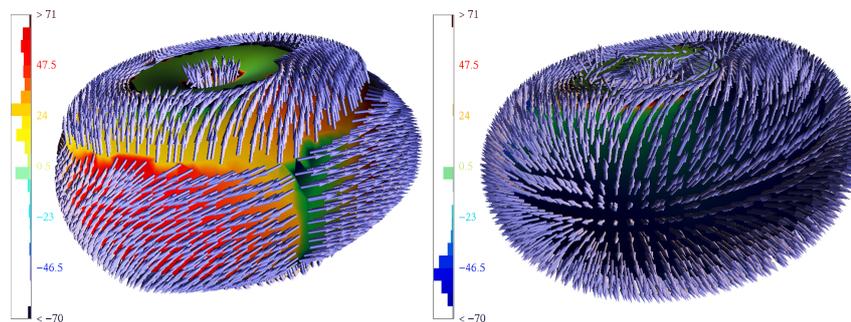


Figura 3.5: A escolha de um eixo não invariante leva a discontinuidades na estimativa de ν (à esquerda) e mais ainda na curvatura. Com uma redução geométrica, a curvatura média afim \mathcal{H} é melhor aproximada (à direita).

3.3.1 Redução por Transformação Afim

Como todas as fórmulas implícitas são encontradas a partir do teorema da função implícita, muitos termos podem ser simplificados se pudermos definir o gradiente de f por um vetor constante por exemplo $(0, 0, 1)$ depois de uma transformação afim A . Fazemos uma rotação no plano xy que reduz ainda mais o tamanho de nossas fórmulas.

Mais precisamente, procuramos por uma transformação afim A . Aqui estamos considerando que a transformação A seja apenas a parte linear, pois a translação não influencia significativamente. Neste caso, teremos uma composição de uma rotação R_1 e uma mudança de escala S e uma rotação R_2 , onde $S \circ R_1$ leva o vetor gradiente de f para $(0, 0, 1)$ e a rotação R_2 no plano xy garanti que $f_{xy} = 0$, o que simplifica vários termos nas fórmulas dos invariantes afins. O efeito desta transformação sobre as derivadas é descrita na seguinte proposição e a construção de A (ver figura 3.6) é detalhada na sua demonstração.

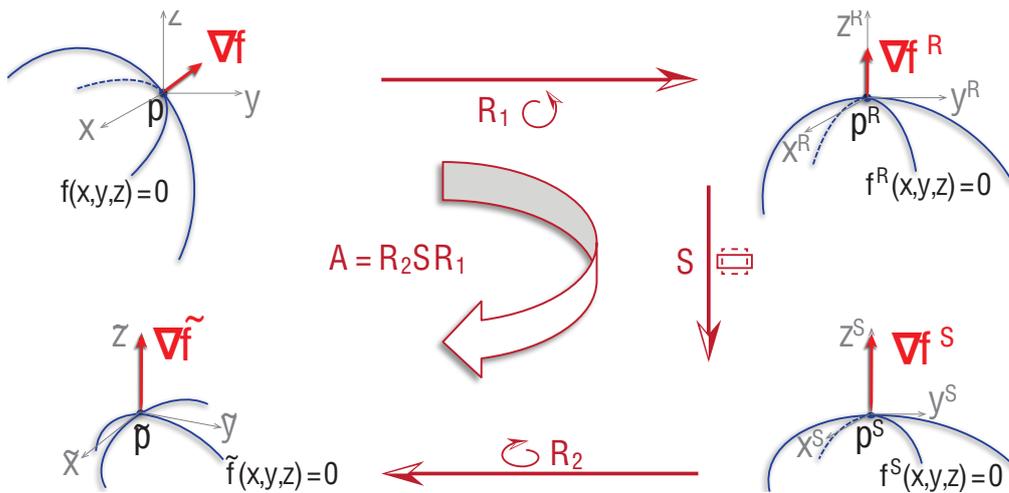


Figura 3.6: Construção da transformação A .

Teorema 5 Em cada ponto regular p de uma superfície implícita $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$ existe uma transformação equiafim A tal que em cada ponto $\tilde{p} = A(p)$ a superfície implícita transformada $\{\tilde{p} \in \mathbb{R}^3, \tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p})) = 0\}$ tem as seguintes propriedades

- O vetor gradiente é o vetor unitário vertical: $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = (0, 0, 1)$.
- A derivada cruzada \tilde{f}_{xy} zero, ou seja, $\tilde{f}_{xy}(\tilde{p}) = 0$.

Demonstração: Primeiro observe que $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = \nabla f(p) \cdot A^{-1}$ (escrevendo o gradiente em linha). Deduzimos as transformações para o primeiro item

com a geometria descritiva simples. Decompomos a transformação afim como $A = R_2 S R_1$ (ver figura 3.6), onde R_1 é a rotação em \mathbb{R}^3 , S é uma escala não-uniforme ao longo de z e do plano xy e R_2 é uma rotação no plano xy . A rotação R_1 é uma aplicação de rotação de $\nabla f(p)$ para o vetor vertical $(0, 0, \|\nabla f(p)\|)$. Denotemos por f^R a função implícita transformada que é dada por $f^R(p) = f(R_1^{-1}(p))$. Verifica-se que o vetor gradiente de f^R é

$$(\nabla f^R)^T = R_1^{-T}(\nabla f)^T = R_1(\nabla f)^T = (0, 0, \|\nabla f(p)\|)^T.$$

Fazemos uma escala no vetor gradiente obtido. Entretanto, para obter uma transformação afim, temos que compensar a escala ao longo de z no plano xy . Portanto, definimos S pela matriz diagonal $S = \text{diag}(\eta^{-\frac{1}{2}}, \eta^{-\frac{1}{2}}, \eta)$, onde $\eta = \|\nabla f^R\| = \|\nabla f\|$. Denotando $f^S(p) = f^R(S^{-1}(p))$, obtemos

$$(\nabla f^S)^T = S^{-T}(\nabla f^R)^T = (0, 0, 1)^T.$$

Finalmente, rotacionamos a superfície no plano xy para garantir que a derivada mista $f_{xy} = 0$. Isto é equivalente a diagonalizar a parte restrita do plano tangente da matriz Hessiana de f^S : $\begin{bmatrix} f_{xx}^S & f_{xy}^S \\ f_{xy}^S & f_{yy}^S \end{bmatrix}$. A rotação R_2 é então a rotação de ângulo $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2f_{xy}^S}{f_{xx}^S - f_{yy}^S}\right)$ no plano xy . Isto leva à função da proposição $\tilde{f}(p) = f^S(R_2^{-1}(p)) = f(A^{-1}(p))$. Como o gradiente de f^S está ao longo do eixo z , a rotação planar R_2 não o altera. Uma vez que a matriz Hessiana $H_{\tilde{f}}$ de \tilde{f} é dada pela composição das formas quadráticas: $H_{\tilde{f}} = R_2^{-T} H_{f^S} R_2^{-1} = R_2 H_{f^S} R_2^T$, obtemos $\tilde{f}_{xy} = 0$.

□

Observação 5 *Em termos dos graus de liberdade a transformação A é uma matriz 3×3 . Destes 9 coeficientes a restrição da transformação ser equiafim, o que implica que $\det A = 1$, reduz um grau de liberdade. A rotação R_1 e a mudança de escala S , cada um, reduz o grau de liberdade em três: o ângulo ou o fator de escala e um eixo.*

A rotação planar R_2 tem um grau de liberdade: o ângulo. Embora ainda exista um grau de liberdade de reposição para os coeficientes, a segunda derivada tem dependência quadrática sobre os coeficientes de A e não há nenhuma garantia de que uma simplificação maior seria viável sem decidir o sinal da métrica (ou equivalentemente o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana).

3.3.2

Fórmulas Simplificadas

Consideremos superfícies implícitas $\{p \in \mathbb{R}^3; f(p) = 0\}$ definidas em volta de um ponto p tal que $\nabla f(p) = (0, 0, 1)$ e $f_{xy}(p) = 0$. Notemos que a partir do teorema anterior asseguramos esta condição para qualquer ponto regular através de uma transformação afim A. Com esta condição, encontramos as fórmulas simplificadas para as estruturas afins de uma superfície implícita

Vetores Tangentes - Como $f_x = f_y = 0$, deduzimos da equação (3-1) que

$$\mathbf{g}_x = (1, 0, 0) \quad e \quad \mathbf{g}_y = (0, 1, 0).$$

Métrica - O coeficiente da métrica se reduz a simples expressão: $d = f_{xx}f_{yy}$.

Co-normal - A partir da métrica e do vetor gradiente, obtemos

$$\nu = |f_{xx}f_{yy}|^{-1/4} (0, 0, 1).$$

Normal - O normal afim se reduz a

$$\xi = \frac{1}{4 |f_{xx}f_{yy}|^{7/4}} \begin{pmatrix} f_{yy}^2 f_{xxx} + f_{xx} f_{yy} f_{xyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} \\ f_{xxy} f_{xx} f_{yy} - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} + f_{xx}^2 f_{yyy} \\ 4f_{xx}^2 f_{yy}^2 \end{pmatrix}.$$

Curvaturas - As expressões de curvaturas têm uma forma bastante simples, comparada com a expressão antes da transformação A (ver apêndice A), a saber

$$b_{11} = \frac{1}{16 f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} (8f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xz}^2 - 8f_{xx}^3 f_{yy}^2 f_{zz} + 8f_{xx}^3 f_{yy} f_{yz}^2 - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{xxyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxxx} \\ + 7f_{yy}^2 f_{xxx}^2 + 3f_{xx}^2 f_{xyy}^2 + 12f_{xx} f_{yy} f_{xxy}^2 + 2f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{xyy} + 4f_{xx}^2 f_{xxy} f_{yyy} \\ + 24f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xxz} - 24f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxx} - 24f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xxy})$$

$$b_{21} = \frac{1}{16 f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} (15f_{xx} f_{yy} f_{xxy} f_{xyy} - f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{yyy} - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{xyyy} - 24f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xxy} \\ - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxx} + 24f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xyz} - 24f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxy} + 7f_{yy}^2 f_{xxx} f_{xxy} + 7f_{xx}^2 f_{xxy} f_{yyy})$$

As fórmulas para b_{12} e b_{22} são obtidas trocando x por y e vice-versa em b_{21} e b_{11} .

3.3.3

O caso geral a partir das fórmulas simplificadas

A redução anterior é responsável pelo crescimento da estabilidade numérica e pela melhoria das estimativas das estruturas afins. Começando da função implícita original f em p calculamos a transformação que é definida a partir das derivadas primeira e segunda de f em p segue do teorema 5, levando a uma nova função implícita $\tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p}))$ com $\tilde{p} = A(p)$.

Primeiro calculamos as derivadas de \tilde{f} a partir das derivadas da f e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) &= \nabla f(p) \cdot A^{-1} \\ H_{\tilde{f}}(\tilde{p}) &= A^{-T} \cdot H_f(p) \cdot A^{-1} \\ \tilde{f}_{ijk}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c) \in \{x,y,z\}^3} f_{abc}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1}, \quad \forall (i,j,k) \in \{x,y,z\}^3, \\ \tilde{f}_{ijkl}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c,d) \in \{x,y,z\}^4} f_{abcd}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1} A_{d,l}^{-1}, \quad \forall (i,j,k,l) \in \{x,y,z\}^4,\end{aligned}\tag{3-5}$$

onde $A_{a,i}^{-1}$ são os coeficientes da matriz inversa A^{-1} de linha a e coluna i . Usando essas derivadas podemos calcular as estruturas afins $\tilde{\nu}(\tilde{p})$, $\tilde{\xi}(\tilde{p})$, $\tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p})$ e $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p})$ da superfície implícita definida por \tilde{f} . A partir das invariâncias dessas estruturas podemos deduzir as estruturas afins para a superfície original $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$ em p :

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(\tilde{p}) &= \nu(p) \cdot A^{-1}, \\ \tilde{\xi}(\tilde{p}) &= \xi(p) \cdot A^T, \\ \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p}) &= \mathcal{K}(p), \\ \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p}) &= \mathcal{H}(p).\end{aligned}$$

4

Cálculo de Estruturas Afins para Iso superfícies

No capítulo anterior vimos como calcular as estruturas afins de uma superfície implícita $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$ no ponto regular p a partir das derivadas de f até a quarta ordem. Neste capítulo, discutiremos as principais ferramentas que usamos para aplicar esses cálculos em uma superfície implícita extraída de uma grade regular: como aproximar as derivadas, como incorporar o cálculo de estrutura afim no algoritmo *Marching Cubes* (25) e como medir a qualidade dos resultados. Vimos que as fórmulas para as curvaturas afins envolvem todas as derivadas parciais de f até a quarta ordem. Estas 34 derivadas podem ser muito sensíveis ao ruído numérico em f , especialmente aquelas de alta ordem. Quando f é amostrada em uma grade regular, que é o caso comum para descrever objetos geométricos implicitamente, uma escolha comum para obter tais derivadas depende de convoluções discretas.

4.1

Aproximação das Derivadas Discretas

Para calcularmos as derivadas de f usamos uma aproximação da identidade. Dessa maneira, o cálculo das derivadas se reduz a um produto de convoluções.

Definição 8 A convolução de duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a função $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy$$

Seja $\phi(x)$ uma função $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ com suporte na bola unitária $\|x\| \leq 1$ e $\int \phi(x)dx = 1$.

Definição 9 Chamamos aproximação da identidade a família de funções

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(x/\epsilon), \quad 0 < \epsilon \leq 1.$$

O teorema seguinte justifica o uso da aproximação da identidade no cálculo das derivadas parciais. A demonstração pode ser encontrada em (23).

Teorema 6 Para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ as funções $f_\epsilon = f * \phi_\epsilon \in L^1 \cap C^\infty$ convergem em norma de L^1 para f quando ϵ tende a zero.

Observação 6 – Seja f uma função contínua com suporte compacto em \mathbb{R}^d . As funções $f_\epsilon = f * \phi_\epsilon \in C^\infty$ e convergem uniformemente em \mathbb{R}^d para f quando ϵ tende a zero.

– Uma aproximação da identidade pode ser gerada por

$$\phi_0(x) = 0, \|x\| > R, \phi_n(x) = n^d \phi_0(nx) \text{ e } \int \phi_0(x) dx = 1.$$

Notemos que se ϕ é uma identidade aproximada e f é uma função, então $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \phi) = f * \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$. Além disso, $f * \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Dessa forma, utilizamos em nossos experimentos uma função spline $\sigma(x, y, z)$ como aproximação da identidade (30, 32) definida pela expressão $\sigma(x, y, z) = \sigma_1(x) \sigma_1(y) \sigma_1(z)$ (ver figura 4.1), onde

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{120} \begin{cases} (3 - |x|)^5 - 6(2 - |x|)^5 + 15(1 - |x|)^5 & , 0 \leq |x| < 1 \\ (3 - |x|)^5 - 6(2 - |x|)^5 & , 1 \leq |x| < 2 \\ (3 - |x|)^5 & , 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & , |x| > 3. \end{cases}$$

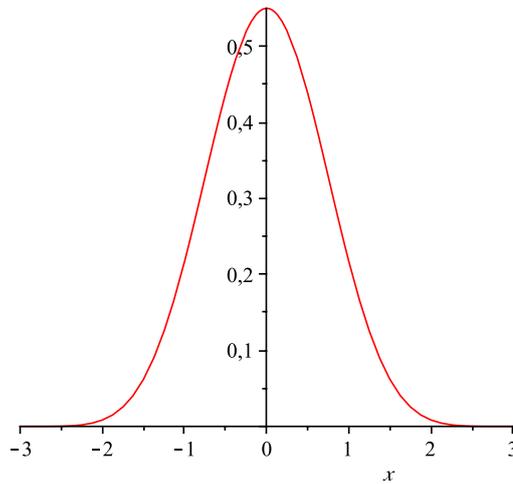


Figura 4.1: Função spline σ_1 de grau 5 em uma variável.

As derivadas são obtidas pela convolução de f com a derivada de normalização do spline $f \approx f * \sigma$ e $\partial^\alpha f \approx f * (\frac{1}{c} \partial^\alpha \sigma)$. A constante c é determinada para cada ordem de derivação a fim de compensar a escala entre

o domínio $]-3, 3[^3$ de σ e o domínio real de f e garantir que as derivadas de monômios de grau α sejam corretamente estimadas (17).¹

Proposição 5 *Os estimadores obtidos dos vetores co-normal e normal afins e das curvaturas Gaussiana e média afins convergem uniformemente para as funções ν , ξ , \mathcal{K} e \mathcal{H} (em σ_1 tem suporte compacto) quando f é amostrada com densidade indo para infinito, desde que f, f', f'', f''' e $f^{(4)}$ sejam funções integráveis.*

4.2 Implementação dentro do Marching Cubes

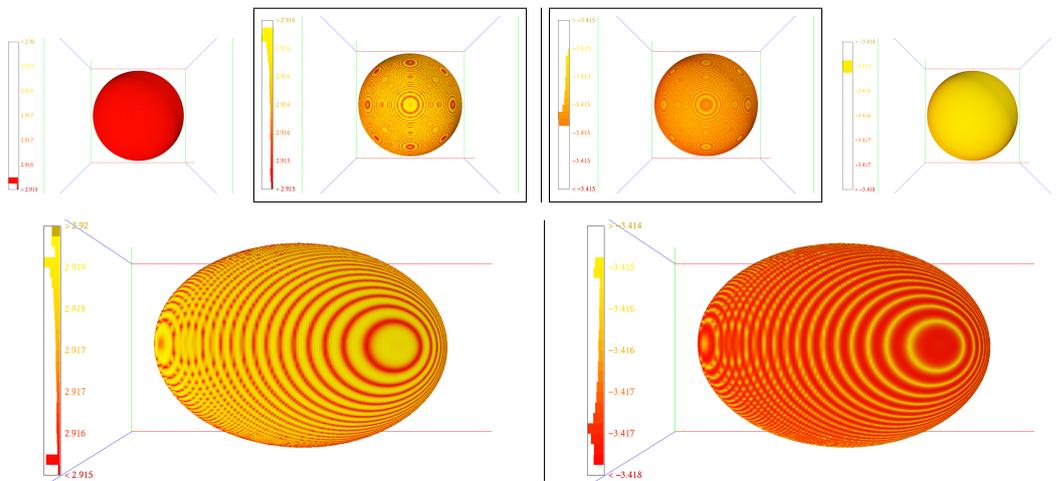


Figura 4.2: Incorporando os estimadores dentro do *Marching Cubes* revela o padrão não-invariante da grade baseado na estimação das derivadas. As curvaturas Gaussiana afim \mathcal{K} (à esquerda) e média afim \mathcal{H} (à direita) antes (em cima) com um aumento da escala e depois (em baixo) com a transformação afim $((0.9, 0, 0.9), (0, 2, 0), (1.1, 0, 0.6))$.

Marching Cubes (25) é o algoritmo base para extração de superfícies implícitas. Ele opera em cada voxel de uma grade regular e, eventualmente, gera alguns triângulos no interior dos voxels. Os vértices dos triângulos são calculados por interpolação linear ao longo das bordas do voxel, gerando 0 ou 1 em cada vértice dos lados, dependendo se os valores da função implícita nas extremidades da borda têm sinais iguais ou diferentes, respectivamente.

Podemos avaliar diretamente as derivadas através da convolução discreta apenas nos vértices do voxel, onde podem ser calculadas as estruturas afins ν , ξ , \mathcal{K} e \mathcal{H} nos cantos do *voxel* (fora da superfície) e interpolar linearmente as estruturas ao longo da borda, ou interpolar as derivadas ao longo da borda e

¹Ver também <http://www.cs.duke.edu/courses/spring03/cps296.1/handouts/Image%20Processing.pdf>.

calcular a estrutura afim nos vértices do *Marching Cubes* a partir das derivadas interpoladas. A primeira opção tem a desvantagem do cálculo da estrutura afim fora da superfície, e sem restrição de f , esta estrutura pode ser diferente daquela na superfície.

A segunda opção usa a interpolação linear para todas as derivadas, esta última opção não é totalmente consistente: a interpolação linear de uma derivada de quarta ordem significa interpolar a função em si como um polinômio de grau 4, enquanto que a função é interpolada como polinômio de grau 1. Isto é visível na esfera de figura 4.2, onde há variações de ruídos muito pequenos e estão correlacionados com a estrutura da grade.

Esta última opção de interpolar as derivadas no *Marching Cubes* e em seguida calcular a estrutura afim leva a melhores resultados na prática. Apesar dessa melhoria com a segunda possibilidade o problema ainda não está totalmente resolvido, como foi discutido no parágrafo anterior.

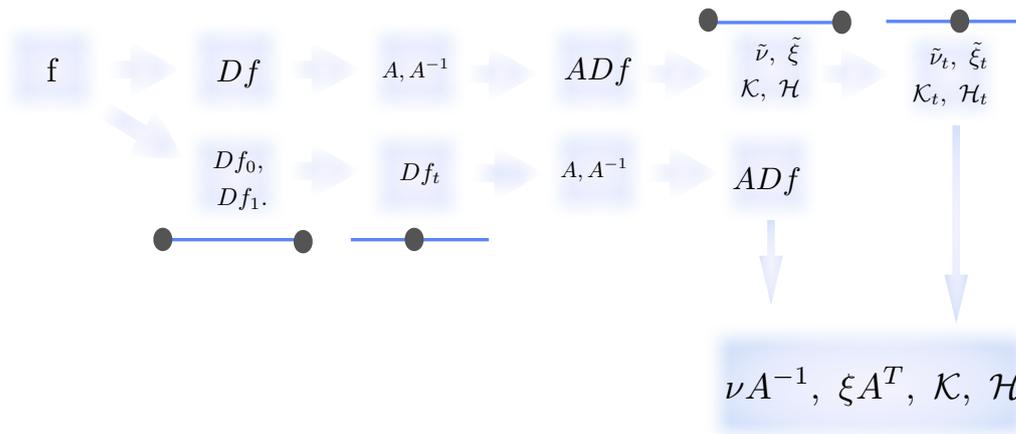


Figura 4.3: Implementação dentro do *Marching Cubes*. Na primeira linha temos a primeira tentativa e na segunda linha a última tentativa que resultou melhores resultados.

4.3

Estabilidade Numérica

O primeiro passo para usarmos o algoritmo *Marching Cubes* e construirmos o nosso algoritmo é o cálculo das derivadas até a quarta ordem. Feito isso, se formos usar o método *direto* então usamos as fórmulas obtidas diretamente a partir do teorema da função implícita. Por outro lado, ao usarmos o *método com transformação* teremos que calcular inicialmente a transformação A , ou seja, devemos calcular as derivadas de f até a segunda ordem, depois calculamos as transformadas das derivadas (ver equações 3-5), com isso podemos supor que o gradiente é $(0, 0, 1)$ e $\tilde{f}_{xy} = 0$, ver teorema 5. Agora aplicamos

esse resultado nas expressões obtidas do método direto, obtemos as estruturas afins com transformação e por fim usando a contravariância do co-normal afim ν , a covariância do normal afim ξ e a invariância das curvaturas Gaussiana \mathcal{K} e média \mathcal{H} obtemos as expressões mais simplificadas (ver tabela 4.1 e a subseção 3.3.3). As principais etapas estão descritas no algoritmo 1.

Algoritmo 1: Implementação dentro do *Marching Cubes*.

Entrada: Superfície

Saída: Invariantes afins: $\nu, \xi, \mathcal{K}, \mathcal{H}$

bool compute_affine_struct_direct(Df, v)

bool compute_affine_structure_reduction(Df, v)

 compute_derivate(Df)

 compute_transf(Df, A, Ainv)

 transf_derive(Df, A, ADf)

 compute_affine_struct_transf(ADf, v)

 transform_back_affine_struct(A, Ainv, v)

As fórmulas simplificadas são mais estáveis que o cálculo direto sem transformação, como confirmado em nossos experimentos. Usamos o software **Maple** para otimizar ambas as fórmulas diretas e com a transformação, visando reduzir o número de operações. A comparação do número de operações nas fórmulas diretas e simplificadas mostra claramente o ganho de estabilidade das fórmulas simplificadas (ver tabela 4.1).

	Matrizes A, A^{-1}	Aplicações de $\partial(\tilde{f})$	Fórmulas simplificadas	Total
<i>Simplificada</i>	749	7.335	1.783	9.867
<i>Direta</i>				23.690

Tabela 4.1: Número de operações de cada passo do estimador para um único ponto. As fórmulas simplificadas são muito mais concisas e são mais intensas computacionalmente nas operações de mapear as derivadas.

A principal ferramenta de derivação para obter as fórmulas das estruturas afins de superfícies implícitas vem do teorema da função implícita, onde todas as derivadas de g são obtidas através de uma divisão por f_z . Portanto, qualquer implementação numérica pode sofrer quando o gradiente é quase zero. Nas fórmulas simplificadas essa instabilidade é confinada na transformação A (em especial na escala não-uniforme S).

Além disso, a métrica Berwald-Blaschke degenera $\mathbf{d} = 0$ quando a curvatura Gaussiana Euclidiana é zero. Em particular, as curvaturas afins devem ser

infinito em pontos de sela, que são delicadas de lidar em um contexto numérico. Um tratamento independente dos pontos de inflexão tem sido proposto para as curvas através de uma cuidadosa reamostragem local (13) e poderia ser estendido para as superfícies em trabalhos futuros. Esta instabilidade permanece no interior da fórmulas simplificadas.

4.4 Medidas de Qualidade

No cálculo da estrutura afim de isossuperfícies o critério mais complicado é o da invariância, pois o processo de amostragem da função implícita f em uma grade regular não é invariante sob aplicação afim (ver figura 4.4). A qualidade de um estimador geométrico é geralmente medido através de quatro critérios: invariância sob mapeamento geométrico, erro em comparação com a medida exata geométrica, convergência para a medida contínua, quando a amostragem se torna mais densa e robustez ao ruído.

Além disso, ao verificar a invariância por meio da comparação dos estimadores afins de uma isossuperfície antes e depois de uma transformação afim, os vértices gerados pelo algoritmo *Marching Cubes* não estão em posições correspondentes e não uniformemente distribuídos. Apesar de tentarmos reduzir essa disparidade nos experimentos com a função implícita analítica adaptando o domínio transformado em uma caixa delimitadora da imagem do domínio original, uma medida com invariância global ainda é difícil de implementar.

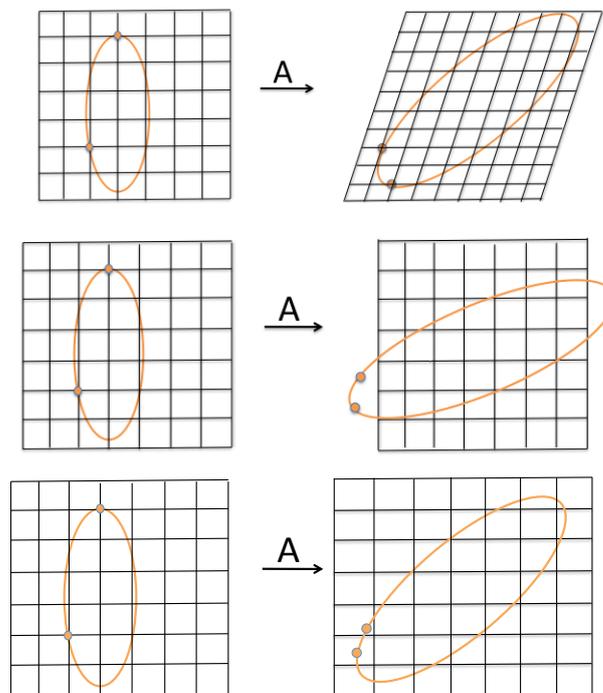


Figura 4.4: Correção do domínio caso bidimensional.

A figura 4.4 ilustra a correção do domínio. Aplicando uma transformação afim na função e no domínio (em cima) modifica o dado de forma invariante, mas gera uma grade não ortogonal. Mantendo uma grade ortogonal modifica o dado de forma não invariante afim (no centro). Aplicando uma transformação afim na função e corrigindo o domínio (em baixo), modifica o dado de forma invariante afim e gera uma grade ortogonal.

Usamos em nosso algoritmo a terceira opção, ou seja, ao aplicarmos uma transformação afim B na superfície corrigimos a caixa delimitadora da superfície calculando os valores máximos e mínimos das coordenadas depois da transformação B . Supomos, sem perda de generalidade, que a caixa inicial delimitadora seja um cubo cujo comprimento das arestas seja 1, ou seja, os valores mínimos e máximos das coordenadas iniciais são: $x[0] = x_{min} = 0$, $y[0] = y_{min} = z[0] = z_{min} = 0$ e $x[1] = x_{max} = y[1] = y_{max} = z[1] = z_{max} = 1$. Denotemos por $P_{ijk} = \{(x[i], y[j], z[k]), (i, j, k) \in \{0, 1\}^3\}$ os pontos do cubo e sejam

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{min} &= \min_{i,j,k} \{\tilde{P}_{ijk}\}, W = x, y, z \text{ e } \tilde{P}_{ijk} = B^{-1}P_{ijk} \\ \tilde{W}_{max} &= \max_{i,j,k} \{\tilde{P}_{ijk}\}\end{aligned}$$

os pontos da nova caixa delimitadora. Dessa forma, obtemos a correção do domínio.

5

Família de Parabolóides

Este capítulo tem por objetivo apresentar a parcial falta de solução ao primeiro problema proposto para essa tese, a saber estender o modelo de polígono parabólico para superfícies.

O problema inicial proposto para esta tese foi mostrar que dado uma amostra $\{(p_i, n(p_i))\}_{i=1}^3 \subset S \times \mathbb{S}^2$, onde S é uma superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^2 é a esfera unitária, poderíamos obter um parabolóide passando por estes pontos e normais. A motivação veio do modelo de polígono parabólico (13) que mostra a reconstrução de curvas através da geometria afim. O modelo para superfície utiliza parabolóides em cada triângulo. Provamos que é necessário impor algumas condições sobre os normais para existir o parabolóide passando por $(p_i, n(p_i))$. Mostramos que sobre certas condições da amostragem de pontos e normais existe uma família de parabolóides que passa por três pontos e possuem os normais definidos nesses pontos. Tentamos resolver o problema completo utilizando cúbicas osculadoras, mas até o presente momento não temos uma solução.¹

Seja $\{(p_i, n(p_i))\}_{i=1}^3 \subset S \times \mathbb{S}^2$ uma amostra, ou seja, temos três vetores normais definidos em $\{p_i\}_{i=1}^3$. Podemos aplicar uma transformação afim A que leva esses três pontos para os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, em coordenadas homogêneas $A^{-1} = (p_1 - t, p_2 - t, p_3 - t, t)$, onde t é um vetor de translação qualquer. Podemos definir $t = p_3 - N_3, t_w = 0$ tal que $n(p_3) = e_3 = (0, 0, 1)$. Usamos a representação geral de quádrlica

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \tag{5-1}$$
$$(x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0.$$

Notemos que o gradiente de F é paralelo ao vetor normal \mathbf{N}_e , assim existem coeficientes $\{\lambda_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que

$$\nabla F(e_i) = \lambda_i n(e_i). \tag{5-2}$$

¹Nessa busca recebemos muita ajuda do professor Carlos Tomei, que agradecemos muito.

Queremos encontrar os coeficientes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 .

Se assumirmos que $j \neq 0$, então sem perda de generalidade podemos definir $j = 1$. Notemos que temos 12 equações e 12 incógnitas sendo que 9 delas foram obtidas a partir da equação (5-2) e as demais da equação (5-1). Podemos escrever essas equações em termos de um sistema linear não homogêneo, a saber

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_1)_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_1)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -n(p_1)_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -n(p_2)_1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_2)_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_2)_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o programa **Maple**, obtemos que $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2$, em particular temos uma solução que não respeita n_1 e n_2 . Logo, devemos encontrar condições sobre os normais que nos deem um resultado mais amplo. O próximo resultado foi obtido com a ajuda do **Maple**.

Teorema 7 *Se $n(p_1)$ é simétrico a $n(p_2)$ pelo plano ortogonal a $n(p_3)$ bissetor a p_1Op_2 , em outras palavras se as componentes dos vetores normais satisfazem $n(p_2)_1 = n(p_1)_2$, $n(p_2)_2 = n(p_1)_1$, e $n(p_2)_3 = n(p_1)_3$. Então $\det(A) = 0$ e portanto temos uma família de quádricas a um parâmetro em λ_1*

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (1 + n(p_2)_2 \lambda_1) x^2 + (1 + n(p_2)_2 \lambda_1) y^2 + (1 + (n(p_2)_2 - n(p_2)_3) \lambda_1) z^2 \\ &+ 2 \left(1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1 \right) xy + 2 \left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \right) xz \\ &+ \left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \right) yz - \left[\left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \right) x \right] \\ &- \left[\left(1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \right) y + \left(1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 - n(p_2)_3) \lambda_1 \right) z \right] \end{aligned} \quad (5-3)$$

Vamos encontrar o valor de λ_1 de tal forma que a quádrica seja um parabolóide.

Seja Q a matriz da forma quadrática associada a quádrlica dada pela equação (5-3)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 + n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \\ 1 + \frac{1}{2} (n(p_2)_2 + n(p_2)_1) \lambda_1 & 1 + n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 \\ 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + \frac{1}{2} n(p_2)_2 \lambda_1 & 1 + (n(p_2)_2 - n(p_2)_3) \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos

$$\det(Q) = -\frac{1}{4} \lambda_1^2 (n(p_2)_1 - n(p_2)_2) (n(p_2)_2 n(p_2)_1 \lambda_1 - n(p_2)_1 n(p_2)_3 \lambda_1) \quad (5-4) \\ + n(p_2)_1 + 2n(p_2)_2^2 \lambda_1 - 3n(p_2)_2 n(p_2)_3 \lambda_1 + 3n(p_2)_2 - 4n(p_2)_3.$$

Queremos que a quádrlica seja um parabolóide então temos que ter $\det(Q) = 0$. Assim, na equação (5-4) temos um polinômio em λ_1 de grau 3, cujas raízes são

$$0, 0 \text{ e } \frac{-n(p_2)_1 - 3n(p_2)_2 + 4n(p_2)_3}{-n(p_2)_2 n(p_2)_1 + n(p_2)_1 n(p_2)_3 - 2n(p_2)_2^2 + 3n(p_2)_2 n(p_2)_3}.$$

Se $\lambda_1 = 0$, então temos um caso impossível, teríamos na definição de F que $(x + y + z - 0.5)^2 + 0.75 = 0$. Portanto, estudaremos o caso em que $\lambda_1 \neq 0$. Substituímos o valor de λ_1 em Q e calculamos os autovetores $\{v_i\}_{i=1}^3$ e autovalores $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$, obtemos um autovalor nulo. Definamos a matriz diagonal $D = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0) = P Q P^t$, onde P é uma matriz formada pelos autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$.

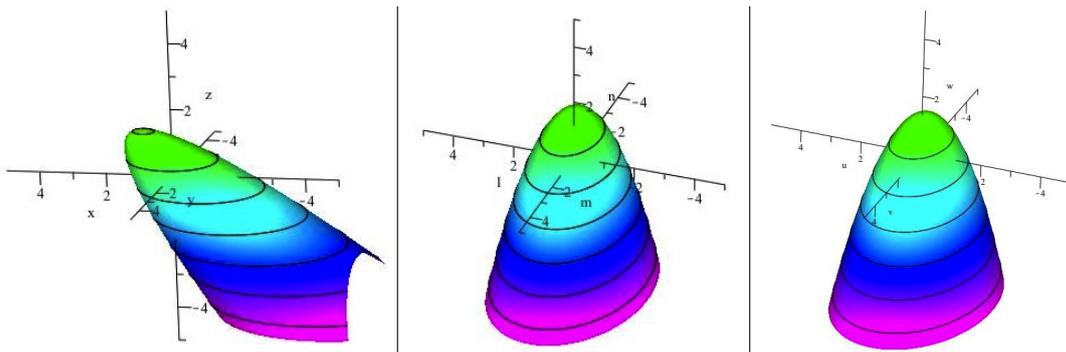


Figura 5.1: Parabolóide elíptico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

Afirmção 2 Existe uma transformação $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

1. $F(x, y, z) = \bar{F}(l, m, n) = l^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2 + 2l\bar{g} + 2m\bar{h} + 2n\bar{i} + j$
2. $j = \bar{j}$

Demonstração: Definamos $P(x, y, z)^t = (l, m, n)^t$. Observemos que

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= X^t Q X + X^t N + j \\ &= X^t P^t P Q P^t P X + X^t P^t P N + j \\ &= R^t D R + R^t S + j, \end{aligned}$$

onde $X = (x, y, z)^t$, $R = P X$, $N = (2g, 2h, 2i)^t$ e $S = P N$. Portanto

$$\bar{F}(l, m, n) = l^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2 + 2l\bar{g} + 2m\bar{h} + 2n\bar{i} + j.$$

□

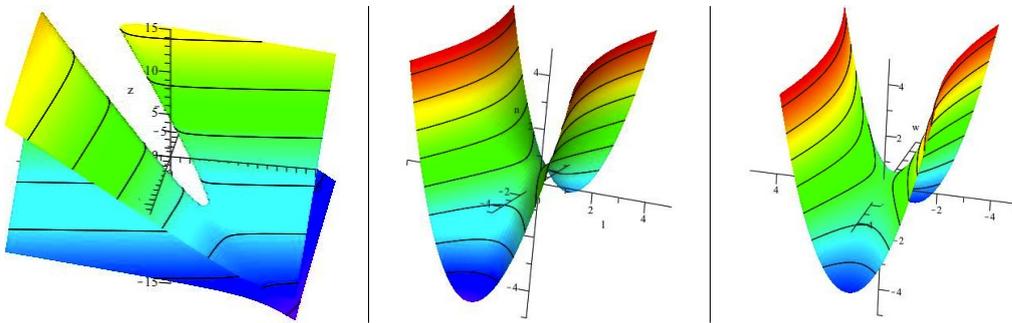


Figura 5.2: Parabolóide hiperbólico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

Utilizando a afirmação acima, vamos fazer mais uma transformação de tal forma que a equação do parabolóide fique mais simples. Definamos $l = u - \frac{\bar{g}}{\alpha_1}$, $m = v - \frac{\bar{h}}{\alpha_2}$, e $n = w$, assim seja

$$f(l, m, n) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 v^2 + 2w\bar{i} + k, \text{ onde } k = -\frac{\bar{h}^2}{\alpha_2} - \frac{\bar{g}^2}{\alpha_1} + j.$$

As figuras 5.1 e 5.2 ilustram as transformações que fizemos. Um fato interessante é que não existe um parabolóide osculador à superfície que seja invariante por transformações afins (37). É possível mostrar a existência de *cúbicas osculadoras* à superfície, e existe uma transformação afim que leve tais cúbicas em outras que são simples de entender. A classificação dessas cúbicas depende do sinal da métrica. A demonstração da existência das cúbicas osculadoras equivale a mostrar que o normal afim é vertical e dado por $\xi = (0, 0, 1)$.

6 Resultados

Neste capítulo comentaremos sobre nossas experiências com os estimadores afins no caso de superfícies implícitas. No caso paramétrico discreto obtemos uma solução parcial do problema para a interpolação do parabolóide em uma amostra de três pontos e planos tangentes definidos neste pontos (ver capítulo 5), já no caso paramétrico suave conseguimos alguns resultados que foram discutidos no capítulo 2.

Experimentamos os dois estimadores afins introduzidos nos capítulos 3 e 4, aplicando as fórmulas diretamente, chamado de método *direto* e o de calcular a aplicação local A para usar as fórmulas simplificadas referido como o método *com transformação*.

No método direto, um dos eixos deve ser escolhido em cada ponto para servir como a direção z no teorema da função implícita. A fim de reduzir a instabilidade numérica escolhemos o eixo com o qual o gradiente é mais alinhado, ou seja, nós escolhemos x se $|f_x| > |f_y|$ e $|f_x| > |f_z|$ (ver figura 6.1).

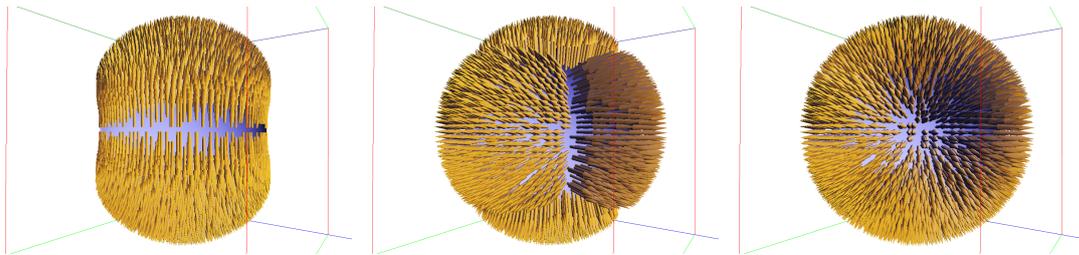


Figura 6.1: Comparações do normal afim ξ quando calculado usando: z na derivação implícita (à esquerda), o eixo na maioria dos casos alinhado com o gradiente (meio), ou a nossa redução geométrica (à direita).

O método com transformação segue os passos da seção 3.3.2.

Três grupos de dados foram analisados. Primeiro geramos funções implícitas (ver figuras 2.7, 3.2, 3.4, 4.2 e 6.1), onde calculamos as estruturas diferenciáveis exatas ν , ξ , \mathcal{K} e \mathcal{H} , a fim de calcular o erro dos nossos estimadores. Como o cálculo diferencial é extensivo, incluímos somente superfícies quadráticas (ver tabela 2.1). O segundo conjunto de dados de funções implícitas $f(p)$ (ver figuras 3.3, 3.5 e 6.2), onde podemos mostrar exatamente

a imagem afim de superfície através de $f(A(p))$ para verificar a invariância do estimador, com a restrição discutida na seção 4.4. O último tipo de dados são isossuperfícies amostradas numa grade regular estática, gerada como funções distância a uma superfície triangulada (ver figuras 3.1 e 6.5).

Tais isossuperfícies são geralmente mais complexas e seria um primeiro passo para uma aplicação mais específica dos estimadores afins.

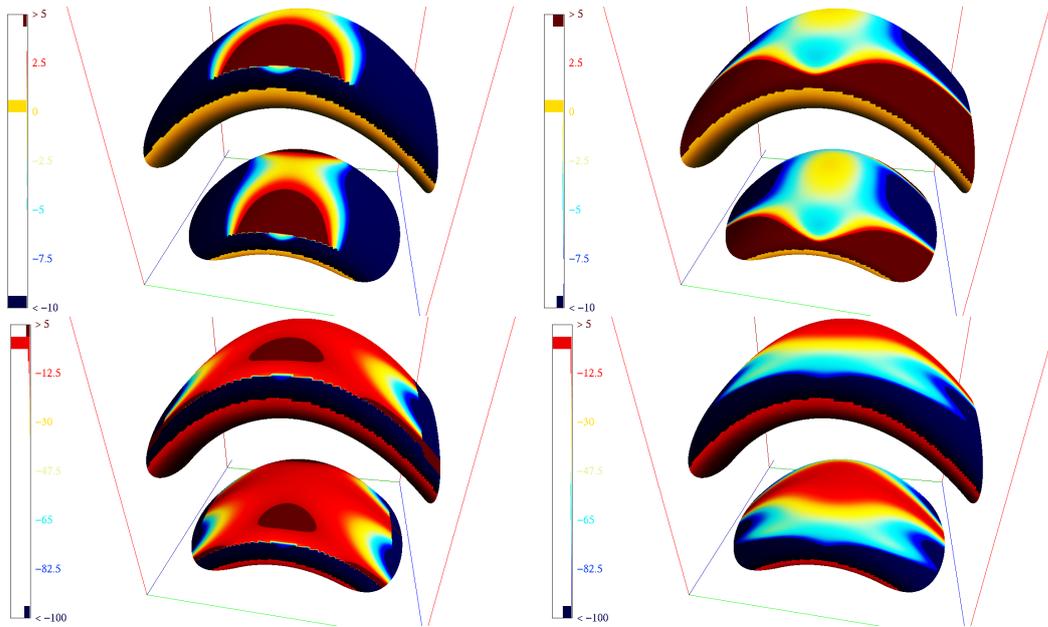


Figura 6.2: Comparação na superfície de equação $2z^2 - \sin(5x + 3y^2 - 1) = 0$ dos estimadores da curvatura média \mathcal{H} (em cima) e da curvatura Gaussiana \mathcal{K} (em baixo), usando método direto (à esquerda) e o método com transformação (à direita), com a mesma escala de cores, ambos métodos mostram descontinuidades nas regiões degeneradas $K_e = 0$.

Estabilidade Numérica As definições das curvaturas afins requerem o cálculo de derivadas até a quarta ordem, daí qualquer estimador será muito suscetível a erros numéricos. A redução geométrica que apresentamos permite reduzir o erro numérico ligado ao alinhamento com o eixo do gradiente. As figuras 3.5 e 6.1 mostram claramente que a qualidade do estimador direto diminui quando a direção se torna mais oblíqua, provocando descontinuidades nas mudanças de eixo (semelhante ao caso mais simples de curvatura Euclidiana de curvas paramétricas (24)), defeito que é corrigido pela nossa redução.

Além disso, esta grande redução simplifica as fórmulas (ver tabela 4.1), o que melhora bastante a estabilidade numérica. Isto é ilustrado na figura 3.4, onde o parabolóide teria curvatura 0, mas o método direto introduz um ruído de ordem 10^{-5} neste simples caso. A redução permite identificar claramente

as regiões onde a métrica degenerou, ou seja, d é próxima de 0 como mostra a figura 6.2.

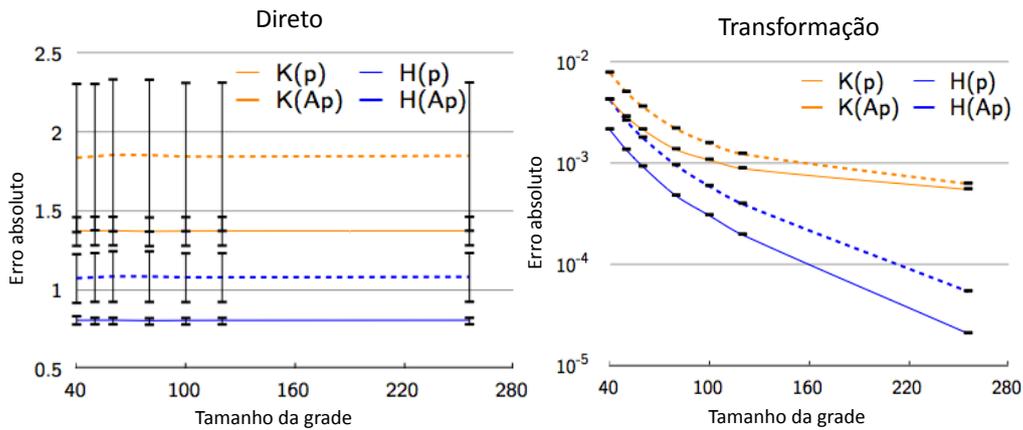


Figura 6.3: Convergência sobre o modelo da esfera: erro absoluto em relação ao tamanho da grade, antes (sólido) e depois (tracejada) da transformação afim da figura 4.2: método direto (à esquerda, em escala linear) e o método de transformação (à direita, em escala logarítmica). A barra de erro representa o quinto da variância do erro absoluto.

Estimação do erro e convergência Nos modelos onde podemos obter as expressões analíticas da estrutura afim, essencialmente as quádricas da tabela 2.1, podemos calcular o erro em cada ponto gerado pelo algoritmo *Marching Cubes* utilizando diferentes tamanhos de grade. Os gráficos obtidos são semelhantes aos da figura 6.3, que é o caso da esfera. Podemos observar que o método direto tem um erro residual que não diminui com o tamanho da grade (nem a sua variância), enquanto o método com transformação mostra tendência de uma boa convergência mesmo aplicando uma transformação afim, ou seja, olhando para $f(A^{-1}(p))$, mantendo uma variação de erro muito baixa.

Invariância Afim Como foi discutido na seção 4.4, a medida da invariância afim é complicada quando experimentamos isossuperfícies. Geramos os histogramas de distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} antes e depois de uma aplicação afim. Podemos comparar os resultados obtidos pelo método direto e com transformação em um modelo de toro (ver figura 6.4). Mais uma vez o método com transformação preserva melhor o significado geométrico das medidas estimadas.

Mesmo em isossuperfícies mais complexa, como a retratada nas figuras 3.1 e 6.5, as curvaturas e as regiões degeneradas são claramente mapeadas a partir dos diferentes modelos da mesma classe afim.

Limitações Como mencionado na seção 4.2, o processo de amostragem não é invariante afim (ver figura 4.2). Embora isto leva a algum erro no processo de estimação, não leva a perda significativa em modelos bem amostradas como os da figura 6.5. Além disso, como foi dito no capítulo 4, as quantidades afins não estão definidas se o gradiente de f é próximo de 0 ou se a curvatura Gaussiana Euclidiana K_e zera. Enquanto o segundo critério define corretamente regiões invariantes afins (ver figuras 3.3 e 6.5), o primeiro é um problema numérico mais difícil. Finalmente, a qualidade das aproximações das derivadas é crucial para todo o processo, o que pode prejudicar o uso direto de tais estimadores em dados ruidosos.

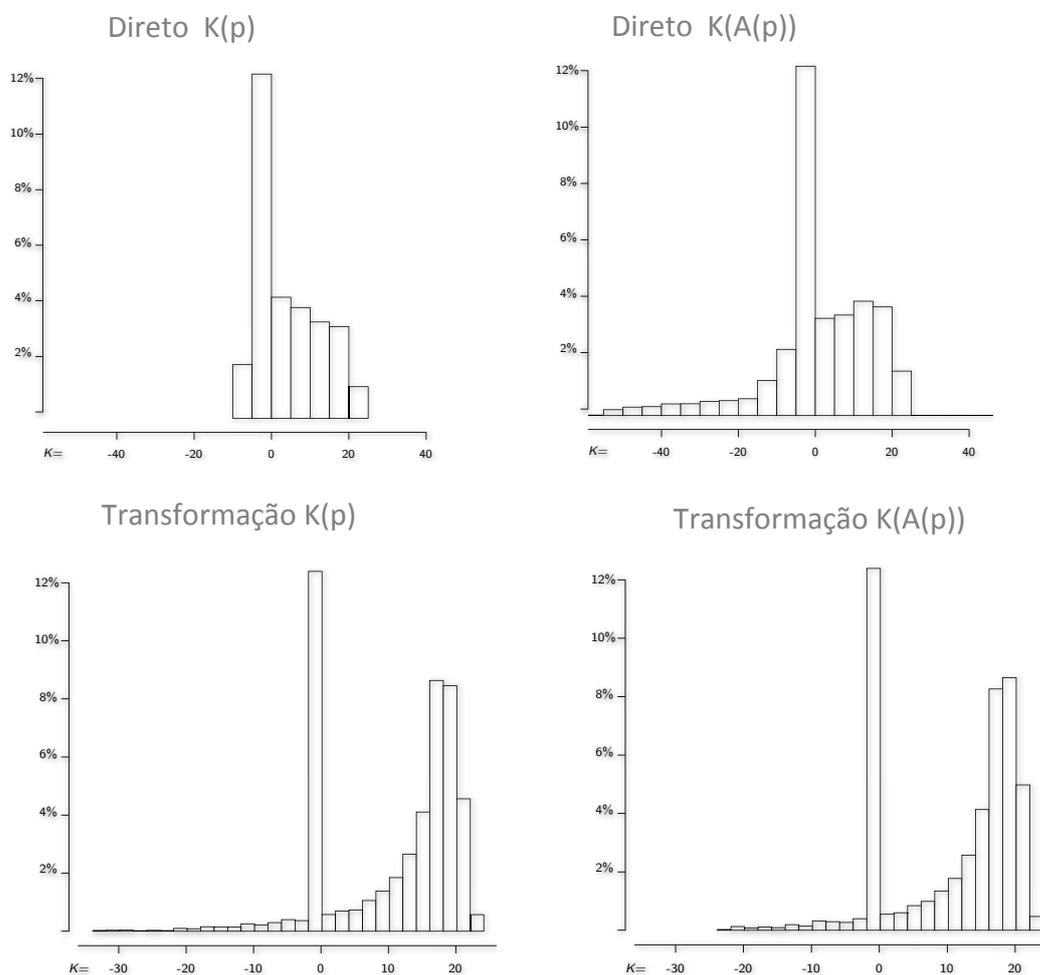


Figura 6.4: No toro $z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5)^2 = 0$, a distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} é melhor preservada sobre a transformação afim $((1.4, -0.2, 0), (0.1, 0.7, 0), (0, 0, 1))$ se usamos o método com transformação (embaixo) do que o direto (em cima).

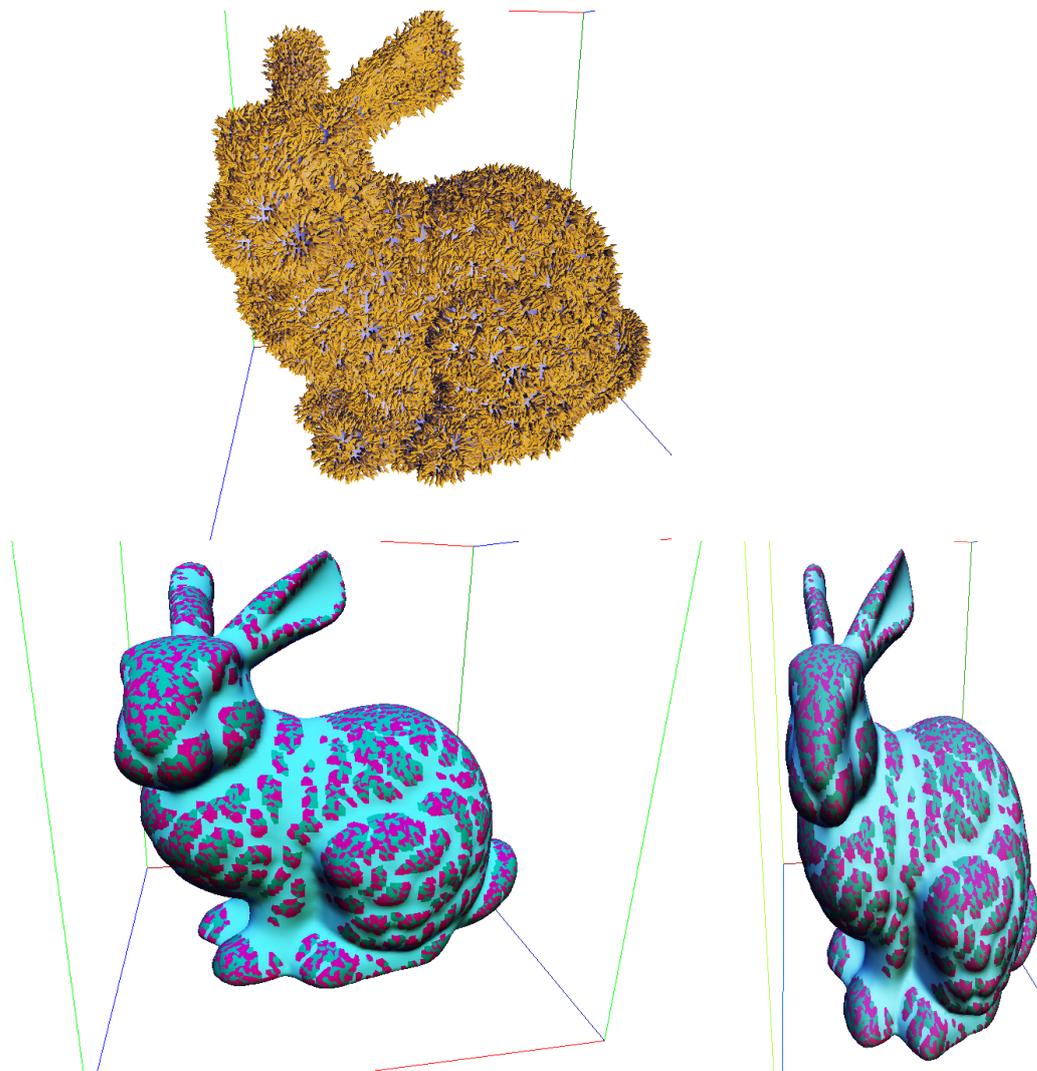


Figura 6.5: Mesmo em uma isossuperfície mais complexa, a curvatura Gaussiana afim estimada com nosso método é preservada após uma aplicação afim.

7

Conclusão e Trabalhos Futuros

Esta tese apresentou algumas propriedades geométricas invariantes por transformações afins em superfícies regulares (paramétricas ou implícitas). Além disso, introduzimos dois métodos para o cálculo de tais invariantes afins no caso de isossuperfícies.

Mais precisamente, com o auxílio da geometria diferencial e os resultados da geometria afim apresentamos as principais propriedades geométricas invariantes por transformações afins em superfícies em \mathbb{R}^3 , a saber a métrica de Berwald-Blaschke, os vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins. Uma vez conhecidas essas propriedades no caso paramétrico estendemos tais resultados para superfícies implícitas com a ajuda do teorema da função implícita.

Para calcularmos as estruturas geométricas, desenvolvemos dois métodos os quais denominamos de *método direto* e *método com transformação*. O primeiro consiste em aplicarmos diretamente as fórmulas dos invariantes no algoritmo base *Marching Cubes*, o que em particular causa instabilidade numérica, já para o segundo construímos uma transformação afim que deixa o vetor gradiente vertical e garanti que a derivada mista da função que define a superfície seja nula, isto possibilitou uma enorme redução dos cálculos e resultou em estabilidade numérica e invariância das propriedades geométricas.

Em experimentos realizados no problema do cálculo dos invariantes afins em superfícies implícitas, verificamos que o nosso método com transformação mostra-se capaz de reduzir o erro numérico ligado ao alinhamento com o eixo do gradiente. Além disso, este método possibilitou uma grande redução das fórmulas o que melhorou bastante a *estabilidade numérica*. Verificamos ainda que o método com transformação mostra uma tendência de uma boa *convergência* mesmo aplicando uma transformação afim. Outro ponto importante no nosso estudo foi a medida da *invariância afim* que é complicada quando experimentamos isossuperfícies. Geramos os histogramas da distribuição da curvatura Gaussiana afim e vimos que o método com transformação preserva melhor o significado geométrico das medidas invariantes.

Além disso, deduzimos uma *interpretação geométrica* da curvatura Gaussiana afim através da relação entre o cálculo de área de uma região a partir da parametrização da superfície e da área da superfície parametrizada pelo normal afim. Definimos *vizinhança tubular afim* e provamos a existência local e global desta para superfícies conexas, compactas e estritamente convexas. Uma aplicação futura desse resultado seria o uso na reconstrução de superfícies através de *off-sets* afins. A partir do conceito de *superfícies paralelas afins*, provamos uma condição necessária e suficiente para que a superfície paralela fosse regular, tal condição envolve as curvaturas Gaussiana e média afins além da existência da vizinhança tubular afim. Generalizamos a *fórmula de Minkowski* para a geometria afim.

Este trabalho abre novas possibilidades em problemas relacionadas à invariância afim, que é uma propriedade tão desejada em várias aplicações em computação visual. Algumas opções para a continuação do presente trabalho, na linha geométrica, incluem reconstrução de superfícies usando as cúbicas osculadoras, propriedades geométricas invariantes afins, superfícies paralelas além da determinação de novos invariantes afins como o *invariante de Pick*. Utilizar as curvaturas afins para segmentar superfícies. Outra linha de trabalho, mais relacionada à análise numérica, é a melhoria do cálculo das derivadas.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVIN, M. **Esqueletos Afins e Equações de Propagação**. Tese de Doutorado, IMPA, 2005. Orientado por Ralph Teixeira e Luiz Velho.
- [2] ANDRADE, M.; CABRAL, A.; MELLO, V.; PEIXOTO, A. ; LEWINER, T. **Curvas e Superfícies Implícitas: Noções de Geometrias Diferencial e Discreta**. I Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2011.
- [3] ANDRADE, M.; LEWINER, T. **Affine- invariant curvature estimators for implicit surfaces**. Computer Aided Geometric Design (submetido), 2011.
- [4] ANDRADE, M.; LEWINER, T. **Affine-invariant estimators for implicit surfaces**. Sibgrapi (submetido), 2011.
- [5] ANDRADE, M.; LEWINER, T. **Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidiana e Afim**. 28^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 2011.
- [6] ARBERT, K.; SNYDER, W.; BURKHARDT, H. ; HIRZINGER, G. **Application of affine-invariant Fourier descriptors to recognition of 3-D objects**. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(7):640–647, 1990.
- [7] BETELU, S.; SAPIRO, G. ; TANNENBAUM, A. **Affine invariant erosion of 3d shapes**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION, volume 2, p. 174–180. IEEE, 2002.
- [8] BUCHIN, S. **Affine differential geometry**. Routledge, 1983.
- [9] CABRAL, A.; MELLO, V. **Visualização da curvatura de objetos implícitos em um sistema extensível**. Dissertação de Mestrado, UFAL, 2010. Orientado por Vinícius Mello.
- [10] CALABI, E. **Hypersurfaces with maximal affinely invariant area**. American Journal of Mathematics, 104(1):91–126, 1982.

- [11] COHEN-STEINER, D.; MORVAN, J.-M. **Restricted delaunay triangulations and normal cycle**. Proceedings of the 19th Annual Symposium on Computational Geometry, p. 312–321, 2003.
- [12] CRAIZER, M.; ALVIM, M. ; TEIXEIRA, R. **Area distances of convex plane curves and improper affine spheres**. SIAM Journal on Mathematical Imaging, (1(3)):209–227, 2008.
- [13] CRAIZER, M.; LEWINER, T. ; MORVAN, J. **Combining points and tangents into parabolic polygons**. Journal Mathematical Imaging Vision, 29:131–140, 2007.
- [14] DAVIS, D. **Affine Differential Geometry & Singularity Theory**. Tese de Doutorado, University of Liverpool, 2008. Orientado por Peter Giblin.
- [15] DO CARMO, M. **Differential geometry of curves and surfaces**. Prentice Hall, 1976.
- [16] FARIN, G.; HOSCHEK, J. ; KIM, M. **Handbook of computer aided geometric design**. North-Holland, 2002.
- [17] FORSYTH, D.; PONCE, J. **Computer vision: a modern approach**. Prentice Hall, 2002.
- [18] FOULONNEAU, A.; CHARBONNIER, P. ; HEITZ, F. **Affine-invariant geometric shape priors for region-based active contours**. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, p. 1352–1357, 2006.
- [19] GAL, R.; COHEN-OR, D. **Salient geometric features for partial shape matching and similarity**. Transactions on Graphics, 25(1):130–150, 2006.
- [20] GAL, R.; SHAMIR, A.; HASSNER, T.; PAULY, M. ; COHEN-OR, D. **Surface reconstruction using local shape priors**. In: SYMPOSIUM ON GEOMETRY PROCESSING, p. 253–262. Eurographics, 2007.
- [21] GOLDMAN, R. **Curvature formulas for implicit curves and surfaces**. Computer Aided Geometric Design, 22(7):632–658, 2005.
- [22] GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos de Computação Gráfica**. IMPA, 2003.
- [23] LEBEAU, G. **Théorie des distributions et analyse de Fourier**. Ecole Polytechnique, Département de Mathématiques, 1998.

- [24] LEWINER, T.; GOMES, J.; LOPES, H. ; CRAIZER, M. **Curvature and torsion estimators based on parametric curve fitting**. *Computers & Graphics*, 29(5):641–655, 2005.
- [25] LORENSEN, W.; CLINE, H. **Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm**. In: SIGGRAPH, p. 169. ACM, 1987.
- [26] LOWE, D. **Distinctive image features form scale invariant key-points**. *International Journal of computer Vision*, 60(2):91–110, 2004.
- [27] MIKOLAJCZYK, K.; SCHMID, C. **A perfomance evaluation of local descriptors**. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(7):1615–1630, 2005.
- [28] MIKOLAJCZYK, K.; SCHMID, C. **A comparison of affine region detectors**. *International Journal of Computer Vision*, 65(1):43–72, 2006.
- [29] NOMIZU, K.; SASAKI, T. **Affine differential geometry: geometry of affine immersions**. Cambridge University Press, 1994.
- [30] NÜRNBERGER, G.; SCHMIDT, J. ; WALZ, G. **Multivariate approximation and splines**. Birkhauser, 1997.
- [31] OHBUCHI, R.; OSADA, K.; FURUKA, T. ; BANNO, T. **Salient local visual features for shape-based 3d model retrieval**. *Proc. IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications*, 2008.
- [32] PAIVA, A.; PETRONETTO, F.; LEWINER, T. ; TAVARES, G. **Particle-based non-newtonian fluid animation for melting objects**. *Sibgrapi*, p. 78–85, 2006.
- [33] RAVIV, D.; BRONSTEIN, A.; BRONSTEIN, M.; KIMMEL, R. ; SOCHEN, N. **Affine-invariant geodesic geometry of deformable 3d shapes**. *Computers & Graphics*, 35(3):692–697, 2011.
- [34] REUTER, M.; WOLTER, F. ; PEINECKE, N. **Laplace-Beltrami spectra as shape-DNA of surfaces and solids**. *Computer-Aided Design*, 38(4):342–366, 2006.
- [35] ROTHGANGER, F.; LAZEBNIK, S.; SCHMID, C. ; PONCE, J. **3d object modeling and recognition using local affine-invariant image descriptors and multi-view spatial constraints**. *International Journal of Computer Vision*, 66(3):231–259, 2006.

- [36] SAPIRO, G.; TANNENBAUM, A. **Affine invariant scale-space**. International Journal of Computer Vision, 11(1):25–44, 1993.
- [37] SPIVAK, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**. Publish or Perish, 1999.
- [38] VELHO, L.; GOMES, J. ; FIGUEIREDO, L. H. **Implicit Objects in Computer Graphics**. Springer, 2002.
- [39] ZULIANI, M.; BERTELLI, L.; KENNEY, C.; CHANDRASEKARAN, S. ; MANJUNATH, B. **Drums, curve descriptors and affine invariant region matching**. International Journal of computer Vision, 26:347–360, 2008.

A

Cálculo dos Invariantes Diretamente

Este apêndice tem por objetivo escrever os invariantes geométricos de uma superfície implícita $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, onde f é de classe C^4 e 0 é valor regular de f , a partir da própria função f e reforçar a ideia que isto inclui um longo cálculo. Sabemos que toda superfície regular pode ser vista localmente como um gráfico $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$, em particular na seção 3.1 encontramos o plano tangente, a métrica afim escrita em termos da função f . Outros elementos geométricos importantes são o vetor normal \mathbf{N}_e e a curvatura K_e que são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_e &= \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} = (f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^{-1/2} (f_x, f_y, f_z) \\ K_e &= \frac{(f_{zz}f_{yy} - f_{yz}^2) f_x^2 + (-2f_{xy}f_{zz} + 2f_{xz}f_{yz}) f_y f_x}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\ &+ \frac{2(-f_{xz}f_{yy} + f_{xy}f_{yz}) f_x f_z + (f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2) f_y^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\ &+ \frac{-2(-f_{xz}f_{xy} + f_{xx}f_{yz}) f_y f_z + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Notamos que é preciso fazer um escalonamento do vetor normal \mathbf{N}_e usando a curvatura K_e para obtermos um vetor contravariante o co-normal ν (ver seção 3.2) cuja fórmula em função de f é

$$\nu = \frac{1}{f_z d^{1/4}} (f_x, f_y, f_z),$$

onde

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{f_z^4} \cdot \left((f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2) f_x^2 + 2(f_{xz}f_{xy} - f_{xx}f_{yz}) f_y f_z + \right. \\ &\quad (f_{zz}f_{xx} - f_{xz}^2) f_y^2 + 2(f_{xy}f_{yz} - f_{yy}f_{xz}) f_z f_x + \\ &\quad \left. (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2 + 2(f_{yz}f_{xz} - f_{zz}f_{xy}) f_x f_y \right). \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

Encontraremos a expressão do normal afim a partir da função f .

Utilizando os cálculos e definições da seção 3.2, temos as componentes do vetor normal afim em função das derivadas da função g . Usando a regra da cadeia obtemos as expressões das derivadas da função g até a terceira ordem. Substituindo estas expressões nas fórmulas explícitas de ξ dadas na seção 3.2, obtemos as coordenadas de ξ

$$\begin{aligned} \xi_1 = a \left[& f_x^2 (-f_z f_{xy} f_{zz} f_{yyy} - 2f_y f_{yz} f_{yyz} f_{xz} + f_y f_{zz} f_{xz} f_{yyy} + f_{yy} f_y f_{yzz} f_{xz} \right. \\ & - f_z f_{yy} f_{xy} f_{yz} - f_{yy} f_y f_{xzz} f_{yz} - 4f_{zz} f_{xz} f_{yy}^2 - 4f_{xy} f_{yz}^3 + 4f_{yy} f_{xz} f_{yz}^2 \\ & + 2f_z f_{xy} f_{yz} f_{yyz} + 4f_{yy} f_{xy} f_{yz} f_{zz} - 2f_z f_{yy} f_{yz} f_{xyz} - f_y f_{zz} f_{xyy} f_{yz} \\ & + 2f_y f_{yz}^2 f_{xyz} + f_z f_{yy}^2 f_{xzz} + f_z f_{yy} f_{zz} f_{xyy}) \\ & + f_x (8f_{yy} f_{xz} f_{xy} f_y f_{zz} - 2f_{xx} f_{yy} f_y f_{zz} f_{yz} - 2f_z f_{yy} f_y f_{zz} f_{xxy} + 4f_z f_{yy} f_y f_{xzx} f_{yz} \\ & + 2f_z f_{xyy} f_{xy} f_y f_{zz} + 4f_z f_y f_{xz} f_{xyy} f_{yz} - 4f_z f_y f_{xy} f_{xyz} f_{yz} - 2f_z f_{yy} f_{xy} f_y f_{xzz} \\ & - 12f_z f_{yy} f_{xy} f_{xz} f_{yz} - 2f_y^2 f_{zz} f_{xyy} f_{xz} - 2f_z^2 f_{yy} f_{xz} f_{xyy} - 2f_z^2 f_{xyy} f_{xy} f_{yz} \\ & + 4f_z^2 f_{yy} f_{xy} f_{xyz} + 2f_{xy} f_y^2 f_{xzz} f_{yz} + 2f_z^2 f_{xy} f_{xz} f_{yyy} - 2f_z f_y f_{zz}^2 f_{yyy} \\ & - 2f_{xy} f_{yzz} f_y^2 f_{xz} - 6f_{yy} f_{xz}^2 f_{yz} f_y + 2f_z f_{xx} f_{zz} f_{yy}^2 - 2f_z f_{yy} f_{xy}^2 f_{zz} \\ & - 6f_y f_{zz} f_{yz} f_{xy}^2 - 2f_z f_y f_{xxy} f_{yz}^2 + 2f_y^2 f_{xxy} f_{yz} f_{zz} + 2f_z^2 f_{yy} f_{xxy} f_{yz} \\ & + 4f_y f_{xz} f_{yz}^2 f_{xy} - 2f_z f_{xx} f_{yy} f_{yz}^2 - 2f_z^2 f_{xzx} f_{yy}^2 + 2f_{xx} f_y f_{yz}^3 \\ & + 2f_y^2 f_{xz}^2 f_{yyz} - 2f_y^2 f_{xzx} f_{yz}^2 + 6f_z f_{yy}^2 f_{xz}^2 - 2f_z^2 f_{xy}^2 f_{yyz} + 8f_z f_{xy}^2 f_{yz}^2) \\ & + f_y^3 (2f_{xz} f_{xzx} f_{yz} - 2f_{xyz} f_{xz}^2 + f_{xxy} f_{xz} f_{zz} - f_{xx} f_{xzz} f_{yz} - f_{xx} f_{zz} f_{yz} + f_{xx} f_{yzz} f_{xz}) \\ & + f_y^2 (f_z f_{xx} f_{yy} f_{xzz} - 4f_z f_{xxy} f_{xz} f_{yz} - 2f_z f_{xx} f_{yyz} f_{xz} - 2f_z f_{xy} f_{xzx} f_{yz} \\ & - f_z f_{xx} f_{xy} f_{yzz} - 2f_{xx} f_{yy} f_{xz} f_{zz} - 2f_z f_{yy} f_{xz} f_{xzx} + 4f_{xx} f_{xy} f_{yz} f_{zz} \\ & + f_z f_{yy} f_{xxx} f_{zz} - 2f_{xx} f_{yz}^2 f_{xz} + 4f_z f_{xyz} f_{xy} f_{xz} - 2f_{xy}^2 f_{xz} f_{zz} \\ & + 2f_z f_{xxx} f_{yz}^2 + 2f_z f_{xyy} f_{xz}^2 + 2f_{yy} f_{xz}^3 - f_z f_{xy} f_{xxy} f_{zz} + 2f_z f_{xx} f_{xyz} f_{yz}) \\ & + f_y (-f_z^2 f_{xx} f_{xyy} f_{yz} + 8f_z f_{xx} f_{yy} f_{xz} f_{yz} + 4f_z f_{xy}^2 f_{xz} f_{yz} - 6f_z f_{yy} f_{xy} f_{xz}^2 \\ & + f_z^2 f_{xx} f_{yyy} f_{xz} + 2f_z^2 f_{xx} f_{xy} f_{yyz} - 2f_z f_{xx} f_{yy} f_{xy} f_{zz} + 4f_z^2 f_{xy} f_{yz} f_{xxy} \\ & - 3f_z^2 f_{yy} f_{xxx} f_{yz} - 2f_z^2 f_{xy}^2 f_{xyz} + 2f_z f_{xy}^3 f_{zz} + 3f_z^2 f_{yy} f_{xxy} f_{xz} \\ & - 2f_z^2 f_{xx} f_{yy} f_{xyz} + 2f_z^2 f_{yy} f_{xy} f_{xzx} - 4f_z^2 f_{xy} f_{xyy} f_{xz} - 6f_z f_{xx} f_{xy} f_{yz}^2) \\ & + 4f_z^2 f_{xx} f_{yy} f_{xy} f_{yz} + 2f_z^3 f_{xy}^2 f_{xyy} + 4f_z^2 f_{yy} f_{xz} f_{xy}^2 - f_z^3 f_{xx} f_{xy} f_{yyy} \\ & - 3f_z^3 f_{xy} f_{xxy} f_{yy} - 4f_z^2 f_{xy}^3 f_{yz} + f_z^3 f_{xxx} f_{yy}^2 + f_z^3 f_{xx} f_{xyy} f_{yy} - 4f_z^2 f_{xx} f_{xz} f_{yz}^2 \Big], \end{aligned}$$

onde

$$a = (4(f_z^3 d^{3/4}) (-f_{xz} f_{yy} + f_{xy} f_{yz}) f_x + f_z (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) + (-f_{xx} f_{yz} + f_{xy} f_{xz}) f_y)^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 = & a \left[f_x^3 \left(-2f_{xyz}f_{yz}^2 + f_{zz}f_{xyy}f_{yz} + f_{yy}f_{xzz}f_{yz} + 2f_{xz}f_{yz}f_{yyz} - f_{xz}f_{zz}f_{yyy} - f_{yy}f_{xz}f_{yzz} \right) \right. \\
& + f_x^2 \left(-2f_{xx}f_{yz}f_{zz}f_{yy} + 4f_zf_{xyz}f_{xy}f_{yz} - 2f_{xxy}f_{yz}f_yf_{zz} + 4f_{yy}f_{xz}f_{xy}f_{zz} \right. \\
& - 2f_{xzz}f_{xy}f_{yz}f_y + 2f_{xz}f_yf_{zz}f_{xyy} + f_zf_{xx}f_{yy}f_{yzz} - 2f_zf_{yy}f_{xzx}f_{yz} \\
& - 2f_{yy}f_{xz}^2f_{yz} - 2f_zf_{xx}f_{yz}f_{yyz} - f_zf_{yy}f_{xzz}f_{xy} + 2f_zf_{yy}f_{xz}f_{xyz} + 2f_{xx}f_{yz}^3 \\
& - 2f_zf_{xz}f_{xy}f_{yyz} + f_zf_{xx}f_{zz}f_{yyy} - 2f_{xy}^2f_{yz}f_{zz} + 2f_{xzx}f_yf_{yz}^2 - 2f_{xz}^2f_{yyz}f_y \\
& + 2f_zf_{xz}^2f_{yyy} - 4f_zf_{xz}f_{xyy}f_{yz} + 2f_{xz}f_{xy}f_yf_{yzz} + 2f_zf_{yz}^2f_{xxy} - f_zf_{zz}f_{xyy}f_{xy} \left. \right) \\
& + f_x \left(2f_{yy}f_{xz}^3f_y + 2f_zf_{xy}^3f_{zz} - 2f_z^2f_{xy}^2f_{xyz} + 2f_{xz}^2f_{xyz}f_y^2 - 2f_zf_{xz}^2f_yf_{xyy} \right. \\
& + 4f_z^2f_{xz}f_{xy}f_{xyy} + 3f_z^2f_{xx}f_{xyy}f_{yz} - 2f_z^2f_{xx}f_{yy}f_{xyz} + 2f_zf_{xy}^2f_yf_{xzz} \\
& + f_{xx}f_{xzz}f_y^2f_{yz} - 3f_z^2f_{xx}f_{xz}f_{yyy} + 2f_z^2f_{xx}f_{xy}f_{yyz} - f_{xx}f_{xz}f_{yzz}f_y^2 \\
& - 6f_{xz}f_yf_{xy}^2f_{zz} + f_{xxx}f_{yz}f_y^2f_{zz} - 2f_zf_{xxx}f_yf_{yz}^2 + f_z^2f_{yy}f_{xxx}f_{yz} \\
& - f_{xz}f_{xxy}f_y^2f_{zz} - f_z^2f_{yy}f_{xz}f_{xxy} - 4f_z^2f_{xxy}f_{yz}f_{xy} + 2f_z^2f_{yy}f_{xzx}f_{xy} \\
& - 2f_y^2f_{xz}f_{xzx}f_{yz} - 6f_zf_{yy}f_{xzz}f_{xy} - 6f_zf_{xx}f_{yz}^2f_{xy} - 6f_{xx}f_{xz}f_{yz}^2f_y \\
& + 4f_zf_{xz}f_{xy}^2f_{yz} + 4f_{xz}^2f_yf_{yz}f_{xy} - 2f_zf_{xx}f_{yy}f_{zz}f_{xy} - 2f_{xx}f_{yy}f_{xz}f_yf_{zz} \\
& + 8f_{xx}f_{yz}f_{xy}f_yf_{zz} + 2f_zf_{xxy}f_{xy}f_yf_{zz} + 4f_zf_{xz}f_yf_{xxy}f_{yz} - 2f_zf_{xx}f_{xyy}f_yf_{zz} \\
& - 4f_zf_{xz}f_yf_{xy}f_{xyz} + 4f_zf_{xx}f_{xz}f_{yyz}f_y - 2f_zf_{xx}f_{xy}f_yf_{yzz} + 8f_zf_{xx}f_{yy}f_{yz}f_{xz} \left. \right) \\
& + f_y^2 \left(-f_zf_{xx}f_{xzz}f_{xy} + 4f_{xx}f_{yz}f_{xz}^2 + 4f_{xx}f_{xz}f_{xy}f_{zz} - 2f_zf_{xx}f_{xz}f_{xyz} \right. \\
& - f_zf_{xxx}f_{zz}f_{xy} + 2f_zf_{xz}f_{xzx}f_{xy} + f_zf_{xx}f_{xxy}f_{zz} - 4f_{yz}f_{zz}f_{xx}^2 \\
& + f_zf_{xx}^2f_{yzz} - 4f_{xz}^3f_{xy} \left. \right) \\
& + f_y \left(-2f_z^2f_{xx}^2f_{yyz} + 2f_z^2f_{xx}f_{xyy}f_{xz} + 2f_zf_{xx}^2f_{zz}f_{yy} - 2f_zf_{xx}f_{xy}^2f_{zz} \right. \\
& - 2f_z^2f_{xxy}f_{xy}f_{xz} + 2f_z^2f_{xxx}f_{yz}f_{xy} - 12f_zf_{xx}f_{xz}f_{xy}f_{yz} + 4f_z^2f_{xx}f_{xyz}f_{xy} \\
& + 6f_zf_{xx}^2f_{yz}^2 - 2f_z^2f_{xx}f_{yz}f_{xxy} - 2f_zf_{xx}f_{yy}f_{xz}^2 - 2f_z^2f_{xy}^2f_{xzx} + 8f_zf_{xz}^2f_{xy}^2 \left. \right) \\
& - 4f_z^2f_{xz}f_{xy}^3 - 3f_z^3f_{xx}f_{xyy}f_{xy} + 2f_z^3f_{xy}^2f_{xxy} + 4f_z^2f_{xx}f_{yy}f_{xy}f_{xz} \\
& + 4f_z^2f_{xx}f_{yz}f_{xy}^2 - f_z^3f_{xxx}f_{xy}f_{yy} + f_z^3f_{yyy}f_{xx}^2 + f_z^3f_{xx}f_{xxy}f_{yy} - 4f_z^2f_{xx}^2f_{yz}f_{yy} \left. \right)
\end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}
\xi_3 = & a \left[f_x^3 \left(-f_{yy}^2f_{xzz} + 2f_{yy}f_{yz}f_{xyz} - f_{yy}f_{zz}f_{xyy} - 2f_{xy}f_{yz}f_{yyz} + f_{xy}f_{zz}f_{yyy} + f_{yy}f_{xy}f_{yzz} \right) \right. \\
& + f_x^2 \left(2f_zf_{yy}f_{xz}f_{xyy} + 2f_{yy}^2f_{xz}^2 + 2f_{xx}f_yf_{yz}f_{yyz} + 2f_zf_{xxy}f_{xy}f_{yz} \right. \\
& - 4f_zf_{yy}f_{xy}f_{xyz} + 2f_{xz}f_yf_{xy}f_{yyz} - 2f_{yy}f_{xz}f_{xyz}f_y - f_{zz}f_yf_{xy}f_{xyy} \\
& - f_{xx}f_yf_{yzz}f_{yy} + 4f_{xy}^2f_{yz}^2 - f_{xx}f_yf_{zz}f_{yyy} - 2f_{yy}f_{xzx}f_{yz}f_y - 2f_zf_{xy}f_{xz}f_{yyy} \\
& + 3f_{yy}f_{xy}f_yf_{xzz} - 2f_zf_{yy}f_{xxy}f_{yz} + 2f_zf_{xzx}f_{yy}^2 - 2f_{xx}f_{yy}f_{yz}^2 - 2f_{yy}f_{xy}^2f_{zz} \\
& + 2f_{yy}f_{xxy}f_yf_{zz} - 2f_{xy}^2f_yf_{yzz} + 2f_{xx}f_{zz}f_{yy}^2 + 2f_zf_{xy}^2f_{yyz} - 4f_{yy}f_{xz}f_{yz}f_{xy} \left. \right) \\
& + f_x \left(2f_zf_{yy}f_{xxx}f_{yz}f_y - 2f_zf_{yy}f_yf_{xxy}f_{xz} - 4f_zf_{yy}f_{xy}f_yf_{xzx} - 2f_zf_{xx}f_{xyy}f_{yz}f_y \right. \\
& + 4f_zf_{xx}f_{yy}f_{xyz}f_y + 2f_zf_{xx}f_{xz}f_yf_{yyy} - 4f_zf_{xx}f_yf_{xy}f_{yyz} + 8f_zf_{xx}f_{yy}f_{xy}f_{yz} \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8f_{xx}f_{yy}f_{xz}f_{yz}f_y - 4f_{xx}f_{yy}f_{xy}f_yf_{zz} - 8f_zf_{xy}^3f_{yz} + 4f_{xy}^3f_yf_{zz} \\
& - 2f_z^2f_{xyy}f_{xy}^2 - 2f_{xzz}f_y^2f_{xy}^2 + 4f_zf_{xy}^2f_{xyz}f_y - 2f_{xx}f_{xyz}f_{yz}f_y^2 \\
& + f_z^2f_{xx}f_{xy}f_{yyy} - f_{xx}f_{yy}f_{xzz}f_y^2 - 2f_{xx}f_{xz}f_{yyz}f_y^2 + 3f_{xx}f_{xy}f_y^2f_{yz} \\
& - f_{yy}f_{xxx}f_{zz}f_y^2 - f_{xy}f_y^2f_{zz}f_{xxy} + 3f_z^2f_{yy}f_{xy}f_{xxy} + 2f_{yy}f_y^2f_{xz}f_{xxz} \\
& + 2f_{xy}f_y^2f_{xxz}f_{yz} + 2f_{xx}f_{xyy}f_y^2f_{zz} - f_z^2f_{xx}f_{yy}f_{xyy} - 8f_zf_{xx}f_{xz}f_{yy}^2 \\
& - 4f_{yy}f_{xy}f_yf_{xz}^2 + 8f_zf_{yy}f_{xz}f_{xy}^2 - 4f_{xx}f_{xy}f_{yz}^2f_y - f_z^2f_{xxx}f_{yy}^2) \\
& + f_y^3(-f_{xx}f_{xxy}f_{zz} + f_{xxx}f_{zz}f_{xy} + 2f_{xx}f_{xz}f_{xyz} + f_{xx}f_{xzz}f_{xy} - f_{xx}^2f_{yzz} \\
& - 2f_{xz}f_{xxz}f_{xy}) \\
& + f_y^2(4f_{xy}^2f_{xz}^2 - 2f_zf_{xx}f_{xyy}f_{xz} - 4f_zf_{xx}f_{xy}f_{xyz} + 2f_zf_{xx}f_{xxy}f_{yz} \\
& + 2f_zf_{xy}^2f_{xxz}2f_{xx}^2f_{yz}^2 + 2f_zf_{xxy}f_{xy}f_{xz} - 4f_{xx}f_{xz}f_{xy}f_{yz} \\
& + 2f_zf_{xz}^2f_{yyz} - 2f_{xx}f_{xz}^2f_{yy} + 2f_{xx}^2f_{zz}f_{yy} - 2f_{xx}f_{xy}^2f_{zz} - 2f_zf_{xxx}f_{yz}f_{xy}) \\
& + f_y(-f_z^2f_{xx}f_{yy}f_{xxy} + f_z^2f_{yy}f_{xxx}f_{xy} + 3f_z^2f_{xx}f_{xy}f_{xyy} + 8f_zf_{xx}f_{yy}f_{xy}f_{xz} \\
& - 8f_zf_{xy}^3f_{xz} - 8f_zf_{xx}^2f_{yz}f_{yy} - f_z^2f_{xx}^2f_{yyy} + 8f_zf_{xx}f_{xy}^2f_{yz} - 2f_z^2f_{xy}^2f_{xxy}) \\
& + 4f_z^2f_{xx}^2f_{yy}^2 + 4f_z^2f_{xy}^4 - 8f_z^2f_{xx}f_{yy}f_{xy}^2.
\end{aligned}$$

Notemos que ao substituirmos $f_x = 0 = f_y = f_{xy}$ e $f_z = 1$ em ξ temos exatamente a expressão do ξ dada no capítulo 4.

Agora, queremos calcular as expressões para as curvaturas afins, para isso é necessário calcularmos as derivadas do co-normal afim ν e do normal afim ξ . Denotaremos por $\nu_x = (\partial_x\nu_1, \partial_x\nu_2, \partial_x\nu_3)$, $\nu_y = (\partial_y\nu_1, \partial_y\nu_2, \partial_y\nu_3)$ e $\xi_x = (\partial_x\xi_1, \partial_x\xi_2, \partial_x\xi_3)$, $\xi_y = (\partial_y\xi_1, \partial_y\xi_2, \partial_y\xi_3)$. Obtemos,

$$\begin{aligned}
\partial_x\nu_1 &= \frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (g_x g_{xxx} g_{yy} + g_x g_{xx} g_{xyy} - 2g_x g_{xy} g_{xxy} - 4g_{xx}^2 g_{yy} + 4g_{xx} g_{xy}^2), \\
\partial_x\nu_2 &= \frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (g_y g_{xxx} g_{yy} + g_y g_{xx} g_{xyy} - 2g_y g_{xy} g_{xxy} - 4g_{xy} g_{xx} g_{yy} + 4g_{xy}^3), \\
\partial_x\nu_3 &= \frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (-g_{xxx} g_{yy} - g_{xx} g_{xyy} + 2g_{xy} g_{xxy})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_y\nu_1 &= \frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (g_x g_{xxy} g_{yy} + g_x g_{xx} g_{yyy} - 2g_x g_{xy} g_{xyy} - 4g_{xy} g_{xx} g_{yy} + 4g_{xy}^3), \\
\partial_y\nu_2 &= \frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (g_y g_{xxy} g_{yy} + g_y g_{xx} g_{yyy} - 2g_y g_{xy} g_{xyy} - 4g_{xx} g_{yy}^2 + 4g_{yy} g_{xy}^2), \\
\partial_y\nu_3 &= -\frac{1}{4d^{5/4}} \cdot (g_{xxy} g_{yy} + g_{xx} g_{yyy} - 2g_{xy} g_{xyy}),
\end{aligned}$$

onde as expressões de g_x, g_y, g_{xx}, g_{xy} e g_{yy} foram dadas no capítulo 4 e as demais

derivadas são

$$\begin{aligned}
g_{xxx} &= -\frac{f_{xxx}}{f_z} + \frac{3(f_{xxz}f_x + f_{xz}f_{xx})}{f_z^2} + \frac{3(-f_{zz}f_xf_{xx} - 2f_{xz}^2f_x - f_{zzz}f_x^2)}{f_z^3} \\
&+ \frac{9f_{xz}f_{zz}f_x^2f_x^3f_{zzz}}{f_z^4} - \frac{3f_{zz}^2f_x^3}{f_z^5} \\
g_{xyy} &= -\frac{f_{xyy}}{f_z} + \frac{f_{yz}f_{xx} + 2f_xf_{xyz} + 2f_{xz}f_{xy} + f_{xxz}f_y}{f_z^2} \\
&+ \frac{-2f_{xz}^2f_y - f_x^2f_{yzz} - f_{zz}f_yf_{xx} - 2f_{zz}f_xf_{xy} - 4f_{xz}f_{yz}f_x - 2f_xf_{zzz}f_y}{f_z^3} \\
&+ \frac{f_x^2f_{zzz}f_y + 6f_{xz}f_yf_{zz}f_x + 3f_{zz}f_x^2f_{yz}}{f_z^4} - \frac{3f_{zz}^2f_x^2f_y}{f_z^5} \\
g_{yyy} &= -\frac{f_{yyy}}{f_z} + \frac{2f_{yz}f_{xy} + f_xf_{yyz} + f_{xz}f_{yy} + 2f_{xyz}f_y}{f_z^2} \\
&- \frac{4f_{yz}f_yf_{xz} + 2f_{zz}f_yf_{xy} + f_{zzz}f_y^2 + 2f_xf_{yzz}f_y + 2f_{yz}^2f_x + f_{zz}f_xf_{yy}}{f_z^3} \\
&+ \frac{3f_{xz}f_{zz}f_y^2 + 6f_{yz}f_yf_{zz}f_x + f_y^2f_xf_{zzz}}{f_z^4} - \frac{3f_{zz}^2f_xf_y^2}{f_z^5} \\
g_{yyy} &= -\frac{f_{yyy}}{f_z} + \frac{3f_{yyz}f_y + 3f_{yz}f_{yy}}{f_z^2} + \frac{-3f_{zz}f_yf_{yy} - 6f_{yz}^2f_y - 3f_{yzz}f_y^2}{f_z^3} \\
&+ \frac{9f_{yz}f_{zz}f_y^2 + f_y^3f_{zzz}}{f_z^4} - \frac{3f_{zz}^2f_y^3}{f_z^5}.
\end{aligned}$$

As derivadas do normal afim com relação a x e y são

$$\begin{aligned}
\partial_x \xi_1 &= \frac{1}{16d^{5/4}} \left(-12g_{xy}^3g_{xxxy}g_{yy} + 3g_{xx}^2g_{xyy}^2g_{yy} - 39g_{xx}g_{xyy}g_{yy}g_{xy}g_{xxy} \right. \\
&- 3g_{xx}g_{xy}g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} + 7g_{xxx}^2g_{yy}^3 + 8g_{xy}^4g_{xxy} + 2g_{xx}g_{xyy}g_{yy}^2g_{xxx} \\
&- 7g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{xxy} + 10g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{xxy} - 35g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}g_{xxy} \\
&+ 26g_{xy}^2g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} - 4g_{xx}g_{xxy}g_{yy}g_{xy}^2 + 4g_{xx}^2g_{xxy}g_{yyy}g_{yy} \\
&+ 4^2g_{xx}g_{xy}g_{yyy}g_{yy} + 12g_{xy}g_{xxxy}g_{yy}^2g_{xx} + 30g_{xy}^2g_{xxy}^2g_{yy} \\
&+ 18g_{xy}^2g_{xxy}g_{xx} - 24g_{xy}^3g_{xyy}g_{xxy} - 4g_{xx}^2g_{xxy}g_{yy}^2 - 4g_{xxx}g_{xy}^3g_{yyy} \\
&- 4g_{xx}g_{xy}^3g_{yyy} - 4g_{xxx}g_{yy}^3g_{xx} + 4g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}^2 + 12g_{xxy}^2g_{yy}^2g_{xx} \left. \right), \\
\partial_x \xi_2 &= \frac{1}{16d^{5/4}} \left(-7g_{xy}g_{xxx}^2g_{yy}^2 - 12g_{xy}^3g_{xx}g_{xxy} - 12g_{xxy}^2g_{xy}^3 + 8g_{xxy}g_{xy}^4 \right. \\
&- 21g_{xy}g_{xx}^2g_{xy}^2 + 7g_{xx}^3g_{yyy}g_{xxy} - 4g_{xy}^3g_{xxx}g_{yy} - 16g_{xy}^3g_{xxx}g_{xyy} \\
&- 4g_{xx}^3g_{xyy}g_{yy} + 4g_{xx}^2g_{xyyy}g_{xy}^2 - 4g_{xxy}g_{xx}^2g_{yy}^2 + 28g_{xxy}g_{xy}^2g_{xxx}g_{yy} \\
&+ 48g_{xxy}g_{xy}^2g_{xx}g_{xxy} - g_{xx}^2g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} - 14g_{xx}^2g_{yyy}g_{xy}g_{xxy} + 7g_{xxy}g_{xx}g_{yy}^2g_{xxx} \\
&+ 15g_{xxy}g_{xx}^2g_{yy}g_{xxy} - 30g_{xxy}^2g_{xx}g_{yy}g_{xy} - 4g_{xxy}g_{xy}^2g_{xx}g_{yy} + 4g_{xy}g_{xxx}g_{yy}^2g_{xxx} \\
&+ 12g_{xy}g_{xx}^2g_{xxy}g_{yy} + 8g_{xx}g_{yyy}g_{xxx}g_{xy}^2 - 12g_{xy}g_{xxx}g_{yy}g_{xx}g_{xxy} \left. \right), \\
\partial_x \xi_3 &= \frac{1}{16d^{5/4}} (4g_xg_{xxxx}g_{yy}^2g_{xy}^2 - 4g_xg_{xxxx}g_{yy}^3g_{xx} + 4g_{xx}^2g_yg_{xyyy}g_{xy}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4g_{xx}^3 g_y g_{xyyy} g_{yy} + 12g_{yy}^2 g_x g_{xxy}^2 g_{xx} - 24g_x g_{xyy} g_{xy}^3 g_{xxy} + 18g_x g_{xyy} g_{xy}^2 g_{xx} \\
& - 7g_{yy}^2 g_y g_{xxx} g_{xy} + 30g_{yy} g_x g_{xy}^2 g_{xxy} - 21g_{xx}^2 g_y g_{xy} g_{xyy}^2 + 3g_{xx}^2 g_{yy} g_x g_{xy}^2 g_{yy} \\
& + 7g_{xx}^3 g_y g_{yyy} g_{xyy} - 12g_{yy} g_x g_{xy}^3 g_{xxy} - 12g_{xx} g_y g_{xy}^3 g_{xxy} - 16g_{xxx} g_y g_{xy}^3 g_{xyy} \\
& - 4g_{xx}^2 g_{yy}^2 g_y g_{xxy} - 4g_{xx}^2 g_{yy}^2 g_x g_{xxy} - 4g_{yy} g_y g_{xxxx} g_{xy}^3 - 4g_{xx} g_{xy}^3 g_x g_{xyyy} \\
& - 4g_{xxx} g_{xy}^3 g_x g_{yyy} - 14g_{xx}^2 g_y g_{yyy} g_{xy} g_{xxy} - g_{xx}^2 g_y g_{yyy} g_{xxx} g_{yy} \\
& + 2g_{xx} g_{yy}^2 g_x g_{xyy} g_{xxx} + 15g_{xx}^2 g_{yy} g_y g_{xxy} g_{xyy} + 7g_{xx} g_{yy}^2 g_y g_{xxy} g_{xxx} \\
& - 30g_{xx} g_{yy} g_y g_{xxy}^2 g_{xy} + 48g_{xx} g_y g_{xy}^2 g_{xyy} g_{xxy} + 8g_{xy}^4 g_y g_{xxx} \\
& - 39g_{xx} g_{yy} g_x g_{xyy} g_{xy} g_{xxy} - 12g_{xx} g_y g_{xy} g_{xyy} g_{xxx} g_{yy} - 3g_{xx} g_{xy} g_x g_{yyy} g_{xxx} g_{yy} \\
& - 35g_x g_{xxx} g_{yy}^2 g_{xy} g_{xxy} + 10g_{xx} g_{xy}^2 g_x g_{yyy} g_{xxy} - 7g_{xx}^2 g_{xy} g_x g_{yyy} g_{xyy} \\
& + 28g_{yy} g_y g_{xxx} g_{xy}^2 g_{xxy} + 7g_x g_{xxx} g_{yy}^3 + 4g_{xx}^2 g_{xxy} g_x g_{yyy} g_{yy} \\
& + 4g_{xx}^2 g_{xy} g_x g_{yyy} g_{yy} + 4g_{yy}^2 g_y g_{xxxx} g_{xy} g_{xx} + 8g_{xx} g_y g_{yyy} g_{xxx} g_{xy}^2 \\
& + 12g_{xx}^2 g_y g_{xy} g_{xxy} g_{yy} + 12g_{yy}^2 g_x g_{xy} g_{xxy} g_{xx} + 26g_x g_{xyy} g_{xy}^2 g_{xxx} g_{yy} \\
& - 12g_{xy}^3 g_y g_{xxy}^2 + 8g_x g_{xxyy} g_{xy}^4 - 4g_{xy}^2 g_y g_{xxy} g_{xx} g_{yy} - 4g_x g_{xxyy} g_{xy}^2 g_{xx} g_{yy}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_y \xi_1 &= \frac{1}{16d^{5/4}} (-12g_{xy}^3 g_{xxyy} g_{yy} - 12g_{xx} g_{xy} g_{yyy} g_{xxy} g_{yy} - 12g_{xy}^3 g_{xxy}^2 + 8g_{xy}^4 g_{xyyy} \\
& - 7g_{xx}^2 g_{xy} g_{yyy}^2 + 7g_{xxx} g_{yy}^3 g_{xxy} - 21g_{xy} g_{xxy}^2 g_{yy}^2 - 4g_{xx}^2 g_{xyyy} g_{yy}^2 - 16g_{xxy} g_{xy}^3 g_{yyy} \\
& - 4g_{xx} g_{xy}^3 g_{yyy} - 4g_{xxy} g_{yy}^3 g_{xx} + 4g_{xxy} g_{yy}^2 g_{xy}^2 + 15g_{xx} g_{xyy} g_{yy}^2 g_{xxy} \\
& + 7g_{xx}^2 g_{xyy} g_{yy} g_{yyy} - 30g_{xx} g_{xyy}^2 g_{yy} g_{xy} + 28g_{xx} g_{xy}^2 g_{yyy} g_{xxy} - g_{xxx} g_{yy}^2 g_{xx} g_{yyy} \\
& - 14g_{xxx} g_{xy}^2 g_{xy} g_{xyy} + 48g_{xy}^2 g_{xxy} g_{yy} g_{xxy} - 4g_{xx} g_{xyyy} g_{yy} g_{xy}^2 \\
& + 4g_{xx}^2 g_{xy} g_{yyy} g_{yy} + 8g_{xxx} g_{yy} g_{yyy} g_{xy}^2 + 12g_{xy} g_{xxyy} g_{yy}^2 g_{xx}), \\
\partial_y \xi_2 &= \frac{1}{16d^{5/4}} (-4g_{xy}^3 g_{xxyy} g_{yy} + 12g_{xx}^2 g_{xyy} g_{yy} - 39g_{xx} g_{xyy} g_{yy} g_{xy} g_{xxy} \\
& - 3g_{xx} g_{xy} g_{yyy} g_{xxx} g_{yy} + 8g_{xy}^4 g_{xxyy} + 4g_{xx} g_{xyy} g_{yy}^2 g_{xxx} - 35g_{xx}^2 g_{xy} g_{yyy} g_{xxy} \\
& + 26g_{xx} g_{xy}^2 g_{yyy} g_{xxy} - 7g_{xxx} g_{yy}^2 g_{xy} g_{xxy} + 10g_{xy}^2 g_{xxy} g_{xxx} g_{yy} - 4g_{xx} g_{xxyy} g_{yy} g_{xy}^2 \\
& + 2g_{xx}^2 g_{xxy} g_{yyy} g_{yy} + 12g_{xx}^2 g_{xy} g_{yyy} g_{yy} + 4g_{xy} g_{xxyy} g_{yy}^2 g_{xx} + 18g_{xy}^2 g_{xxy}^2 g_{yy} \\
& + 30g_{xy}^2 g_{xxy}^2 g_{xx} - 24g_{xy}^3 g_{xxy} g_{xxy} - 4g_{xx}^2 g_{xxyy} g_{yy}^2 - 4g_{xxx} g_{xy}^3 g_{yyy} + 7g_{xx}^3 g_{xyy}^2 \\
& + 3g_{xxy}^2 g_{xy}^2 g_{xx} - 4g_{xx}^3 g_{yyy} g_{yy} + 4g_{xx}^2 g_{yyy} g_{xy}^2 - 12g_{xx} g_{xy}^3 g_{xyyy}), \\
\partial_y \xi_3 &= \frac{1}{16d^{5/4}} (-21g_{yy}^2 g_x g_{xy} g_{xxy}^2 + 7g_x g_{xxx} g_{yy}^3 g_{xxy} - 7g_{xx}^2 g_{xy} g_x g_{yyy} \\
& + 30g_{xx} g_y g_{xy}^2 g_{xxy} + 3g_{xx} g_{yy}^2 g_y g_{xxy}^2 - 12g_{xx} g_y g_{xy}^3 g_{xyyy} - 4g_{xx}^2 g_{yy}^2 g_y g_{xxyy} \\
& - 4g_{xx}^2 g_{yy}^2 g_x g_{xyyy} - 4g_{yy} g_y g_{xxxx} g_{xy}^3 - 4g_{yyy} g_y g_{xxx} g_{xy}^3 - 4g_{xx}^3 g_{xy} g_x g_{yyy} \\
& + 4g_x g_{xxyy} g_{yy}^2 g_{xy} - 4g_x g_{xxyy} g_{yy}^3 g_{xx} + 4g_{xx}^2 g_y g_{yyy} g_{xy}^2 - 4g_{xx}^3 g_y g_{yyy} g_{yy} \\
& + 12g_{xx}^2 g_y g_{xxy}^2 g_{yy} - 24g_{xy}^3 g_y g_{xxy} g_{xyy} + 18g_{xy}^2 g_y g_{xxy}^2 g_{yy} - 12g_{yy} g_x g_{xy}^3 g_{xxy} \\
& - 16g_{xxy} g_{xy}^3 g_x g_{yyy} + 8g_{xy}^4 g_y g_{xxyy} + 8g_x g_{xyyy} g_{xy}^4 - 39g_{xx} g_{yy} g_y g_{xxy} g_{xy} g_{xxy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 12g_{xx}g_{xy}g_xg_{yyy}g_{xxy}g_{yy} - 3g_{yy}g_yg_{xxx}g_{xy}g_{xx}g_{yyy} - 12g_xg_{xy}^2g_{xy}^3 \\
& + 2g_{xx}^2g_yg_{yyy}g_{xxy}g_{yy} - 35g_{xx}^2g_yg_{yyy}g_{xy}g_{xy} + 15g_{xx}g_{xy}^2g_xg_{xxy}g_{xxy} \\
& + 7g_{xx}^2g_{yy}g_xg_{xxy}g_{yyy} - 30g_{xx}g_{yy}g_xg_{xxy}g_{xy} + 28g_{xx}g_{xy}^2g_xg_{yyy}g_{xxy} \\
& - g_xg_{xxx}g_{yy}^2g_{xx}g_{yyy} - 14g_xg_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}g_{xxy} + 48g_{yy}g_xg_{xy}^2g_{xxy}g_{xxy} \\
& - 7g_{yy}^2g_yg_{xxx}g_{xy}g_{xxy} + 10g_{yy}g_yg_{xxx}g_{xy}^2g_{xxy} + 26g_{xy}^2g_yg_{xxy}g_{xx}g_{yyy} \\
& - 4g_{xy}^2g_yg_{xxy}g_{xx}g_{yy} - 4g_xg_{xy}g_{xy}^2g_{xx}g_{yy} + 4g_{xx}^2g_{xy}g_xg_{yyy}g_{yy} \\
& + 4g_{yy}^2g_yg_{xxy}g_{xy}g_{xx} + 4g_{yy}^2g_yg_{xxx}g_{xxy}g_{xx} + 12g_{xx}^2g_yg_{xy}g_{yyy}g_{yy} \\
& + 8g_xg_{xxx}g_{yy}g_{yyy}g_{xy}^2 + 12g_{yy}^2g_xg_{xy}g_{xxy}g_{xx} + 7g_{xx}^3g_yg_{yyy}^2).
\end{aligned}$$

Notemos que agora precisamos determinar as derivadas até a quarta ordem de g , o que implica que temos que calcular as derivadas de f também até essa ordem. A seguir, exibiremos apenas uma dessas derivadas de g até a quarta ordem para exemplificar o quanto o cálculo direto é caro.

$$\begin{aligned}
g_{xxyy} &= -\frac{f_{xxyy}}{f_z} + \frac{f_{xxz}f_{yy} + 2f_{xz}f_{xyy} + 2f_{xxy}f_{yz} + 2f_{xxyz}f_y + 4f_{xy}f_{xyz}}{f_z^2} \\
&+ \frac{f_{xx}f_{yyz} + 2f_xf_{xyyz}}{f_z^2} \\
&- \frac{2f_{xxz}f_{yz}f_y + 2f_{xx}f_{yzz}f_y + f_{xx}f_{zz}f_{yy} + 4f_xf_{xyz}f_y + f_{xxz}f_y^2}{f_z^3} \\
&- \frac{2(f_{yz}f_{xx} + 2f_xf_{xyz} + 2f_{xz}f_{xy} + f_{xxz}f_y)f_{yz} + 4f_{xy}f_{xzz}f_y + 2f_{xxy}f_{zz}f_y}{f_z^3} \\
&- \frac{2f_{xz}f_xf_{yyz} - 4(f_{yz}f_x + f_yf_{xz})f_{xyz} - 2f_{zz}f_xf_{xyy} + 2f_{xzz}f_xf_{yy} + f_x^2f_{yyzz}}{f_z^3} \\
&- \frac{2f_{xz}(2f_{yz}f_{xy} + f_xf_{yyz} + f_{xz}f_{yy} + 2f_{xyz}f_y) - 4f_xf_{yzz}f_{xy} - 2f_{zz}f_{xy}^2}{f_z^3} \\
&+ \frac{4f_{zz}(f_{yz}f_x + f_yf_{xz})f_{xy} + 2f_{xz}f_xf_{zz}f_{yy} + 2f_{xx}f_{zz}f_{yz}f_y + 4f_yf_{zz}f_xf_{xyz}}{f_z^4} \\
&+ \frac{2(f_{yz}f_{xx} + 2f_xf_{xyz} + 2f_{xz}f_{xy} + f_{xxz}f_y)f_{zz}f_y + 4f_xf_{yzz}(f_{yz}f_x + f_yf_{xz})}{f_z^4} \\
&+ \frac{f_x^2f_{zzz}f_{yy} + 4f_{xz}f_xf_{yzz}f_y + 2f_x^2f_{yzzz}f_y + f_{xxz}f_{zz}f_y^2}{f_z^4} \\
&+ \frac{2f_{zz}f_x(2f_{yz}f_{xy} + f_xf_{yyz} + f_{xz}f_{yy} + 2f_{xyz}f_y) + 4(f_{yz}f_x + f_yf_{xz})f_{xzz}f_y}{f_z^4} \\
&+ \frac{-2f_{xz}(-4f_{yz}f_yf_{xz} - 2f_{zz}f_yf_{xy} - f_{xzz}f_y^2 - 2f_xf_{yzz}f_y - 2f_{yz}^2f_x - f_{zz}f_xf_{yy})}{f_z^4} \\
&+ \frac{-2(-2f_{xz}^2f_y - f_x^2f_{yzz} - f_{zz}f_yf_{xx} - 2f_{zz}f_xf_{xy} - 4f_{xz}f_{yz}f_x - 2f_xf_{xzz}f_y)f_{yz}}{f_z^4} \\
&+ \frac{f_{zz}f_x^2f_{yyz} + 2f_y^2f_xf_{xzzz} + 4f_{xzz}f_xf_{yz}f_y + f_{xx}f_y^2f_{zzz} + 4f_xf_{zzz}f_yf_{xy}}{f_z^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2f_{zz}f_x(-4f_{yz}f_yf_{xz} - 2f_{zz}f_yf_{xy} - f_{xzz}f_y^2 - 2f_xf_{yzz}f_y - 2f_{yz}^2f_x - f_{zz}f_xf_{yy})}{f_z^5} \\
& + \frac{-6f_{zz}f_x^2f_{yzz}f_y - 2f_x^2f_{zzz}f_{yz}f_y - 6f_y^2f_{zz}f_xf_{xzz}}{f_z^5} \\
& - \frac{2f_{zz}^2(2f_yf_{zz}f_xf_{xy} + f_{yz}f_x + f_yf_{xz}) - 2(f_x^2f_{zzz}f_y + 6f_{xz}f_yf_{zz}f_x + 3f_{zz}f_x^2f_{yz})f_{yz}}{f_z^5} \\
& + \frac{-2f_{xz}f_xf_y^2f_{zzz} - f_{zz}^2f_x^2f_{yy} - 4f_{xz}f_xf_{zz}f_{yz}f_y - f_{xx}f_{zz}^2f_y^2}{f_z^5} \\
& + \frac{-4f_xf_{zzz}f_y(f_{yz}f_x + f_yf_{xz}) - 2f_{xz}(3f_{xz}f_{zz}f_y^2 + 6f_{yz}f_yf_{zz}f_x + f_y^2f_xf_{zzz})}{f_z^5} \\
& + \frac{2(-2f_{xz}^2f_y - f_x^2f_{yzz} - f_{zz}f_yf_{xx} - 2f_{zz}f_xf_{xy} - 4f_{xz}f_{yz}f_x - 2f_xf_{xzz}f_y)f_{zz}f_y}{f_z^5} \\
& + \frac{-f_x^2f_y^2f_{zzzz}}{f_z^5} \\
& + \frac{6f_x^2f_{zzz}f_y^2f_{zz} + 8f_{xz}f_{zz}^2f_xf_y^2 + 8f_{zz}^2f_x^2f_yf_{yz}}{f_z^6} \\
& + \frac{4f_{zz}^2f_yf_x(f_{yz}f_x + f_yf_{xz}) + 2f_{zz}f_x(3f_{xz}f_{zz}f_y^2 + 6f_{yz}f_yf_{zz}f_x + f_y^2f_xf_{zzz})}{f_z^6} \\
& + \frac{2(f_x^2f_{zzz}f_y + 6f_{xz}f_yf_{zz}f_x + 3f_{zz}f_x^2f_{yz})f_{zz}f_y}{f_z^6} - \frac{15f_y^2f_{zz}^3f_x^2}{f_z^7}.
\end{aligned}$$

E por fim, resta calcular os coeficientes $(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ do operador forma \mathcal{S} definidos no capítulo 2

$$\begin{aligned}
b_{11} &= 12g_{xy}^3g_{xxx}g_{yy} - 3g_{xx}^2g_{xy}^2g_{yy} + 39g_{xx}g_{xy}g_{yy}g_{xy}g_{xy} + 3g_{xx}g_{xy}g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} \\
&- 7g_{xxx}^2g_{yy}^3 - 8g_{xy}^4g_{xxy} - 2g_{xx}g_{xy}g_{yy}^2g_{xxx} + 7g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{xxy} - 10g_{xx}g_{xy}^2g_{yyy}g_{xxy} \\
&+ 35g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}g_{xxy} - 26g_{xy}^2g_{xxy}g_{xxx}g_{yy} + 4g_{xx}g_{xxy}g_{yy}g_{xy}^2 - 4g_{xx}^2g_{xxy}g_{yyy}g_{yy} \\
&- 4g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{yy} - 12g_{xy}g_{xxx}g_{yy}^2g_{xx} - 30g_{xy}^2g_{xxy}g_{yy} - 18g_{xy}^2g_{xxy}g_{xx} \\
&+ 24g_{xy}^3g_{xxy}g_{xxx} + 4g_{xx}^2g_{xxy}g_{yy}^2 + 4g_{xxx}g_{xy}^3g_{yyy} + 4g_{xx}g_{xy}^3g_{xyyy} \\
&+ 4g_{xxx}g_{yy}^3g_{xx} - 4g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}^2 - 12g_{xxy}^2g_{yy}^2g_{xx}, \\
b_{12} &= 7g_{xy}g_{xxx}^2g_{yy}^2 + 12g_{xy}^3g_{xx}g_{xxy} + 12g_{xxy}^2g_{xy}^3 - 8g_{xxx}g_{xy}^4 + 21g_{xy}g_{xx}^2g_{xy}^2 \\
&- 7g_{xx}^3g_{yyy}g_{xxy} + 4g_{xy}^3g_{xxx}g_{yy} + 16g_{xy}^3g_{xxx}g_{xxy} + 4g_{xx}^3g_{xyyy}g_{yy} - 4g_{xx}^2g_{xyyy}g_{xy}^2 \\
&+ 4g_{xxx}g_{xy}^2g_{yy}^2 - 28g_{xxy}g_{xy}^2g_{xxx}g_{yy} - 48g_{xxy}g_{xy}^2g_{xx}g_{xxy} + g_{xx}^2g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} \\
&+ 14g_{xx}^2g_{yyy}g_{xy}g_{xxy} - 7g_{xxy}g_{xx}g_{yy}^2g_{xxx} - 15g_{xxy}g_{xx}^2g_{yy}g_{xxy} + 30g_{xxy}^2g_{xx}g_{yy}g_{xy} \\
&+ 4g_{xxx}g_{xy}^2g_{xx}g_{yy} - 4g_{xy}g_{xxx}g_{yy}^2g_{xx} - 12g_{xy}g_{xx}^2g_{xxy}g_{yy} \\
&- 8g_{xx}g_{yyy}g_{xxx}g_{xy}^2 + 12g_{xy}g_{xxx}g_{yy}g_{xx}g_{xxy}, \\
b_{21} &= 12g_{xy}^3g_{xxy}g_{yy} + 12g_{xx}g_{xy}g_{yyy}g_{xxy}g_{yy} + 12g_{xy}^3g_{xxy}^2 - 8g_{xy}^4g_{xyyy} + 7g_{xx}^2g_{xy}g_{xy}^2 \\
&- 7g_{xxx}g_{yy}^3g_{xxy} + 21g_{xy}g_{xxy}^2g_{yy}^2 + 4g_{xx}^2g_{xyyy}g_{yy}^2 + 16g_{xxy}g_{xy}^3g_{yyy} + 4g_{xx}g_{xy}^3g_{xyyy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4g_{xxxy}g_{yy}^3g_{xx} - 4g_{xxxy}g_{yy}^2g_{xy}^2 - 15g_{xx}g_{xy}g_{yy}^2g_{xxy} - 7g_{xx}^2g_{xy}g_{yy}g_{yyy} \\
& + 30g_{xx}g_{xy}^2g_{yy}g_{xy} - 28g_{xx}g_{xy}^2g_{yyy}g_{xxy} + g_{xxx}g_{yy}^2g_{xx}g_{yyy} + 14g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}g_{xxy} \\
& - 48g_{xy}^2g_{xxy}g_{yy}g_{xxy} + 4g_{xx}g_{xy}g_{yy}g_{xy}^2 - 4g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{yy} \\
& - 8g_{xxx}g_{yy}g_{yyy}g_{xy}^2 - 12g_{xy}g_{xxy}g_{yy}^2g_{xx}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_{22} & = 4g_{xy}^3g_{xxxy}g_{yy} - 12g_{xx}^2g_{xxy}^2g_{yy} + 39g_{xx}g_{xy}g_{yy}g_{xy}g_{xxy} + 3g_{xx}g_{xy}g_{yyy}g_{xxx}g_{yy} \\
& - 8g_{xy}^4g_{xxy} - 4g_{xx}g_{xy}g_{yy}^2g_{xxx} + 35g_{xx}^2g_{xy}g_{yyy}g_{xxy} - 26g_{xx}g_{xy}^2g_{yyy}g_{xxy} \\
& + 7g_{xxx}g_{yy}^2g_{xy}g_{xxy} - 10g_{xy}^2g_{xxy}g_{xxx}g_{yy} + 4g_{xx}g_{xxy}g_{yy}g_{xy}^2 - 2g_{xx}^2g_{xxy}g_{yyy}g_{yy} \\
& - 12g_{xx}^2g_{xy}g_{xy}g_{yy} - 4g_{xy}g_{xxy}g_{yy}^2g_{xxx} - 18g_{xy}^2g_{xxy}g_{yy} - 30g_{xy}^2g_{xxy}^2g_{xx} \\
& + 24g_{xy}^3g_{xy}g_{xxy} + 4g_{xx}^2g_{xxy}g_{yy}^2 + 4g_{xxx}g_{xy}^3g_{yyy} + 12g_{xx}g_{xy}^3g_{xy} - 3g_{xxy}^2g_{yy}^2g_{xxx} \\
& - 7g_{xx}^3g_{yyy} + 4g_{xx}^3g_{yyy}g_{yy} - 4g_{xx}^2g_{yyy}g_{xy}^2.
\end{aligned}$$

Observemos que ao trabalharmos com o *método direto* temos um enorme número de derivadas e isso acarreta erros numéricos. O que pode ser visto claramente nas expressões do cálculo dos coeficientes b_{ij} antes e depois da transformação (seção 3.3.2).