



**Lis Ingrid Roque Lopes Custódio**

**Extensões de Coordenadas Baricêntricas Para  
Deformação de Malhas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Sinesio Pesco  
Co-Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro  
Março de 2010



**Lis Ingrid Roque Lopes Custódio**

**Extensões de Coordenadas Baricêntricas Para  
Deformação de Malhas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sinesio Pesco**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Thomas Lewiner**

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Humberto José Bortolossi**

Departamento de Matemática – UFF

**Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Geovan Tavares**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 19 de Março de 2010

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Lis Ingrid Roque Lopes Custódio**

Graduou-se em Bacharel em Matemática na Universidade Federal Fluminense – UFF.

#### Ficha Catalográfica

R. L. Custódio , Lis Ingrid

Extensões de Coordenadas Baricêntricas Para Deformação de Malhas / Lis Ingrid Roque Lopes Custódio; orientador: Sinesio Pesco; co-orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2010.

v., 74 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Deformação de Malhas. 3. Coordenadas Baricêntricas. 4. Modelagem Geométrica. I. Pesco, Sinesio. II. Lewiner, Thomas. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

Devoto esta dissertação aos gigantes em minha vida. Aos meus pais, de quem obtive apoio e sobre os ombros cresci.

## Agradecimentos

A Deus, refúgio e fortaleza em todos os momentos.

Aos meus Ely e Maria Regina, e ao meu irmão Maicon por todo apoio e carinho dados.

Aos meus orientadores Professores Sinesio Pesco e Thomas Lewiner pelo apoio, simpatia de sempre, e incentivo para a realização deste trabalho.

Aos amigos por compreenderem as muitas ausências, em especial a Thais e Diana por demonstrarem preocupação e interesse quanto ao andamento desse trabalho e por todo apoio dado.

Aos professores do departamento de Matemática, pela acolhida durante o desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus colegas do laboratório Matmidia, por toda ajuda dada.

Aos meus colegas da PUC–Rio, quem me fizeram adorar esse lugar.

Aos funcionários do departamento de Matemática pela ajuda de sempre, em especial à Creuza e Kátia.

Ao CNPq, a CAPES e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

R. L. Custódio, Lis Ingrid; Pesco, Sinesio; Lewiner, Thomas.  
**Extensões de Coordenadas Baricêntricas Para Deformação de Malhas.** Rio de Janeiro, 2010. 74p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Dentro dos métodos de deformação de objetos tridimensionais, os que usam poliedros de controle permitem interações rápidas e intuitivas, e assim ganharam bastante interesse nos últimos anos. Essas técnicas expressam os pontos do objeto a partir dos vértices do poliedro de controle, por exemplo usando coordenadas baricêntricas e suas extensões. Assim, ao deformar o poliedro de controle, obtêm-se deformações correspondentes sobre o modelo recalculando cada ponto do objeto a partir das novas posições dos vértices de controle. Devido ao grau de flexibilidade em sua construção, diferentes generalizações de coordenadas baricêntricas vem sendo propostas nos últimos anos para modelos 3D. Nesse trabalho apresentamos um estudo das recentes generalizações de coordenadas baricêntricas e as principais características das deformações em modelos em três dimensões obtidas com o uso de cada uma delas. Deduzimos desse estudo uma nova extensão de coordenadas baricêntricas que mantém a simplicidade do método original e corrige alguns dos seus defeitos.

## Palavras-chave

Deformação de Malhas. Coordenadas Baricêntricas. Modelagem Geométrica.

## Abstract

R. L. Custódio, Lis Ingrid; Pesco, Sinesio; Lewiner, Thomas. **Extensions of Barycentric coordinates for Mesh Deformation.** Rio de Janeiro, 2010. 74p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Within the three-dimensional objects deformation techniques, the ones using control polyhedrons allow fast and intuitive interaction, and therefore gained considerable interest in recent years. Those techniques write the model points as function of the vertices of the control polyhedron, for example using barycentric coordinates or its extensions. This way, deforming the control polyhedron induces a corresponding strain on the model, recomputing each point of the object from the new positions of control vertices. To do so, due to the flexibility in its construction, different generalizations of barycentric coordinates has been proposed in recent years for 3D models. In this work, we present a study of recent generalizations of barycentric coordinates and the main characteristics of the resulting deformations of three-dimensional model. We deduce from this study a new extension of barycentric coordinates that retains the simplicity of the original method and fixes some of the its defects.

## Keywords

Mesh Deformation. Barycentric Coordinates. Geometric Modeling.

# Sumário

1	Introdução	<b>9</b>
1.1	Motivação	9
1.2	Trabalhos Anteriores	11
1.3	Contribuição	12
1.4	Divisão da Dissertação	12
2	Coordenadas Baricêntricas e Extensões	<b>14</b>
2.1	Coordenadas Baricêntricas em Simplexos	14
2.2	Suavidade Harmônica	16
2.3	Algumas Construções de Coordenadas Baricêntricas	16
3	Uso de Coordenadas Baricêntricas para Deformação de Modelos 3D	<b>29</b>
3.1	Construção do Poliedro de Controle	32
3.2	Obtenção das Coordenadas	33
3.3	Influência dos Pesos e Principais Características das Deformações Obtidas por cada Método	34
3.4	Implementação de Métodos em Duas Dimensões	40
4	Modificação das Coordenadas do Valor Médio	<b>44</b>
4.1	Distância Interior	47
4.2	Uso de Distância Interior na Construção das Coordenadas do Valor Médio	50
4.3	Resultados	52
5	Comparações e Resultados	<b>54</b>
5.1	Comparações	54
5.2	Resultados	61
6	Conclusão e Trabalhos Futuros	<b>71</b>
	Referências Bibliográficas	<b>73</b>

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Motivação

O uso de técnicas de computação gráfica mudou o mundo dos desenhos animados. Nas técnicas recentes, personagens, cenários e acessórios são criados através do escaneamento de modelos em três dimensões ou então são modelados em 3D diretamente no computador. Uma vez produzidos computacionalmente os modelos, temos uma estrutura constituída por pontos em três dimensões que chamamos de *malha* (ver figura 1.1). Assim, a animação é gerada ao produzirmos movimentos e deformações sobre a estrutura dessa malha.

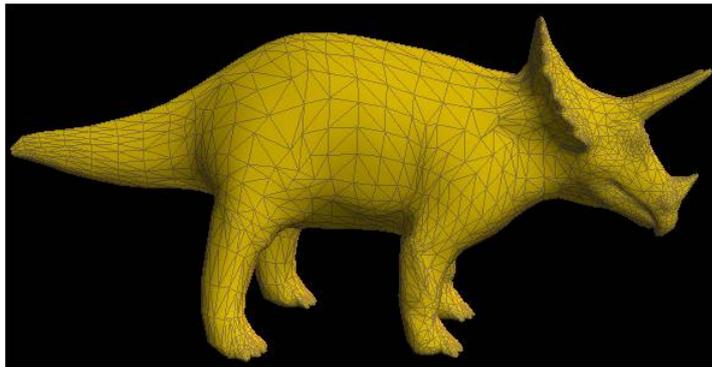


Figura 1.1: Malha de um modelo em três dimensões.

Geralmente modelos como os vistos em filmes de animação tem milhares de pontos e gerar deformações manipulando-os diretamente não se torna uma tarefa muito fácil. Poder lidar com um número reduzido de pontos torna o processo menos trabalhoso. Isso é possível através da técnica de deformação baseada em *poliedros de controle*. Envolvermos o modelo em uma malha com forma semelhante, mais simples, com menos vértices que chamaremos de poliedros de controle. Escrevemos os pontos do modelo em função dos elementos do poliedro de controle através de algum sistema de coordenadas. E, ao deformarmos o poliedro de controle, obtemos deformações sobre o modelo. Observe na figura 1.2, que o uso do poliedro de controle permite manipular, com um pequeno número de vértices, regiões do modelo com dezenas de pontos.

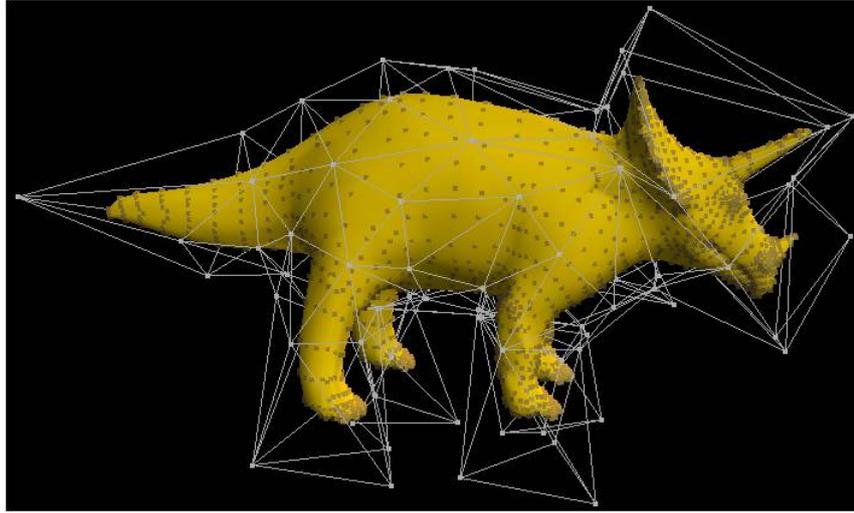


Figura 1.2: Modelo envolvido por um poliedro de controle.

Por suas propriedades, usamos extensões de coordenadas baricêntricas para escrever os pontos do modelo em função dos pontos do poliedro de controle. As coordenadas baricêntricas  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de um ponto  $v_0$  no interior de uma região  $P$ , polígonos em  $\mathbb{R}^2$  e poliedros em  $\mathbb{R}^3$ , com  $n$  vértices, são tais que:

$$\lambda_i \geq 0, \quad (1-1)$$

é possível obter coordenadas negativas se considerarmos pontos fora da região  $P$ , mas para nosso propósito isso não é necessário.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad (1-2)$$

onde  $n$  é o número de vértices da fronteira de  $P$ .

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = v_0, \quad (1-3)$$

onde  $v_i$  são os vértices da fronteira de  $P$ .

Observe que para simplexos, triângulos em  $\mathbb{R}^2$  e tetraedros em  $\mathbb{R}^3$ , o sistema de coordenadas formado pelas equações (1-2) e (1-3) tem solução única. Existe assim, para cada ponto em seu interior, uma única forma de escrevê-lo. Quando temos, por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  um polígono com mais de três vértices, o sistema se torna *possível e indeterminado*, podendo existindo infinitos conjuntos de coordenadas capazes de representar um mesmo ponto.

Podemos interpretar a coordenada  $\lambda_i$  como a influência do vértice  $v_i$  sobre o ponto  $v_0$ . Ao procurarmos formas de estender coordenadas baricêntricas para

não simplexos, procuramos uma forma de propagar a influência de um vértice na fronteira  $\partial P$  da região  $P$  para seu interior, de forma que essa influência seja propagada suavemente. Ou seja, definindo sobre  $\partial P$  a função  $f$  como sendo a função identidade, procuramos uma função suave  $u$  no interior de  $P$  tal que  $u$  seja igual a  $f$  para todo ponto sobre  $\partial P$ . Essa suavidade é obtida ao impormos que  $u$  seja uma função harmônica. Em outras palavras, procuramos por formas de obter uma função  $u$  definida em  $P$ , tal que  $u$  seja solução do *problema de Dirichlet* no interior da região  $P$ , sendo a condição de fronteira a função identidade.

$$\nabla^2 u(v) = 0, \quad v \in \text{int}(P) \quad e \quad u(v) = f(v), \quad v \in \partial P. \quad (1-4)$$

## 1.2

### Trabalhos Anteriores

Podemos observar nos últimos anos um crescente interesse no uso de poliedros de controle em técnicas de deformação de modelos em três dimensões. Diferentes métodos vêm sendo adotados para se obter coordenadas com as quais é possível representar um ponto do modelo como combinação linear dos elementos do poliedro de controle.

Em 2005 Ju et al. (7) e Floater et al. (4), estenderam para malhas triangulares as coordenadas obtidas por Floater em 2003 (3) em polígonos, uma generalização de coordenadas baricêntricas derivadas do teorema do valor médio para funções harmônicas. As coordenadas obtidas são não negativas apenas para poliedros de controle convexos e no núcleo de poliedros de controle não convexos, sendo o núcleo de um poliedro de controle a região dos pontos onde os segmentos de reta entre um ponto e os vértices do poliedro de controle não interceptam as faces desse poliedro.

Em 2007 Joshi et al. (5), através da solução numérica da equação de Laplace no interior do poliedros de controle, obteve uma generalização de coordenadas baricêntricas, construindo coordenadas estritamente positivas. A solução da equação de Laplace é obtida sobre as células de um gride regular construído de forma a envolver o poliedro de controle. Essa necessidade de discretização do domínio torna a construção das coordenadas um processo lento e que necessita de grande quantidade de memória.

Também em 2007, Lipman et al. (9), propôs a construção de coordenadas derivadas do teorema do valor médio estritamente positivas, respeitando a visibilidade de um ponto no interior do poliedro de controle. Desta forma, pontos no interior do poliedro de controle são escritos em função apenas

dos pontos de controle visíveis a ele. Todo ponto no interior terá como poliedro de controle um poliedro de controle convexo, evitando assim as coordenadas negativas apresentadas em (7). O critério de visibilidade do ponto faz com que poliedros de controle diferentes sejam tomados para a obtenção das coordenadas de pontos de um mesmo modelo, fazendo com que, em algumas regiões do modelo, pontos relativamente próximos, tenham poliedros de controle diferentes, comprometendo a suavidade das coordenadas.

Em 2008 Lipman et al. (10) construiu coordenadas motivadas pela terceira identidade de Green, escrevendo um ponto no interior do poliedro de controle em função de seus vértices e faces. Tornando possível a obtenção de deformações conformes em duas dimensões e quase conformes em três dimensões.

### 1.3

#### Contribuição

Nessa dissertação estudamos três dos quatro métodos citados na seção anterior, apresentados nos artigos: *Mean Value coordinates for closed triangular meshes* (7), *Harmonic coordinates for character articulation* (5), e *Green coordinates* (10), analisando o processo de construção das coordenada e as deformações obtidas. O processo de construção de cada coordenada é abordado detalhadamente e as deformações obtidas por cada método são analisadas destacando pontos não apresentados nos artigos citados.

Propomos um método de construção de coordenadas derivadas do teorema do valor médio que amenizam os problemas causados nas deformações obtidas com as coordenadas originais (7), devido a sua negatividade. Apresentaremos um processo de construção que não necessita da discretização do domínio e não compromete a suavidade das coordenadas.

Comparamos as três coordenadas estudadas, juntamente com a obtida através da nossa proposta de modificação, em relação à alteração de volume, área, ângulo diedral e curvatura Gaussiana. Critérios que permitem analisar o comportamento local e global das deformações obtidas por cada método.

### 1.4

#### Divisão da Dissertação

No capítulo 2 definimos coordenadas baricêntricas em duas e três dimensões e abordamos as construções de extensões para não simplexes, apresentadas nos artigos citados. No capítulo 3 abordamos a construção de um método de deformação baseado em poliedro de controle e analisamos as deformações obtidas com cada coordenada estudada. No capítulo 4 apresenta-

mos uma proposta de modificação no processo de construção das coordenadas apresentado em (7), com o objetivo de diminuir os problemas apresentados no método original. No capítulo 5 apresentamos comparamos entre métodos abordados.

## 2

### Coordenadas Baricêntricas e Extensões

Dado um ponto  $v_0$  no interior de uma região, vamos expressá-lo como combinação linear de um conjunto de pontos  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , pertencentes a fronteira dessa região,

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \quad (2-1)$$

Os números  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são as coordenadas do ponto  $v_0$  em relação aos pontos  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Quando essas coordenadas são todas não negativas, denominamos os  $\lambda_i$  de Coordenadas Baricêntricas.

#### 2.1

##### Coordenadas Baricêntricas em Simplexos

No triângulo podemos definir as Coordenadas Baricêntricas de um ponto como a única solução do sistema de equações (2-1). As coordenadas baricêntricas em relação aos vértices desse triângulo representam a influência de cada vértice sobre o ponto dado e podem ser obtidas através de razões entre áreas.

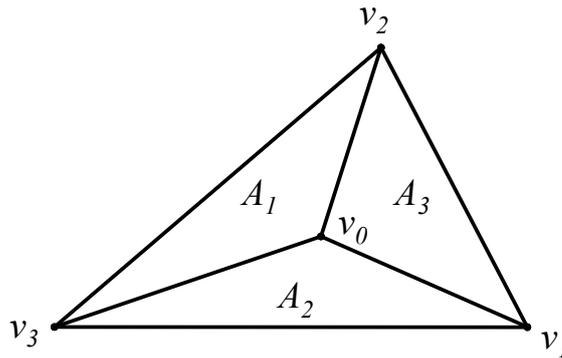


Figura 2.1: Representação das áreas  $A_1, A_2$  e  $A_3$  utilizadas, para a obtenção das coordenadas dos vértices  $v_1, v_2$  e  $v_3$  em relação ao ponto  $v_0$ .

Dado um ponto  $v_0$  no interior de um triângulo  $t = [v_1, v_2, v_3]$  (ver figura 2.1), as coordenadas baricêntricas de  $v_0$  em relação aos vértices desse triângulo  $t$  são

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A_t}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{A_t}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A_t}, \quad (2-2)$$

sendo  $A_i$  a área do triângulo formado pelo ponto  $v_0$  e os vértices pertencentes a aresta de  $t$  oposta a  $v_i$ . E  $A_t = A_1 + A_2 + A_3$  a área total do triângulo  $t$ .

Em três dimensões podemos definir Coordenadas Baricêntricas com respeito a um tetraedro  $T = [v_1, v_2, v_3, v_4]$  como a única solução do sistema de equações (2-1) (ver figura 2.2).

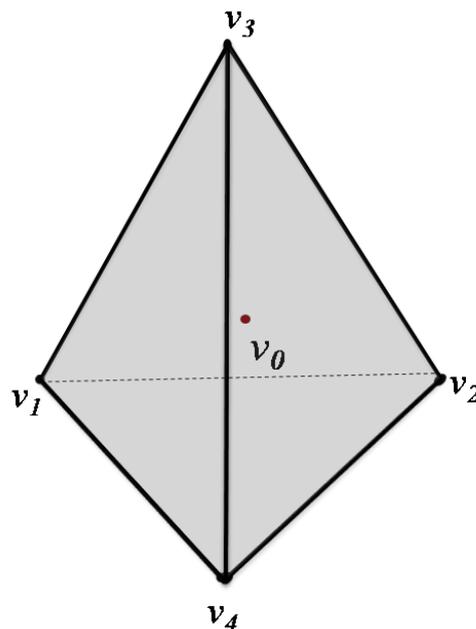


Figura 2.2: Um ponto  $v_0$  no interior da região limitada pelo tetraedro  $T$  de vértices  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ .

Similarmente ao caso de duas dimensões, podemos obter as Coordenadas Baricêntricas do ponto  $v_0$  em relação aos vértices do tetraedro  $T$ , através de razões entre volumes:

$$\lambda_1 = \frac{V_1}{V_T}, \quad \lambda_2 = \frac{V_2}{V_T}, \quad \lambda_3 = \frac{V_3}{V_T}, \quad \lambda_4 = \frac{V_4}{V_T}, \quad (2-3)$$

sendo  $V_i$  o volume do tetraedro formado pelo ponto  $v_0$  e os vértices pertencentes a face de  $T$  oposta a  $v_i$ . E  $V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$  o volume total do tetraedro  $T$ .

Para triângulos em  $\mathbb{R}^2$  e tetraedros em  $\mathbb{R}^3$ , o sistema de equações (2-1) tem solução única, pois o número de incógnitas é igual ao número de equações. Quando temos, por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  um polígono com mais de três vértices o sistema de equações (2-1) se torna *possível e indeterminado*, pois seu número

de incógnitas é maior do que o número de equações, podendo existir infinitos conjuntos de coordenadas para o ponto  $v_0$ . Observe que o mesmo acontece em  $\mathbb{R}^3$  para poliedros com mais de quatro vértices.

Um problema que vem recebendo considerável atenção nos últimos anos é, como generalizar Coordenadas Baricêntricas para esses casos. Nesse capítulo abordaremos alguns métodos de extensão de coordenadas baricêntricas, que buscam estender de forma suave a *influência* de um vértice para o interior de uma região.

## 2.2

### Suavidade Harmônica

Seja  $P$  uma região fechada em  $d$  dimensões com uma fronteira linear por partes, denotemos essa fronteira por  $\partial P$ . Temos uma função contínua  $f$  definida na fronteira  $\partial P$ , a função identidade, e procuramos uma extensão suave  $u$  de  $f$  no interior de  $P$ . Essa suavidade é geralmente interpretada impondo que  $u$  seja harmônica, ou seja, ao impormos que  $u$  seja uma solução da equação de Laplace no interior de  $P$ :

$$\nabla^2 u(v) = 0. \quad (2-4)$$

Então, procuramos uma função  $u$  definida em  $P$ , tal que

$$\nabla^2 u(v) = 0, \quad v \in \text{int}(P) \quad e \quad u(v) = f(v), \quad v \in \partial P. \quad (2-5)$$

Achar uma função  $u$  com as condições como as dadas acima é chamado de *Problema de Dirichlet*, neste capítulo abordaremos métodos que buscam estender a *influência* de um vértice da fronteira da região  $P$  para o seu interior satisfazendo as tais condições.

## 2.3

### Algumas Construções de Coordenadas Baricêntricas

#### 2.3.1

##### Coordenadas do Valor Médio

Dado um ponto  $v_0$  no interior de  $P$ , uma das formas de determinar  $u(v_0)$ , proposta por Floater (3), é usar o fato de funções harmônicas obedecerem o Teorema do Valor Médio no interior de  $P$ .

### Coordenadas do Valor Médio em Duas Dimensões

Considere  $P$  uma região do plano limitada por um polígono fechado que chamaremos de polígono de controle. Denotemos por  $B(v_0, r)$  a bola centrada no ponto  $v_0$  e raio  $r$ .

**Teorema 2.3.1 (Teorema do Valor Médio Circunferencial)** *Seja  $P \subset \mathbb{R}^2$  uma região conexa,  $u$  uma função harmônica em  $P$  e  $B = B(v_0, r) \subset P$  com fronteira  $\Gamma$ , então*

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\Gamma} u(v) ds. \quad (2-6)$$

Dem: ver o livro de *Sheldon* (2).

Considere o triângulo  $T_i = [v_0, v_i, v_{i+1}]$  (ver figura 2.3) e seja  $\Gamma_i$  o arco de  $\Gamma$  contido em  $T_i$ , assim a equação (2-6) pode ser escrita da forma

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} u(v) ds \quad (2-7)$$

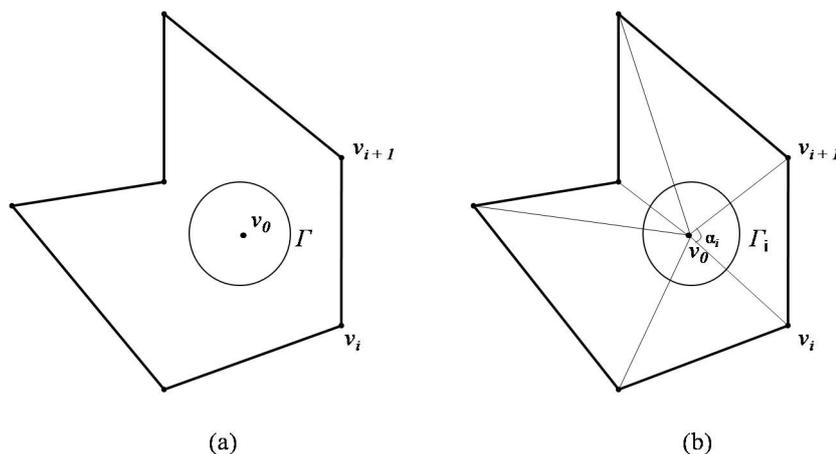


Figura 2.3: (a) Circunferência  $\Gamma$  centrada em  $v_0$ , no interior de região  $P$ . (b) Triangularização de região  $P$ .

**Lema 2.3.2** *Se  $f : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função linear e  $\alpha_i$  o ângulo entre os vértice  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , então*

$$\int_{\Gamma_i} f(v) ds = r\alpha_i f(v_0) + r^2 \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \left( \frac{f(v_i) - f(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{f(v_{i+1}) - f(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right) \quad (2-8)$$

Dem: ver o artigo de *Floater* (3).

Com o lema 2.3.2 podemos reescrever a equação (2-7), com a notação  $v_{n+1} = v_1$ :

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{i=1}^n \left( r\alpha_i u(v_0) + r^2 \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right) \right)$$

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i u(v_0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n r \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

Como  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$ ,  $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i u(v_0) = u(v_0)$

$$0 = \frac{r}{2\pi} \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{u(v_{i+1}) - u(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right) + \sum_{i=2}^{n+1} \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_i}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right) + \sum_{i=1}^n \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \left( \frac{u(v_i) - u(v_0)}{\|v_i - v_0\|} \right)$$

onde  $\alpha_0 = \alpha_n$ .

$$u(v_0) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} u(v_i) \right) \quad (2-9)$$

E assim temos,

$$w_i = \left( \frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right), \quad u(v_0) \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n w_i u(v_i). \quad (2-10)$$

Escrevendo  $\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ , temos

$$u(v_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(v_i). \quad (2-11)$$

Observe que, tomando a função  $u$  como a identidade,  $\lambda_i$  serão as coordenadas baricêntricas do ponto  $v_0$  em relação aos vértices  $v_i$  pertencentes a fronteira da região  $P$ .

### Interpretação Geométrica

A chave para a derivação das *coordenadas de valor médio* está no fato que a integral das normais unitárias sobre uma bola é igual a zero. Comprovamos isso reescrevendo o Teorema do Valor Médio. Partindo desse ponto, podemos dar uma interpretação geométrica para as coordenadas de valor médio.

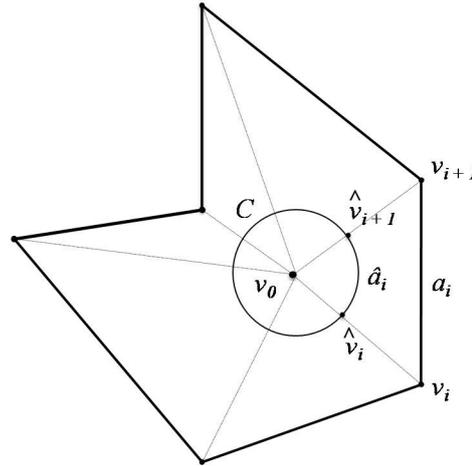


Figura 2.4: Projeção da aresta  $a_i$  sobre a circunferência  $C$ .

Defina os vetores unitários  $e_i = (v_i - v_0)/r_i$ , onde  $r_i = \|v_i - v_0\|$ . Os novos pontos  $\hat{v}_i = v_0 + e_i$  estão sobre uma circunferência unitária  $C$  centrada em  $v_0$ , e a projeção em relação a  $v_0$  de uma aresta  $a_i$  sobre  $C$  é um arco  $\hat{a}_i$  com extremidades  $\hat{v}_i$  e  $\hat{v}_{i+1}$  (ver figura 2.4).

Visto que a normal  $n(v)$  apontando para fora sobre a circunferência  $C$  em qualquer ponto  $v \in C$  é dada por  $v - v_0$ , temos

$$0 = \int_C n(v) ds = \int_C v - v_0 ds = \sum_{a_i \in A} \int_{\hat{a}_i} v - v_0 ds \quad (2-12)$$

onde  $A$  é o conjunto de todas as arestas do polígono.

A integral sobre cada aresta projetada define um vetor  $m_i = \int_{\hat{a}_i} v - v_0 ds$  (ver figura 2.5), que chamaremos de Vetor Médio, e podemos escrevê-lo em função dos vetores unitários  $e_i$

$$m_i = \mu_{i,i} e_i + \mu_{i+1,i} e_{i+1}, \quad (2-13)$$

onde  $\mu_{i,j}$  representa a contribuição do vetor unitário  $e_i$  para o Vetor Médio  $m_j$ . Da mesma forma temos,

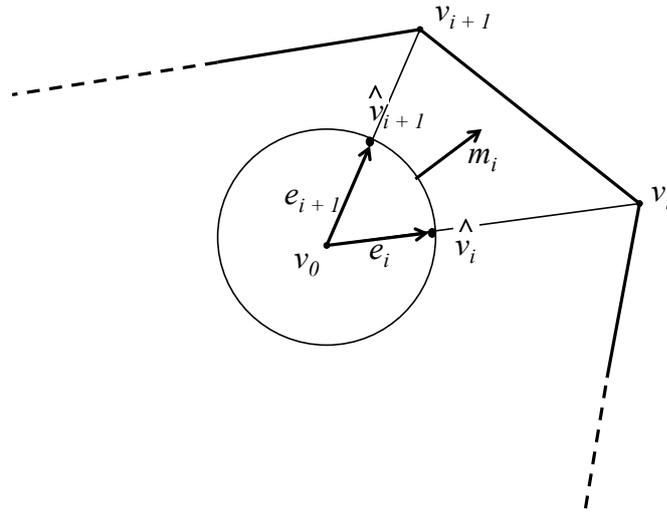


Figura 2.5: Vetor  $m_i$ , resultante da integral das normais unitárias sobre o arco de circunferência  $\hat{a}_i$ .

$$m_{i-1} = \mu_{i-1,i-1}e_{i-1} + \mu_{i,i-1}e_i \quad (2-14)$$

E o peso de um vértice  $v_i$  será a soma das suas contribuições para a representação dos vetores  $m_{i-1}$  e  $m_i$ , assim temos:

$$0 = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \mu_{i,i}e_i + \mu_{i+1,i}e_{i+1} = \sum_{i=1}^n \mu_{i,i} \frac{v_i - v_0}{\|v_i - v_0\|} + \mu_{i+1,i} \frac{v_{i+1} - v_0}{\|v_{i+1} - v_0\|} \quad (2-15)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n w_i(v_i - v_0), \quad w_i = \frac{1}{r_i}(\mu_{i,i} + \mu_{i+1,i}) \quad (2-16)$$

onde

$$\mu_{i,i-1} = \tan\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2}\right) \quad e \quad \mu_{i,i} = \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (2-17)$$

E segue que

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (2-18)$$

### Coordenadas do Valor Médio em Três Dimensões

Consideremos uma região do espaço cuja fronteira  $\partial P$ , um poliedro, é uma malha triangular fechada (ver figura 2.6).

**Teorema 2.3.3 (Teorema do Valor Médio Sólido)** *Suponha  $P \subset \mathbb{R}^3$ ,  $u$  uma função harmônica em  $P$  e  $B = B(v_0, r) \subset P$  com fronteira  $S$*

$$u(v_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S u(v) ds \quad (2-19)$$

Dem: ver o livro de *Sheldon* (2).

Para a construção das coordenadas de valor médio em três dimensões vamos, como na seção anterior, observar que reescrevendo o teorema acima caímos no fato de a integral de todas as normais unitárias, dessa vez sobre a esfera, ser igual a zero.

Defina os vetores unitários  $e_i$  e os pontos  $\hat{v}_i$  como na seção anterior, onde os pontos  $\hat{v}_i$  estão sobre uma esfera unitária  $E$  centrada em  $v_0$ , e  $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$  a projeção em relação a  $v_0$  de cada face  $t = [v_i, v_j, v_k]$  do poliedro de controle (ver figura 2.7).

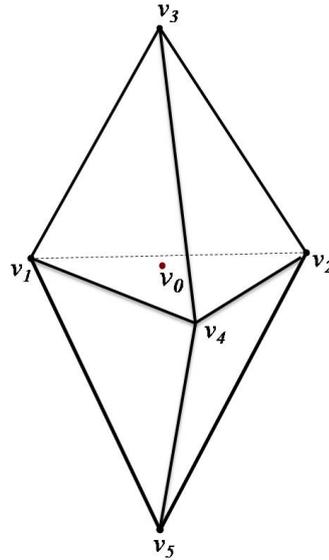


Figura 2.6: Um ponto  $v_0$  no interior da região limitada pelo poliedro de vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  e  $v_5$ .

Visto que a normal unitária  $n(v)$  sobre  $E$  para qualquer ponto  $v \in E$  é simplesmente  $v - v_0$ , temos

$$0 = \int_E n(v) ds = \int_E (v - v_0) ds = \sum_{t \in T} \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds, \quad (2-20)$$

onde  $T$  é o conjunto de todas as faces do poliedro de controle.

Análogo ao caso em duas dimensões, a integral sobre cada face projetada define um vetor  $m_t = \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds$ .

Assim como em duas dimensões, podemos escrever o vetor  $m_t$  como combinação linear dos vetores unitários

$$m_t = \int_{\hat{t}} (v - v_0) ds = \mu_{i,t} e_i + \mu_{j,t} e_j + \mu_{k,t} e_k. \quad (2-21)$$

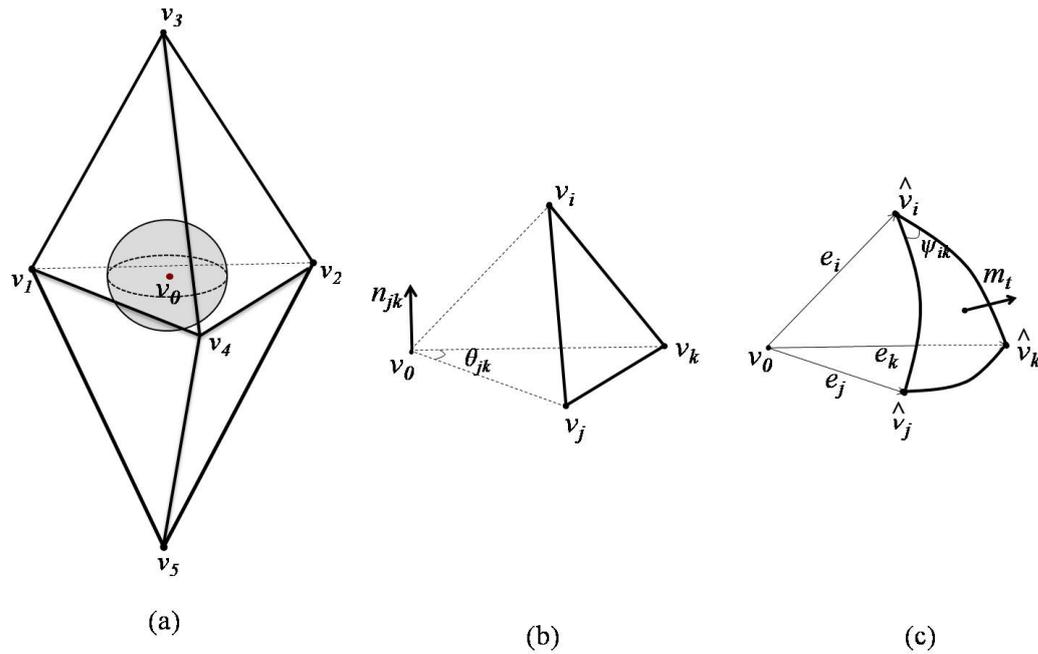


Figura 2.7: (a) Esfera centrada no ponto  $v_0$ , no interior de região  $P$ . (b) Em destaque, o ponto  $v_0$  e uma face  $t = [v_i, v_j, v_k]$  do poliedro  $\partial P$ . (c) Em destaque, o ponto  $v_0$ , a projeção  $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$  da face  $t$  sobre a esfera e o vetor  $m_t$ , resultante da integral das normais unitárias sobre  $\hat{t}$ .

Como alternativa ao cálculo da integral na equação (2-20), considere a superfície  $S$  formada pela interseção do tetraedro de vértices  $v_0, v_i, v_j$  e  $v_k$  com a esfera  $E$ . A superfície  $S$  é formada por quatro faces, o triângulo esférico  $\hat{t} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$  e três faces planas  $f_{ij}, f_{jk}$  e  $f_{ki}$ , setores circulares (veja figura 2.7(c)).

Como  $S$  é uma superfície fechada, então:

$$\int_{\hat{t}} n(v) + \int_{f_{ij}} n(v) + \int_{f_{jk}} n(v) + \int_{f_{ki}} n(v) = 0, \quad v \in S. \quad (2-22)$$

E segue que

$$\int_{\hat{t}} n(v) = - \int_{f_{ij}} n(v) - \int_{f_{jk}} n(v) - \int_{f_{ki}} n(v). \quad (2-23)$$

Dessa forma podemos obter o valor da integral  $\int_{\hat{t}} n(v)$  já que a normal  $n(v)$  é constante sobre cada face plana da superfície  $S$ . E, como os vetores  $e_i, e_j$  e  $e_k$ , são unitários, a área do setor circular é dada pela metade do ângulo entre suas arestas, assim:

$$m_t = \int_{\hat{t}} n(v) = \frac{1}{2}(\theta_{ij}n_{ij} + \theta_{jk}n_{jk} + \theta_{ki}n_{ki}), \quad (2-24)$$

onde  $n_{ij}$  é a normal unitária da face  $f_{ij}$  apontando para dentro.

As equações (2-21) e (2-24) fornecem duas formas de expressar o vetor  $m_t$ , igualando essas duas equações e observando que  $n_{jk} \cdot e_j = n_{jk} \cdot e_k = 0$ , temos

$$\mu_{i,t} = \frac{\theta_{jk} + \theta_{ij}n_{ij}n_{jk} + \theta_{ki}n_{ki}n_{jk}}{2e_i n_{jk}}. \quad (2-25)$$

Uma vez calculados os coeficientes  $\mu_{i,t}$ ,  $\mu_{j,t}$  e  $\mu_{k,t}$ , voltemos a equação (2-20),

$$0 = \sum_{t \in T} \int_{\hat{t}} (v - v_0) = \sum_{t \in T} m_t = \sum_{t \in T} \mu_{i,t} e_i + \mu_{j,t} e_j + \mu_{k,t} e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t} e_i \quad (2-26)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t} e_i = \sum_{i=1}^n w_i (v_i - v_0), \quad (2-27)$$

onde

$$w_i = \frac{1}{r_i} \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t}. \quad (2-28)$$

E segue que

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (2-29)$$

### Não Negatividade das Coordenadas

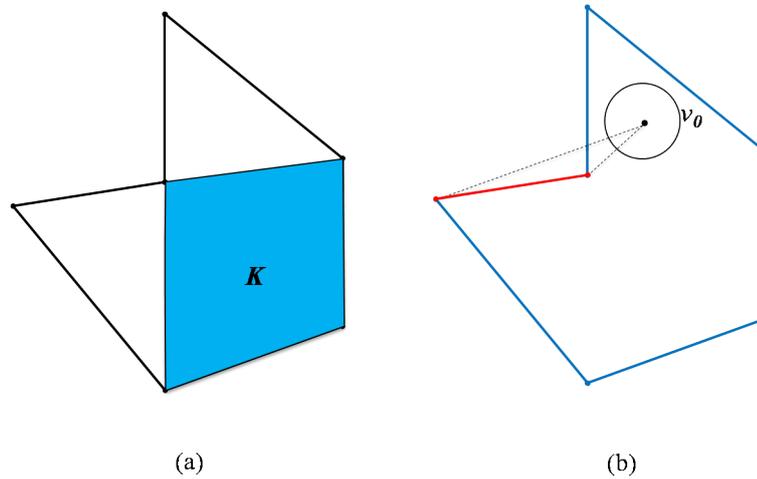


Figura 2.8: (a) Em azul o núcleo  $K$  da região  $P$ , região onde os segmentos de reta  $pv_i$ ,  $p$  um ponto pertencente ao núcleo e  $v_i$  vértices do polígono, não interceptam as arestas do polígono. (b) Um ponto  $v_0$  não pertencente a  $K$ , tendo como consequência a projeção contrária da aresta em vermelho.

A não negatividade das coordenadas do valor médio é comprometida quando  $P$  é uma região não convexa. Essa limitação em regiões não convexas,

para um ponto fora do núcleo é devido ao fato de projetarmos as faces da fronteira sobre uma bola centrada nesse ponto, e como podemos observar na figura 2.8(b), algumas faces são projetadas com orientação contrária. Dessa forma a normal à essas faces são projetadas apontando para o interior da esfera, gerando assim contribuição negativa para as coordenadas de seus vértices.

### 2.3.2

#### Coordenadas Harmônicas

As *coordenadas harmônicas* são definidas por Joshi et al. (5) diretamente como solução de equação de Laplace no interior da região  $P$

$$\nabla^2 u(v) = 0 \quad v \in \text{int}(P), \quad (2-30)$$

sujeita a uma determinada condição de fronteira.

Vamos considerar primeiramente a construção das coordenadas harmônicas em duas dimensões. Seja  $P$  uma região limitada em  $\mathbb{R}^2$  cuja fronteira  $\partial P$  é formada por um polígono. Procura-se uma solução direta ao problema de Dirichlet. Para isso, é preciso definir a condição de fronteira. A proposta de Joshi et al. é definir essa condição pelo mesmo problema de Dirichlet de dimensão um. Para cada vértice  $v_i \in \partial P$  procuramos uma função  $h_i$  definida em  $P$  tal que

$$\nabla^2 h_i(v) = 0, \quad v \in \text{Int}(P) \quad e \quad h_i(v) = \phi_i(v), \quad v \in \partial P, \quad (2-31)$$

onde  $\phi_i(v)$  é a função linear por partes definida em  $\partial P$  tal que  $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$ , ou seja  $\phi_i(v_j)$  é igual a 1 se  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ . No polígono da figura (2.9(a)), por exemplo, a função  $\phi_i(\partial P)$  está definida sobre as arestas  $a_1, \dots, a_6$  de forma que  $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$  para  $i = 1, \dots, 6$ .

Observe que a função  $\phi_i(v)$ , definida sobre as arestas do polígono, é dada por uma solução da equação de Laplace em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 \phi_i(v)}{\partial v^2} = 0, \quad v \in \partial P. \quad (2-32)$$

Procuramos a solução da equação de Laplace em  $\partial P$  cuja condição de fronteira imposta sobre os vértices  $v_i, i = 1, \dots, 6$  é dada por:

$$\phi(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ou seja,  $\phi_i$  é a função que interpola linearmente os valores 1 no vértice  $v_i$  e 0 nos vértices  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  (ver figura 2.9(b)). Voltando para duas dimensões,

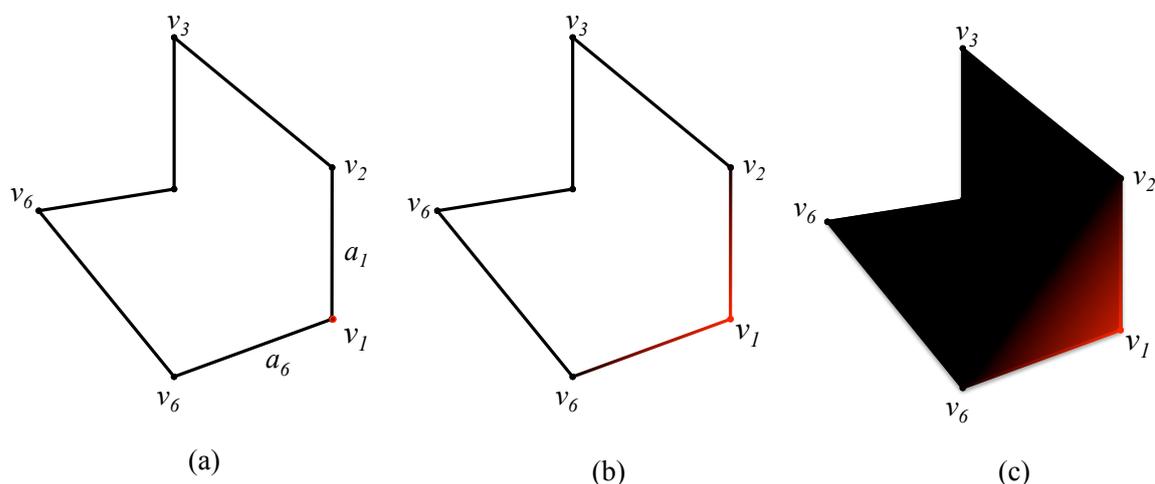


Figura 2.9: Comportamento da função  $h_1$ , que representa a influência do vértice  $v_1$ , sobre (a) os vértices, (b) as arestas e (c) no interior do poliedro  $\partial P$ .

uma vez definida a condição de fronteira  $\phi_i(v)$ , obtemos a solução da equação de Laplace no interior de  $P$

$$\begin{cases} \nabla^2 h_i(v) = 0, & v \in \text{Int}(P) \\ h_i(v) = \phi_i(v) & \text{if } v \in \partial P \end{cases}$$

através de diferenças finitas em um gride regular. Dado um ponto  $v_0 \in \text{int}(P)$ ,  $h_i(v_0)$  representa o peso do vértice  $v_i$  em relação ao ponto  $v_0$ . A função  $h_i(v)$ ,  $v \in \text{int}(P)$  representa a propagação da influência do vértice  $v_i$  no interior do polígono (ver figura 2.9(c)).

Passemos então para a construção das coordenadas em três dimensões. Considere  $P$  uma região limitada em  $\mathbb{R}^3$  cuja fronteira é um poliedro de faces não necessariamente triangulares. Procuramos uma solução da equação de Laplace no interior desse poliedro cuja a condição de fronteira é obtida de forma análoga a duas dimensões. Começamos obtendo a solução da equação de Laplace sobre as arestas desse poliedro, ou seja, uma função que interpola linearmente os valores 1 no vértice  $v_i$  e 0 nos vértices pertencentes a sua estrela, obtendo assim a condição de contorno para a solução da equação de Laplace definida no interior das faces desse poliedro.

A solução de equação de Laplace sobre as faces desse poliedro será a condição de fronteira para uma função harmônica definida no interior da região  $P$ , essa função representa a propagação da influencia do vértice  $v_i$  no interior do poliedro (ver figura 2.10). Como em duas dimensões, essa solução é obtida através de diferenças finitas em um gride regular.

E assim, dado um ponto  $v_0$  no interior de  $P$ , podemos escrevê-lo da seguinte forma.

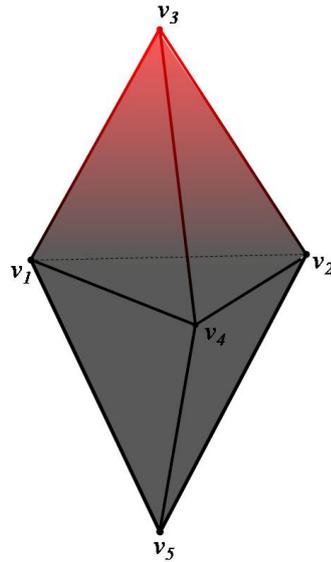


Figura 2.10: Influência do vértice  $v_3$  na região limitada pelo poliedro.

$$v_0 = \sum_{i=1}^n h_i(v_0)v_i \quad (2-33)$$

### 2.3.3 Coordenadas de Green

As *coordenadas de Green* são motivadas por Lipman et al. (10) pela terceira identidade de Green, sendo solução fundamental da equação de Laplace. Diferente das coordenadas obtidas nas sessões anteriores, onde apenas os vértices da fronteira eram usados para expressar um ponto no interior, as coordenadas de Green levam em consideração a orientação das faces pertencentes a fronteira  $\partial P$ .

Seja  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ , onde  $k$  é o número de faces de  $\partial P$ , o conjunto das faces de  $\partial P$ : arestas em 2D e triângulos em 3D. Denote por  $n(f_j)$  a normal unitária da face  $f_j$  orientada para fora.

Assim cada ponto interior  $v_0 \in \text{int}(P)$  é representado como combinação linear

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j n(f_j), \quad (2-34)$$

Seja  $G$  a função de Green, solução fundamental da equação de Laplace

$$G(v, v_0) = \begin{cases} \frac{1}{(2-d)A_d} \|v - v_0\|^{2-d}, & d \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|v - v_0\|, & d = 2 \end{cases}$$

onde  $A_d$  é a área de um esfera unitária em  $\mathbb{R}^d$ , e  $v_0 \in \text{int}(P)$ . Pela terceira identidade de Green, podemos expressar  $u(v_0)$  em função dos valores da função  $u$  e das normais na fronteira da região  $P$ .

$$u(v_0) = \int_{\partial P} \left( u(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} - G(v, v_0) \frac{\partial u(v)}{\partial n(v)} \right) dv \quad (2-35)$$

onde  $n$  é a normal orientada para fora sobre  $\partial P$  e  $dv$  é o elemento de área em  $\partial P$ .

Tomando a função  $u$  como a função identidade, obtemos

$$v_0 = \int_{\partial P} \left( v \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} - G(v, v_0) \frac{\partial v}{\partial n(v)} \right) dv \quad (2-36)$$

Reescrevermos então, a equação acima fazendo a integral sobre a fronteira  $\partial P$  como a soma das integrais sobre as faces  $f_j$ . Sendo a fronteira  $\partial P$  formada em duas dimensões, por arestas e em três dimensões por triângulos, temos  $n(v)$  constante sobre cada face  $f_j$ , logo temos  $\partial v / \partial n(v) = \partial v / \partial n(f_j) = n(f_j)$ .

$$v_0 = \sum_{f_j \in F} \left( \int_{f_j} v \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv - \int_{f_j} G(v, v_0) n(f_j) dv \right), \quad v_0 \in \text{int}(P) \quad (2-37)$$

Dado um ponto  $v$  sobre uma face  $f_j$ , podemos escrevê-lo em função dos vértices dessa face,  $v = \sum_{l=1}^d \omega_l v_l$ , sendo  $\omega_1, \dots, \omega_d$  as coordenadas baricêntricas de  $v$  em relação aos vértices de uma face  $f_j$ . Lembrando que essas coordenadas são únicas pois temos como faces arestas ou triângulos. Assim,

$$v_0 = \sum_{f_j \in F} \sum_{v_l \in V(f_j)} v_l \int_{f_j} \omega_l(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv - \sum_{f_j \in F} n(f_j) \left( \int_{f_j} G(v, v_0) dv \right) \quad (2-38)$$

onde  $V(f_j)$  é o conjunto dos vértices da face  $f_j$ .

E reorganizando a última equação, temos

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j n(f_j), \quad v_0 \in \text{int}(P), \quad (2-39)$$

onde  $\lambda_i$  e  $\gamma_j$  são:

$$\lambda_i = \int_{v \in N(v_i)} \omega_i(v) \frac{\partial G(v, v_0)}{\partial n(v)} dv, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2-40)$$

$$\gamma_j = - \int_{v \in f_j} G(v, v_0) dv, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2-41)$$

sendo  $N(v_i)$  a união de todas as faces no primeiro anel de vértices de  $v_i$ .

### Adaptações práticas

Fatores escalares  $\{s_j\}, j = 1, \dots, k$  são acrescentados, por Lipman et al. (10), à equação (2-39) com o objetivo de garantir algumas propriedades importantes, tal como invariância de escala. Dessa forma, através das coordenadas de Green, um ponto  $v_0$  no interior de uma região  $P$  é escrito em função dos elementos de fronteira  $\partial P$  de seguinte forma

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j s_j n(f_j). \quad (2-42)$$

Considere  $S_j$  e  $S'_j$  formados pela face  $f_j$  com o ponto  $v_j + n(f_j)$  e a face  $f'_j$  com o ponto  $v'_j + s_j n(f'_j)$ , respectivamente, onde  $v_j$  é um vértice da face  $f_j$  e  $f'_j$  é a face correspondente após a deformação do poliedro. O escalar  $s_j$  é definido de forma a minimizar a distorção de  $S_j$  a  $S'_j$ .

Ou seja,  $s_j$  representa o “alongamento” da face  $f_j$  a medida que o poliedro  $\partial P$  é deformado.

Em duas dimensões  $s_j$  fica bem definido pela razão entre o tamanho da aresta depois e antes da deformação no polígono.

$$s_j = \frac{\|f'_j\|}{\|f_j\|}. \quad (2-43)$$

Em três dimensões a distorção, em geral, não fica bem descrita por um único escalar. Uma sugestão é considerar  $s_j = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$ , onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os valores singulares do mapeamento linear que leva  $f_j$  em  $f'_j$ . Outra alternativa proposta em *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates* (11) é considerar

$$s_j = \frac{\sqrt{\|u'\|^2 \|v\|^2 - 2(u'v')(uv) + \|v'\|^2 \|u\|^2}}{\sqrt{8} \text{area}(f_j)}. \quad (2-44)$$

Onde  $u$  e  $v$  são vetores definidos pelas arestas de  $f_j$  e  $u'$  e  $v'$  os vetores definidos pelas arestas de  $f'_j$ .

### 3

## Uso de Coordenadas Baricêntricas para Deformação de Modelos 3D

Consideremos aqui um modelo em três dimensões definido por um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^3$ , ligados por arestas de forma a constituir polígonos disjuntos, geralmente triângulos. Essa estrutura geométrica é chamada de *malha*. Deformar um modelo dando a ele movimentos ou até mesmo alterando suas características, significa, de alguma forma, modificar a posição dos vértices dessa malha.

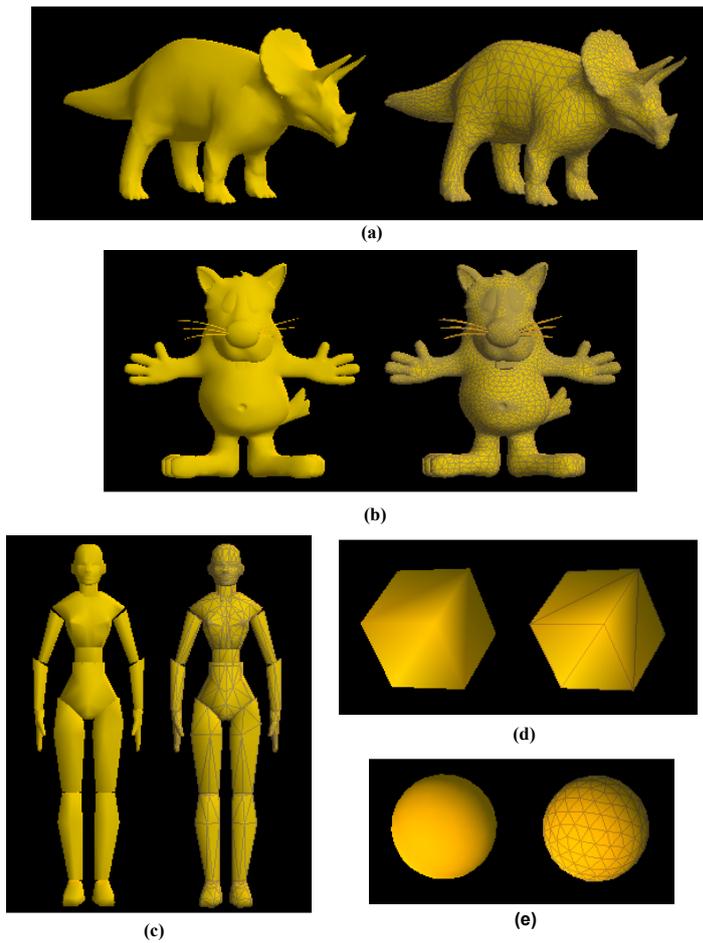


Figura 3.1: (a) Modelo Tricerátops: 2832 vértices. (b) Modelo Gato: 10401 vértices. (c) Modelo Mulher Robô: 1055 vértices. (d) Modelo Cubo: 8 vértices. (e) Modelo Esfera: 162 vértices.

Poderíamos pensar em deformar modelos 3D trabalhando diretamente com os vértices da malha, mas geralmente modelos, como os vistos em filmes de animação, tem milhares de vértices e gerar deformações diretamente nesses vértices não se torna uma tarefa muito fácil. Observe na figura 3.1 os modelos com os quais trabalharemos.

Uma técnica de deformação que vem atraindo bastante interesse é baseada em poliedros de controle: construímos uma malha simplificada de forma semelhante a do modelo, com menos vértices envolvendo o modelo (ver figura 3.2) e, por algum sistema de coordenadas, escrevemos cada vértice do modelo em função dos elementos (vértices, faces) dessa nova malha de controle.

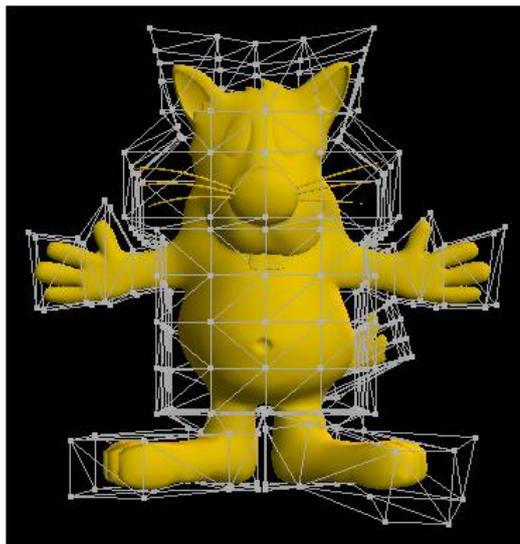


Figura 3.2: Poliedro de controle do modelo gato.

A malha envolvendo o modelo corresponde à fronteira  $\partial P$ , onde, no capítulo anterior, estudamos a obtenção de coordenadas para escrever pontos em seu interior em função de seus elementos. Vamos, desse ponto em diante, nos referir à fronteira  $\partial P$  da região  $P$  como *poliedro de controle* e a coordenada  $\lambda_i(v_0)$  do vértice  $v_i$  do poliedro de controle em relação a um ponto  $v_0$  em seu interior como *peso* do vértice  $v_i$  em relação a  $v_0$ .

Dado um ponto  $v_0$  no interior do poliedro de controle, em um sistema de coordenadas onde apenas os vértices  $v_i$  do poliedro de controle são considerados, escrevemos o ponto  $v_0$  em função dos vértices de controle por:

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i. \quad (3-1)$$

Ao deformarmos o poliedro de controle, com as novas posições  $\hat{v}_i$  de seus vértices, obtemos a nova posição do ponto  $v_0$  por:

$$\hat{v}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_i. \quad (3-2)$$

Dessa forma, ao manipularmos a malha envolvendo o modelo, geramos deformações em seu interior (ver figura 3.3).

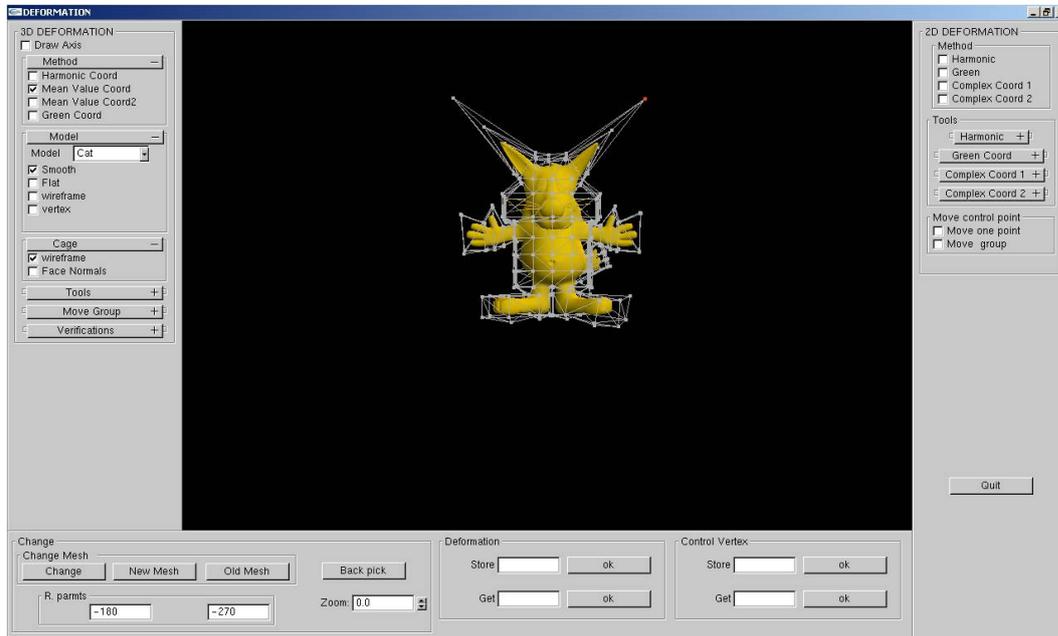


Figura 3.3: Deformação obtida no modelo gato com o uso da nossa plataforma de visualização e deformação de modelos.

Deformações baseadas em poliedro de controle são simples, flexíveis e rápidas, visto que as coordenadas  $\lambda_i$  são calculadas uma única vez. Uma vez calculadas as coordenadas, uma deformação no modelo é obtida seguindo o algoritmo ??.

**input** : Novas posições  $\hat{v}_j$  dos vértices de controle

**output**: Novas posições  $\hat{p}_i$  dos pontos do modelo

para cada ponto do modelo;

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $npoints$  **do**

$\hat{p}_i = 0$

para cada vértice de controle;

**for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $nvertices$  **do**

$\hat{p}_i = \hat{p}_i + \lambda_{ij} * \hat{v}_j$

**end**

**end**

**Algorithm 1**: Deforma o modelo a partir do novo poliedro de controle

Neste capítulo analisaremos a implementação, as deformações obtidas, as principais características, vantagens e desvantagens dos métodos de deformação de modelos em três dimensões utilizando as coordenadas apresentadas no capítulo anterior.

Independente das coordenadas utilizadas, métodos de deformação baseados em poliedros de controle possuem, de forma geral, os mesmos passos de implementação:

- Construção do poliedro de controle.
- Obtenção das coordenadas, para cada ponto  $p$  do modelo, o valor dos pesos  $\lambda_i(p)$ , dos elementos do poliedro de controle em relação a  $p$ .
- Representação dos pontos do modelo em função dos elementos do poliedro de controle através das coordenadas obtidas.

Durante o desenvolvimento desse trabalho construímos uma plataforma de visualização e deformação de imagens 2D e modelos 3D (ver figura 3.3). Utilizamos a estrutura de visualização dos modelos em três dimensões apresentada em Lage (8). As coordenadas abordadas no capítulo 2 foram implementadas para três dimensões e algumas delas para duas dimensões, como uma etapa intermediária na compreensão do método.

### 3.1

#### Construção do Poliedro de Controle

O primeiro passo para implementação de métodos de deformação baseados em poliedros de controle é construir uma malha relativamente simples, em relação a malha do modelo a ser deformado, que possua forma semelhante a do modelo, de forma a envolvê-lo. Para modelos formados por uma malha única, como o modelo triceratops e o modelo esfera, uma maneira simples, que não exige muita experiência com programas de manipulação de modelos em três dimensões, é simplificar a malha do modelo e inflá-la, multiplicando cada um de seus vértices por uma constante na direção do vetor normal (ver figura 3.4). Após isso, quando necessário, modificamos manualmente a posição de alguns vértices da malha. Para modelos com regiões distintas muito próximas, como o modelo gato (ver figura 3.1(b)), inflar a malha simplificada de uma forma que regiões não se auto-intersectem não é uma tarefa fácil. Outro caso onde o método descrito acima não é indicado é o de modelos formados por malhas desconexas, como o modelo mulher Robô (ver figura 3.1(c)). Para modelos como esses, optamos pela utilização do programa *Blender* (1) para construção do poliedro de controle. Para modelos simples, como o cubo, utilizamos como poliedro de controle a malha de um cubo com as coordenadas dos vértices igual as coordenadas do *bounding box* do modelo acrescido de uma constante.

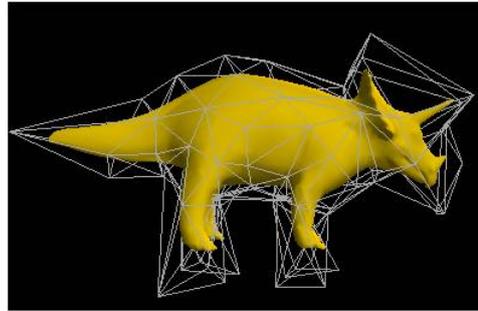


Figura 3.4: Poliedro de controle do modelo triceratops.

## 3.2

### Obtenção das Coordenadas

Como vimos no capítulo anterior, as coordenadas do valor médio e as coordenadas de Green possuem fórmulas fechadas para a obtenção de seus pesos. Assim a construção de suas coordenadas se resume aos pré cálculos necessários para se obter o valor das equações (2-28) e (2-40), (2-41), respectivamente.

Já as coordenadas harmônicas, como mencionado no capítulo anterior, são derivadas diretamente como solução da equação de Laplace. Para cada vértice  $v_i$  do poliedro de controle obtemos uma solução da equação de Laplace  $h_i$  no interior do poliedro de controle, onde a condição de fronteira inicial é uma função definida sobre os vértices de controle, igual a 1 em  $v_i$  e 0 em  $v_j$ ,  $j \neq i$ . E um ponto  $v_0$ , no interior do poliedro de controle é escrito como:

$$v_0 = \sum_{i=1}^n h_i(v_0)v_i. \quad (3-3)$$

Como mencionado no capítulo anterior, as soluções  $h_i$  da equação de Laplace são obtidas através de diferenças finitas. Para isso construímos um gride envolvendo o modelo e o poliedro de controle, e classificamos as células desse gride como células no exterior, fronteira ou interior em relação ao poliedro de controle. Na figura 3.5 podemos observar a classificação das células de um gride em duas dimensões. O gride é construído sobre a imagem *tabuleiro de xadrez*. Em vermelho as células do gride próximas do polígono de controle, em azul as células em seu interior e em branco, as células no exterior. De forma análoga obtemos a classificação das células de um gride em três dimensões, onde a fronteira é dada pelo poliedro de controle envolvendo o modelo.

Após a classificação das células do gride, obtemos a solução da equação de Laplace sobre o poliedro de controle e associamos esse valor às células do gride classificadas como células de fronteira. Em seguida o valor de função  $h_i$  é estendido para as células de interior através de médias sucessivas. O valor de

$h_i$  em uma célula de interior será dado pela média dos valores de  $h_i$  em suas células vizinhas. Esse processo variacional é repetido até que a alteração no valor de  $h_i$  em uma célula de interior seja suficientemente pequeno. Usamos como critério de parada em nossa implementação  $|h_i(c)_m - h_i(c)_{m+1}| < 10^{-6}$ . Observe que as funções  $h_i$  estão definidas sobre as células do gride e não sobre os vértices do modelo, para obter o valor de  $h_i$  sobre os vértices do modelo interpolamos de forma trilinear o valor da função  $h_i$  nas oito células do gride mais próximas de cada vértice do modelo.

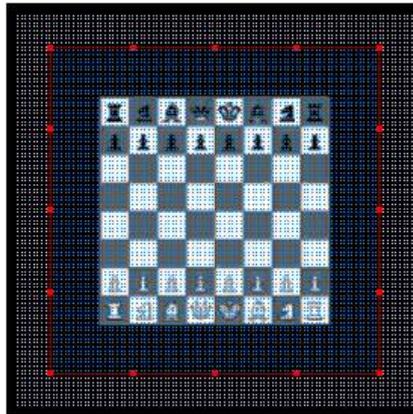


Figura 3.5: Classificação das células de um gride em duas dimensões. Em vermelho as células de fronteira, em azul as células de interior e em branco as células de exterior.

### 3.3

#### Influência dos Pesos e Principais Características das Deformações Obtidas por cada Método

Uma vez que, para cada ponto do modelo, os pesos em relação aos elementos do poliedro de controle (vértices para o caso das coordenadas do valor médio e coordenadas harmônicas e, vértices e faces no caso das coordenadas de Green) foram obtidos, é possível escrever cada ponto em função dos elementos do poliedro de controle. Dessa forma, quando deformamos o poliedro de controle, dando uma nova posição para seus vértices e faces, uma nova posição para os pontos do modelo é obtida.

Para cada uma das coordenadas abordadas, uma mesma deformação no poliedro de controle gera diferentes deformações no modelo, conseqüência do diferente comportamento da influência de um vértice em cada uma das coordenadas apresentadas. Nesta seção abordaremos o comportamento da influência de um vértice de controle e as deformações obtidas de cada coordenada apresentada no capítulo anterior.

### 3.3.1 Coordenadas do Valor Médio

Com as coordenadas do valor médio a influência de um vértice do poliedro de controle em relação aos pontos do modelo é local, diminuindo rapidamente à medida que nos afastamos. O comportamento da influência de um vértice de controle pode ser observado na figura 3.6, onde representamos a influência dos vértices de controle destacados. Em vermelho a região do modelo de maior influência, passando rapidamente para o amarelo, região do modelo onde a influência é muito próxima de zero (aproximadamente  $10^{-4}$ ).

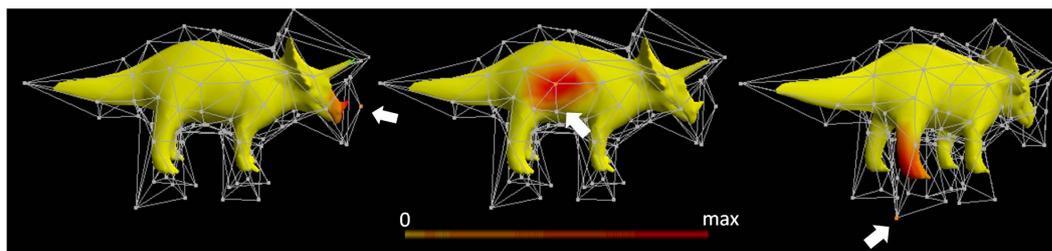


Figura 3.6: Influência dos vértices com as coordenadas do valor médio.

Essa influência local dos vértices, somada a invariância afim gera, em algumas deformações um efeito que lembra a dobra de uma folha de papel, efeito não desejado quando queremos, por exemplo, simular o balançar da cauda do modelo Triceratops. Observe na figura 3.7 que a deformação realizada no poliedro de controle é totalmente refletida no modelo sem que a forma do modelo seja respeitada.

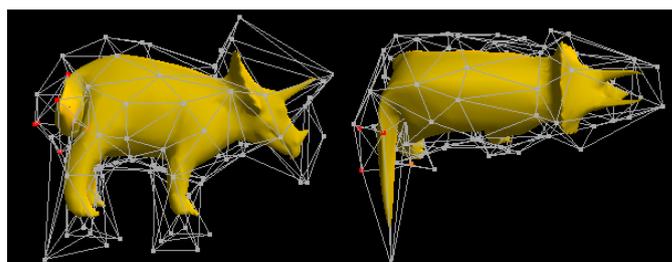


Figura 3.7: Efeito dobra.

Outra característica importante nas deformações obtidas com as coordenadas do valor médio vem do fato da propriedade de *não negatividade* não ser satisfeita para poliedros de controle não convexos, como visto no capítulo anterior. O problema da negatividade de alguns pesos é agravado com o uso da distância euclidiana para calcular a influência de um vértice, permitindo

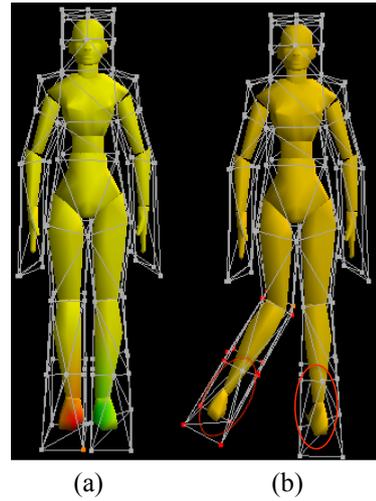


Figura 3.8: (a) Influência positiva (região vermelha) e negativa (região verde) do vértice laranja. (b) Consequência dos pesos negativos e uso da distância euclidiana nas coordenadas do valor médio.

que vértices de controle não diretamente relacionados a uma região tenham grande influência sobre ela. Dessa forma, as deformações geradas apresentam resultados indesejáveis em algumas regiões do modelo. Observe na figura 3.8 que ao movimentarmos a região do poliedro de controle relacionada à perna direita, obtemos deformações inesperadas em ambas as pernas do modelo. No próximo capítulo abordaremos melhor esse problema.

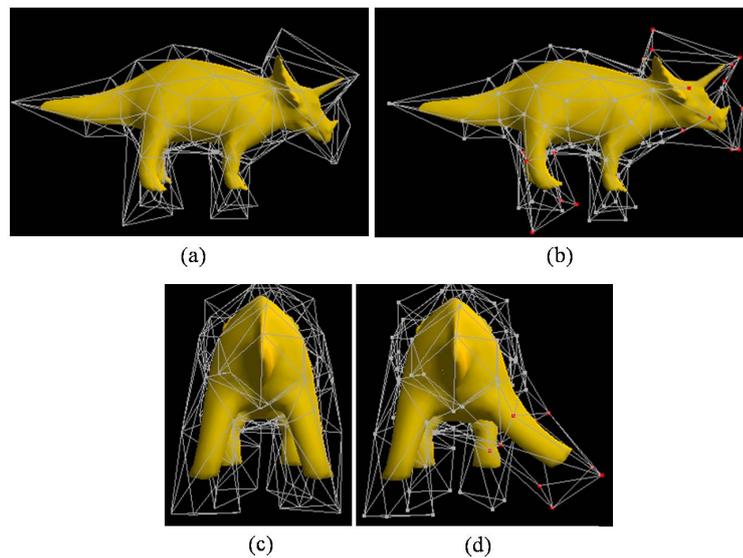


Figura 3.9: (a) Modelo e poliedro de controle originais. (b) Deformações no modelo na região da cabeça e pata traseira. (c) Modelo e poliedro de controle originais. (d) Deformações no modelo na região da pata traseira direita.

Apesar disso, observamos em nossos experimentos que a influência local

dos vértices de controle torna as deformações com as coordenadas do valor médio bastante intuitivas para modelos onde regiões distintas não se encontram muito próximas. Como podemos observar na figura 3.9, com as deformações obtidas no modelo triceratops, as deformações realizadas no poliedro de controle são refletidas para o modelo de forma a obtermos as deformações esperadas.

### 3.3.2

#### Coordenadas Harmônicas

Além de positividade, vista no capítulo anterior, outra característica das coordenadas harmônicas está no fato de um vértice de controle ter influência apenas em regiões do modelo “diretamente relacionadas” a ele (ver figura 3.10). Dado um vértice  $v_i$  do poliedro de controle, uma vez obtido o valor da função  $h_i$  sobre as células do gride pertencentes a fronteira, esse valor é estendido para as células do interior através de sucessivas medias, dessa forma a propagação da influência do vértice  $v_i$  respeita um caminho tomado no interior do poliedro de controle.

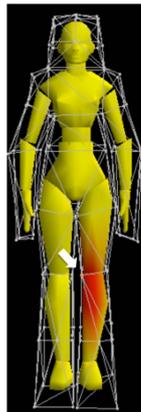


Figura 3.10: Influência do vértice laranja com as coordenadas harmônicas.

Essa forma com que a influência de um vértice de controle é propagada torna as deformações com coordenadas harmônicas bastante intuitivas. Tornando possível, por exemplo, simular movimento como o caminhar do modelo Mulher. Na figura 3.11(b) é possível observar que as deformações que realizamos no poliedro de controle foram refletidas para o modelo de forma a obtermos a deformação que desejávamos. Assim como nas coordenadas do valor médio, a invariância por transformações afins provoca, em algumas deformações o efeito *dobra*, mencionado anteriormente. Observe na figura 3.11(b) que, ao tentarmos flexionar um pouco mais o joelho do modelo temos refletida na modelo a *dobra* realizada no poliedro de controle.

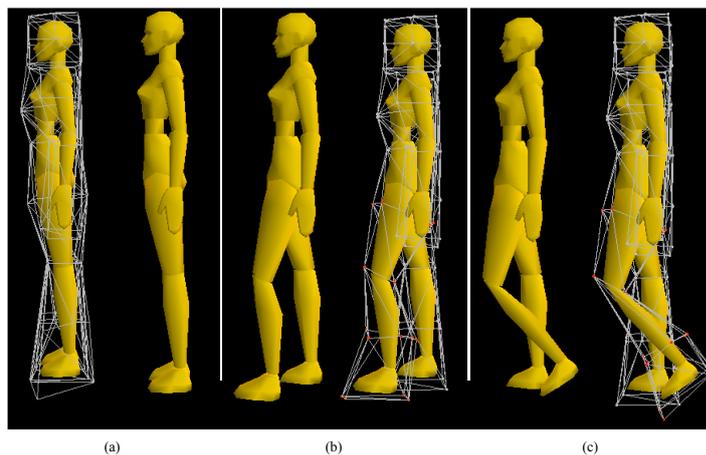


Figura 3.11: (a) Modelo e poliedro de controle originais. (b) Deformações com coordenadas harmônicas.

### 3.3.3 Coordenadas de Green

Tanto coordenadas do valor médio quanto as coordenadas harmônicas são invariantes por transformações afins. Assim, uma transformação afim realizada no poliedro de controle é reproduzida no modelo. Tais transformações incluem translações e escalas não isotrópicas que podem violar a forma do modelo.

Nos métodos anteriores um ponto do modelo é expresso como combinação afim apenas dos vértices do poliedro de controle, através do operador.

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad (3-4)$$

onde cada eixo é tratado de forma independente dos outros. Por exemplo, a translação em relação ao eixo  $x$  não tem efeito sobre os eixos  $y$  e  $z$ .

Transformações que preservam a forma, também chamadas de *mapeamentos conformes*, são mapeamentos suaves cujas matrizes Jacobianas são apenas rotações e escalas isotrópicas, o que não ocorre com as coordenadas do valor médio e coordenadas harmônicas. Para construir coordenadas que preservam a forma do modelo, precisamos de um operador diferente ao da equação (3-4). Como visto no capítulo anterior, com as coordenadas de Green escrevemos um ponto no interior do poliedro de controle em função de seus vértices e das normais de suas face, possibilitando assim transformações quase conformes em três dimensões.

$$v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j n(f_j), \quad (3-5)$$

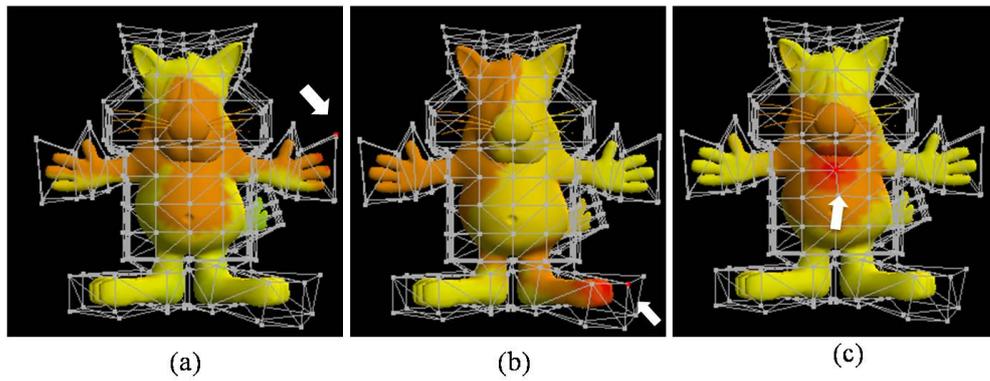


Figura 3.12: Influência dos vértices de controle em laranja, com as coordenadas de Green.

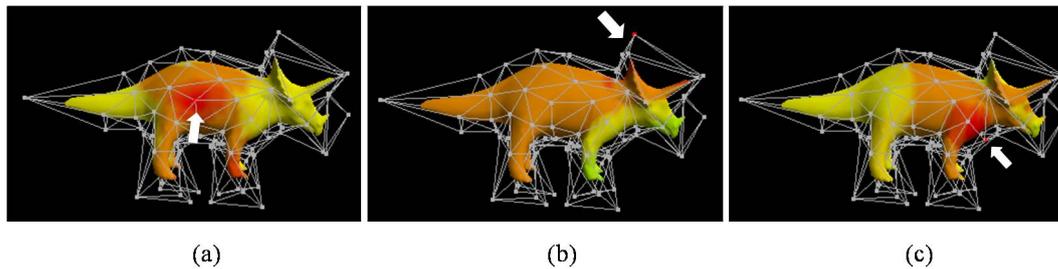


Figura 3.13: Influência dos vértices de controle em laranja, com as coordenadas de Green.

Nas coordenadas de Green a influência dos vértices e faces é dada de forma global, como podemos observar nas figuras 3.12 e 3.13, a influência de alguns vértices de controle se estende pelo modelo alcançando regiões não diretamente relacionadas a ele. Esse comportamento global da influência de um vértice evita que o efeito *dobra*, observado nas deformações realizadas com os métodos anteriores, ocorra. Observe na figura 3.14 que a dobra realizada no poliedro controle não é refletida para a cauda do modelo, evitando o efeito dobra observado nas deformações geradas pelas outras coordenadas.

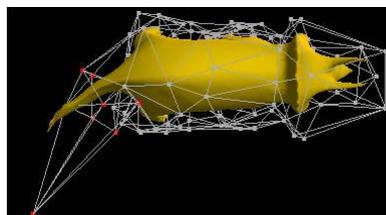


Figura 3.14:

Por outro lado, esse comportamento global da influência dos vértices faz com que o operador gerado pelas coordenadas de Green não tenha controle sobre todo o modelo quando uma deformação local é realizada. Ao deformarmos uma região do poliedro de controle relacionada a uma determinada região

do modelo, a deformação sobre essa região é obtida de forma a preservar a forma do modelo, como propõe o método. Observe na figura 3.15(b) que a deformação realizada no poliedro de controle chega a entrelaçar a sua malha, porém essa deformação não é totalmente refletida no modelo, fazendo com que a deformação obtida no modelo preserve a forma da pata do modelo gato. Mas, regiões do modelo não diretamente relacionadas à região do poliedro de controle deformada sofrem deformações indesejáveis. É possível observar que regiões distantes da região do poliedro de controle deformada também sofreram deformações, como a região destacada em vermelho. O mesmo acontece na figura 3.15(d), a deformação no poliedro de controle foi realizada de forma a esticar a pata superior esquerda do modelo, no entanto podemos observar deformações na pata inferior.

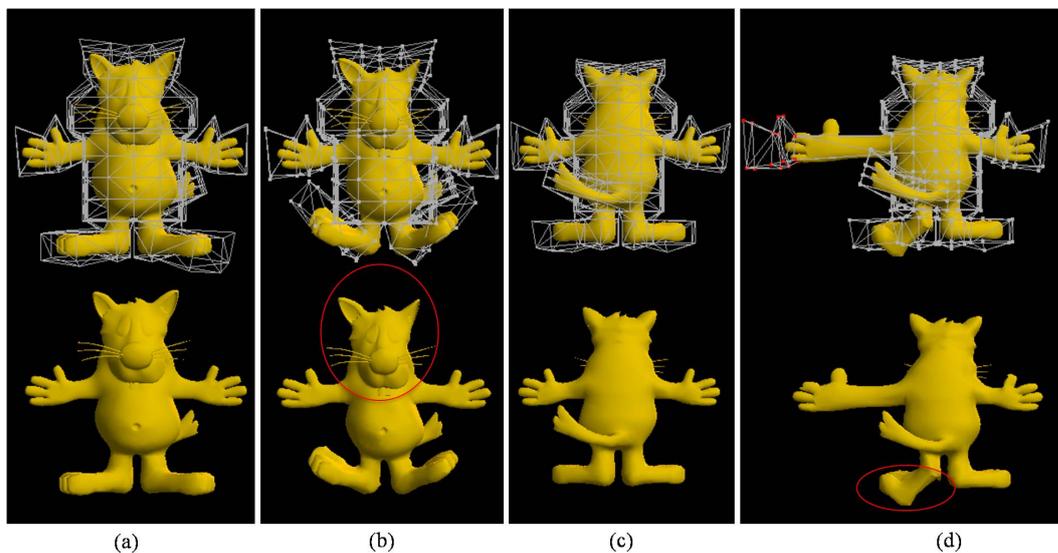


Figura 3.15: (a) Modelo e poliedro de controle originais. (b) Deformação na região das patas do modelo. (c) Modelo e poliedro de controle originais. (d) Deformação na pata esquerda do modelo.

### 3.4

#### Implementação de Métodos em Duas Dimensões

Como etapa inicial no estudo das coordenadas e sua construção, implementamos as coordenadas harmônicas e as coordenadas de Green, primeiramente, em duas dimensões, onde usamos as extensões de coordenadas baricêntricas para realizar deformações em imagens. Assim como no caso em três dimensões, independente das coordenadas usadas, métodos de deformação em duas dimensões possuem os mesmos passos de implementação.

- Construção do polígono de controle de controle.
- Obtenção das Coordenadas

- Representação da imagem em função dos elementos do polígono de controle.

O processo de obtenção das coordenadas em duas dimensões é análogo ao processo em três dimensões descrito na seção anterior, detalharemos a seguir a construção do polígono de controle e a representação da imagem em função das coordenadas obtidas.

### 3.4.1

#### Construção do polígono de controle

Em duas dimensões a fronteira da região a ser deformada é constituída por um polígono de forma semelhante à silhueta da imagem. O arquivo de entrada do polígono de controle é constituído por uma lista com as coordenadas dos vértices, precedida pelo número de vértices. Para imagens quadrangulares como o tabuleiro de xadrez optamos por construir manualmente uma lista de vértices (ver figura 3.16(a)). Para imagens como a do planeta terra, construímos o polígono de controle com vértices sobre uma circunferência (ver figura 3.16(b)). Para imagens onde a silhueta não possui forma semelhante a formas simples como quadriláteros e círculos, a forma usada para obter o polígono de controle foi: primeiramente construir uma lista de pontos em uma posição qualquer, para isso usamos a função para obter uma lista de pontos sobre a circunferência, em seguida com o *picking* implementado no programa, posicionamos os pontos de forma a obter um polígono de forma semelhante a silhueta da imagem (ver figura 3.16(c)).

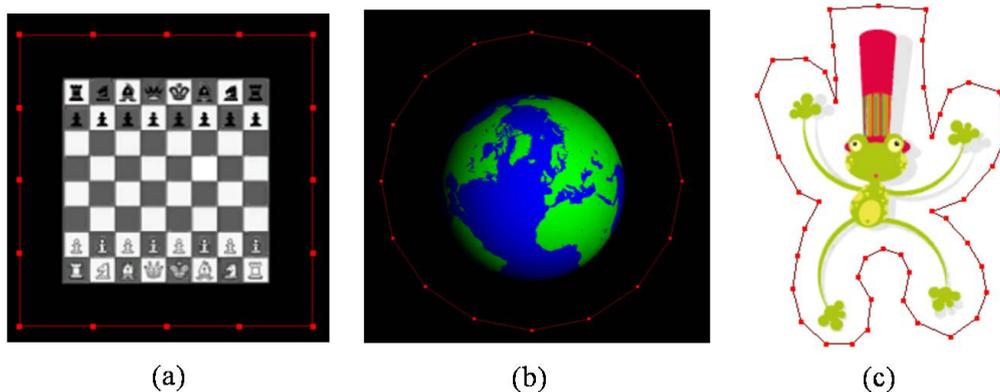


Figura 3.16: Imagens e polígonos de controle dos modelos trabalhados em duas dimensões.

### 3.4.2

#### Representação da imagem em função dos elementos do polígono de controle

Em duas dimensões a deformação é realizada sobre os pontos de um gride bidimensional (ver figura 3.17(a)). Calculamos, para cada ponto, suas coordenadas em relação aos elementos do polígono de controle. A imagem desejada é lida como textura e mapeada sobre o gride. É como se dividíssemos a imagem pelo número de células do gride e colássemos as partes obtidas sobre cada uma delas (ver figura 3.17(b)). Ao deformarmos o polígono de controle, a deformação é aplicada sobre os pontos do gride, modificando a forma de suas células. A parte da imagem contido em cada célula do gride é deformada através de interpolação bilinear da posição dos pontos dessa célula (ver figura 3.17(c)).

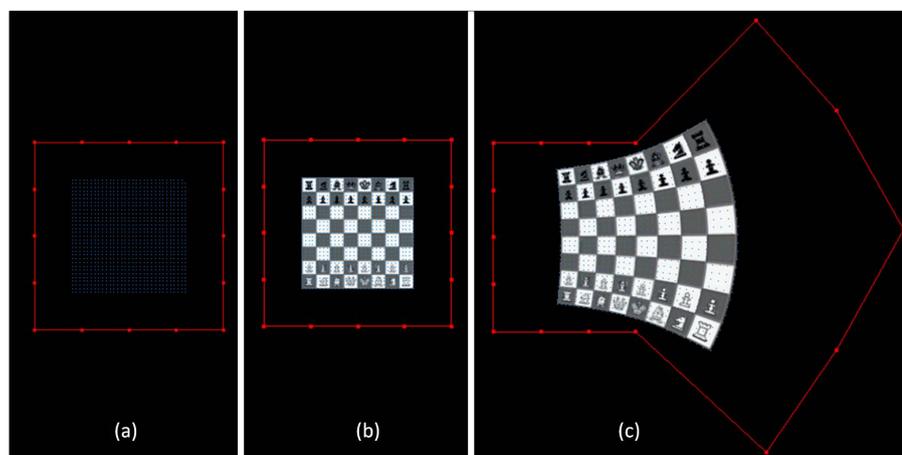


Figura 3.17: (a)Gride sobre o qual é realizada a deformação. (b) Mapeamento de imagem sobre o gride. (c)Deformação sobre as células do gride, refletida na imagem. Deformações obtidas com as coordenadas de Green.

Observe que, para as coordenadas harmônicas, a necessidade de um gride torna o processo de deformação em duas dimensões mais imediato, visto que o gride utilizado para a construção das coordenadas é o mesmo sobre o qual aplicamos a imagem. Na figura 3.18 temos alguns resultados obtidos com as coordenadas harmônicas em duas dimensões.

Aplicando as coordenadas de Green em duas dimensões podemos melhor observar a preservação da forma do objeto deformado, nos exemplos trabalhados. Observe que na figura 3.19 as deformações nos polígonos de controle das imagens *tabuleiro de xadrez* e *planeta terra* são iguais às realizadas na figura 3.18, no entanto as deformações que obtivemos com as coordenadas de Green preservam a forma das imagens. Observe na figura 3.19 que o ângulo

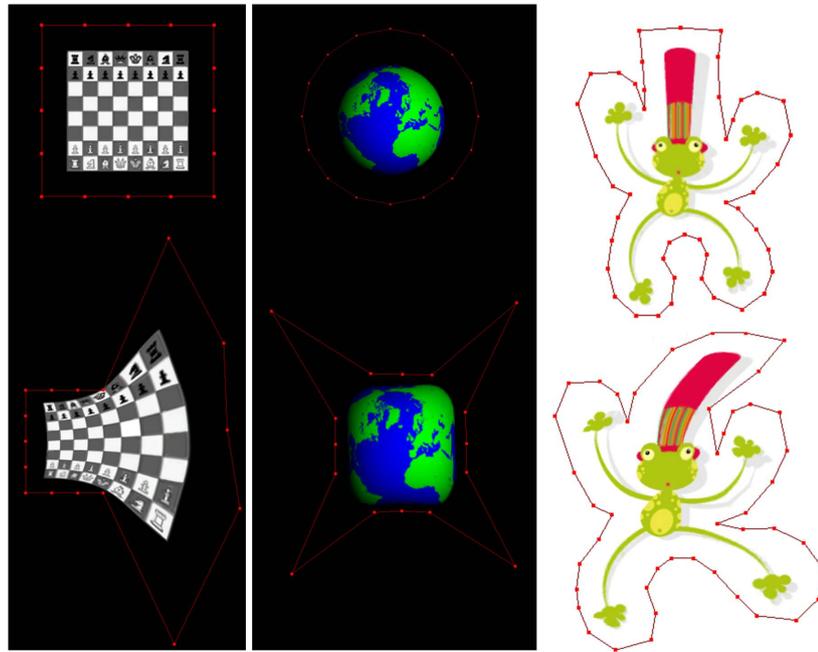


Figura 3.18: Deformações em duas dimensões com as coordenadas harmônicas.

nas casas do tabuleiro de xadrez tendem a se manter, mesmo em regiões onde a deformação no polígono de controle é feita na tentativa de violar a forma da imagem.

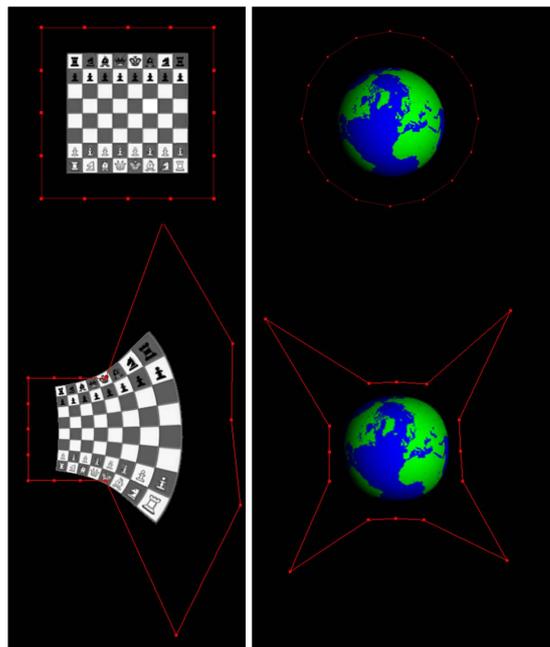


Figura 3.19: Deformações em duas dimensões com as coordenadas de Green.

## 4

### Modificação das Coordenadas do Valor Médio

Como vimos no capítulo 2, as coordenadas do valor médio, para poliedros não convexos, não satisfazem a propriedade de *Não Negatividade*, consequência direta da forma como as construímos. Em uma região  $P$  não convexa, ao projetarmos o poliedro de  $\partial P$  em uma bola centrada em um ponto pertencente a  $P$ , fora de seu núcleo, temos algumas faces projetadas com orientação contrária, como visto na figura 2.8(b). Essas faces contribuem negativamente para os pesos de seus vértices em relação ao vértice no interior da região  $P$ .

Por exemplo, na figura 4.1, o peso do vértice  $v_i$  em relação ao vértice  $v_0$  será dado pela integral das normais unitárias sobre as arestas incidentes (como definido na equação (2-15)), representadas pelas arestas vermelha e azul. A aresta em vermelho, que será projetada com orientação contrária, tem uma área de projeção maior sobre a circunferência centrada em  $v_0$  do que a aresta azul, que será projetada com a orientação correta, fazendo com que o peso do vértice  $v_i$  em relação ao ponto  $v_0$  seja negativo.

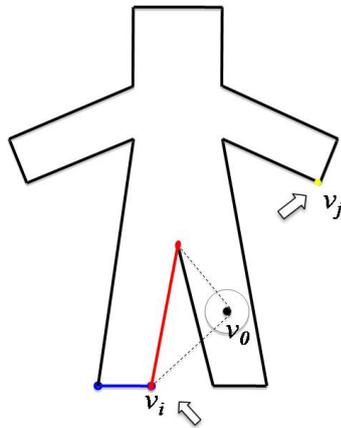


Figura 4.1: Poliedro de controle em duas dimensões. Em destaque, em azul e vermelho, as arestas incidentes ao vértice de controle  $v_i$ . A aresta em azul será projetada corretamente sobre a circunferência centrada no ponto  $v_0$ , enquanto a aresta em vermelho será projetada no sentido contrário.

É importante ressaltar que não apenas o vértice  $v_i$  terá peso negativo em relação a  $v_0$ . Na figura 4.1 podemos observar que o problema da projeção com orientação contrária irá ocorrer em outras arestas do poliedro de controle mas,

como a influência dos vértices é local, pontos como o vértice  $v_j$  destacado em amarelo, mesmo que tenham peso negativo em relação a  $v_0$ , estão suficientemente distantes de  $v_0$  e seu peso, mesmo que negativo, é muito próximo de zero.

Vamos analisar mais detalhadamente a consequência desses pesos negativos quando estamos usando as coordenadas do valor médio para deformar modelos em três dimensões, onde, na maioria das vezes, os poliedros de controle são não convexos. Na figura 4.2, destacamos a região de maior influência de um vértice de controle (vértice de cor laranja). A variação de cor do vermelho para o amarelo indica uma variação decrescente do peso, de positivo a zero, sendo em vermelho a região do modelo onde este vértice exerce maior influência positiva. Em verde, destacamos a variação da influência negativa sobre o modelo.

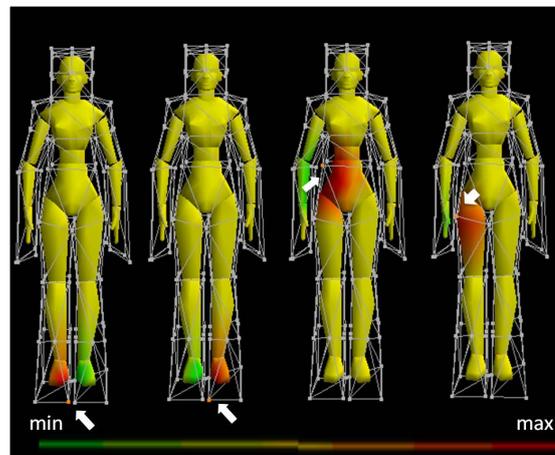


Figura 4.2: Regiões de influência dos vértices de cor laranja. Variando do vermelho para o amarelo, suas influências positivas e do verde para o amarelo suas influências negativas.

O problema de influência negativa de um vértice de controle é agravado pela distância euclidiana no cálculo dos pesos. Na figura 4.2, a direita, o vértice em laranja se encontra na região do poliedro de controle relacionada a perna esquerda do modelo, tendo influência positiva sobre essa região, no entanto esse mesmo vértice tem influência sobre uma região do modelo não visível a ele: a perna direita. Essa é uma das desvantagens das coordenadas do valor médio, quando temos poliedros de controle não convexos, alguns de seus vértices têm influência sobre regiões do modelo não diretamente relacionadas a ele e, devido a orientação da malha do poliedro de controle, essa influência é dada de forma negativa. Como consequência, ao movimentarmos a perna direita do modelo, parte da perna esquerda onde a influência negativa do vértice destacado é maior, se move na direção contrária a do movimento realizado. De forma

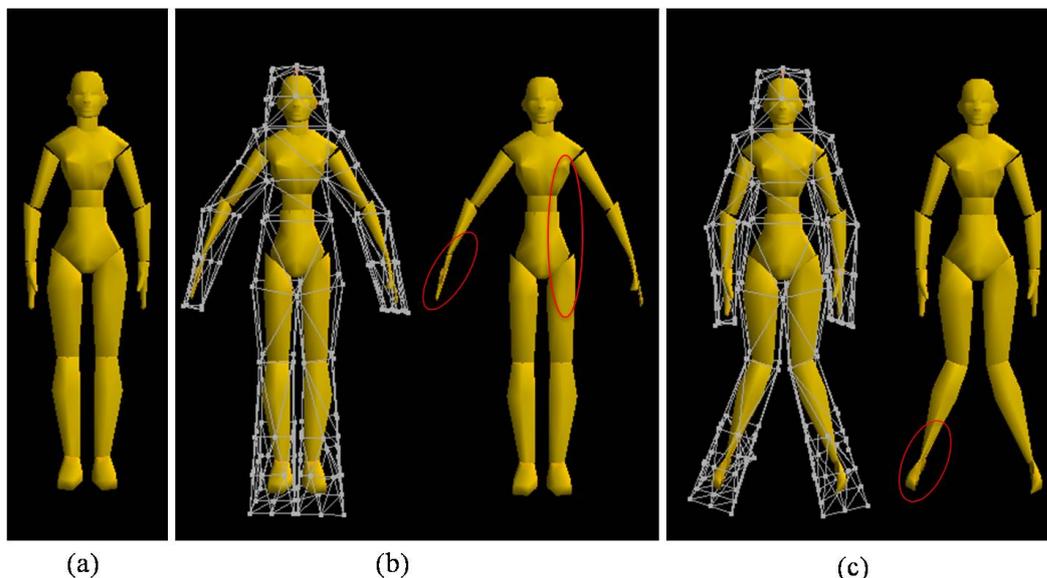


Figura 4.3: (a) Modelo original. (b) e (c) Deformação no poliedro de controle e modelo resultante, em destaque, as conseqüências dos pesos negativos.

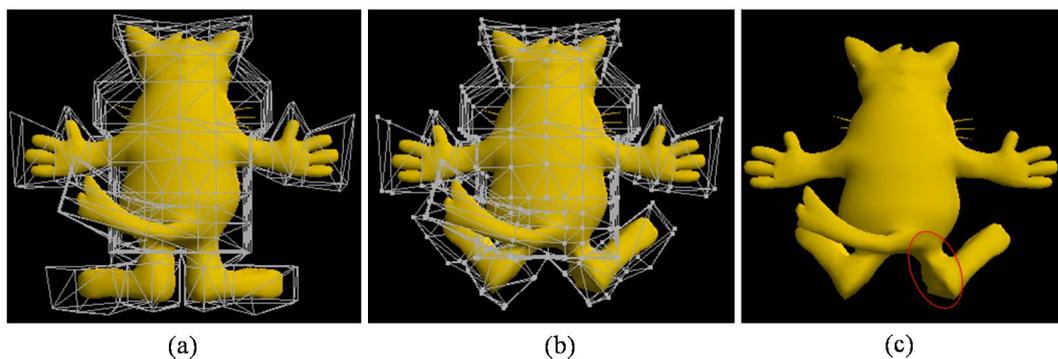


Figura 4.4: (a) Modelo original. (b) Deformação no poliedro de controle e modelo resultante. (c) Em destaque a conseqüência dos pesos negativos.

recíproca podemos observar, também na própria perna direita, deformações causadas pela influência negativa dos vértices de controle relacionados a perna esquerda (ver figura 4.3).

Ao considerar a distância euclidiana entre vértices do poliedro de controle e pontos do modelo, a visibilidade de um ponto no interior do poliedro de controle não é considerada, fazendo com que vértices do poliedro de controle distantes de  $v_0$  (considerando um caminho tomado no interior do poliedro de controle) estejam tão próximos quanto vértices de controle diretamente relacionados a ele (ver figura 4.5). Assim, vértices de controle não diretamente relacionados a uma região do modelo exercem grande influência sobre ela e, como vimos acima, essa influência é dada de forma negativa, causando deformações indesejáveis em algumas regiões do modelo.

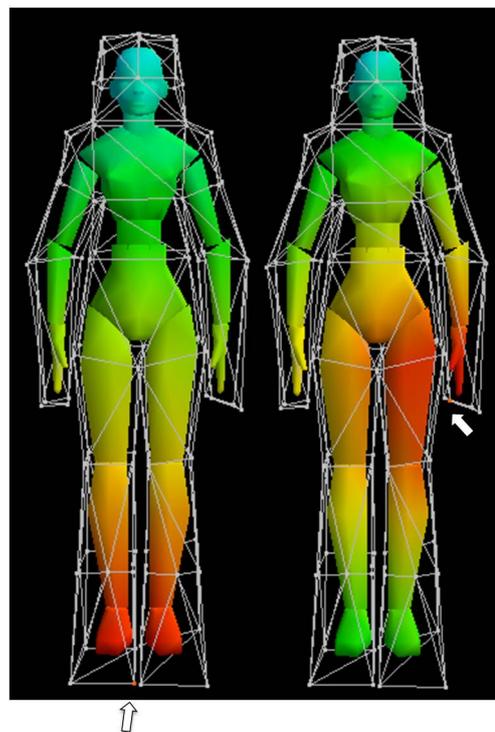


Figura 4.5: Propagação da distância euclidiana dos vértices de controle, de cor laranja, sobre o modelo.

## 4.1

### Distância Interior

Uma proposta é considerar, ao invés de distância euclidiana, uma distância tomada no interior do poliedro de controle, assim a distância de um vértice de controle para um ponto no interior será dada pelo comprimento do caminho percorrido entre eles no interior do poliedro de controle (ver figura 4.6).

#### 4.1.1

##### Construção

Considere  $d$  uma distância mensurada sobre a malha do poliedro de controle e  $d_{ij} = (v_i, v_j)$  as distâncias entre os vértices desta malha. Para definir uma distância no interior do poliedro de controle utilizamos o artigo *Interior Distance Using Barycentric Coordinates* (12), que propaga distâncias mensuradas sobre uma malha para seu interior. Para isso, mergulhamos os vértices  $v_i \in \mathbb{R}^3$  em um espaço de dimensão maior  $\mathbb{R}^m$  (para algum  $m$ ) através da construção de um mapeamento  $v_i \mapsto v_i^* \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\|v_i^* - v_j^*\|_2$  seja igual a distância  $d_{ij}$ . Em seguida, através de coordenadas baricêntricas, estendemos esse mapeamento para o interior da malha. Dados um ponto  $p$  no interior da malha e  $\lambda_i(p), i = 1, \dots, n$  as coordenadas baricêntricas de  $p$  em

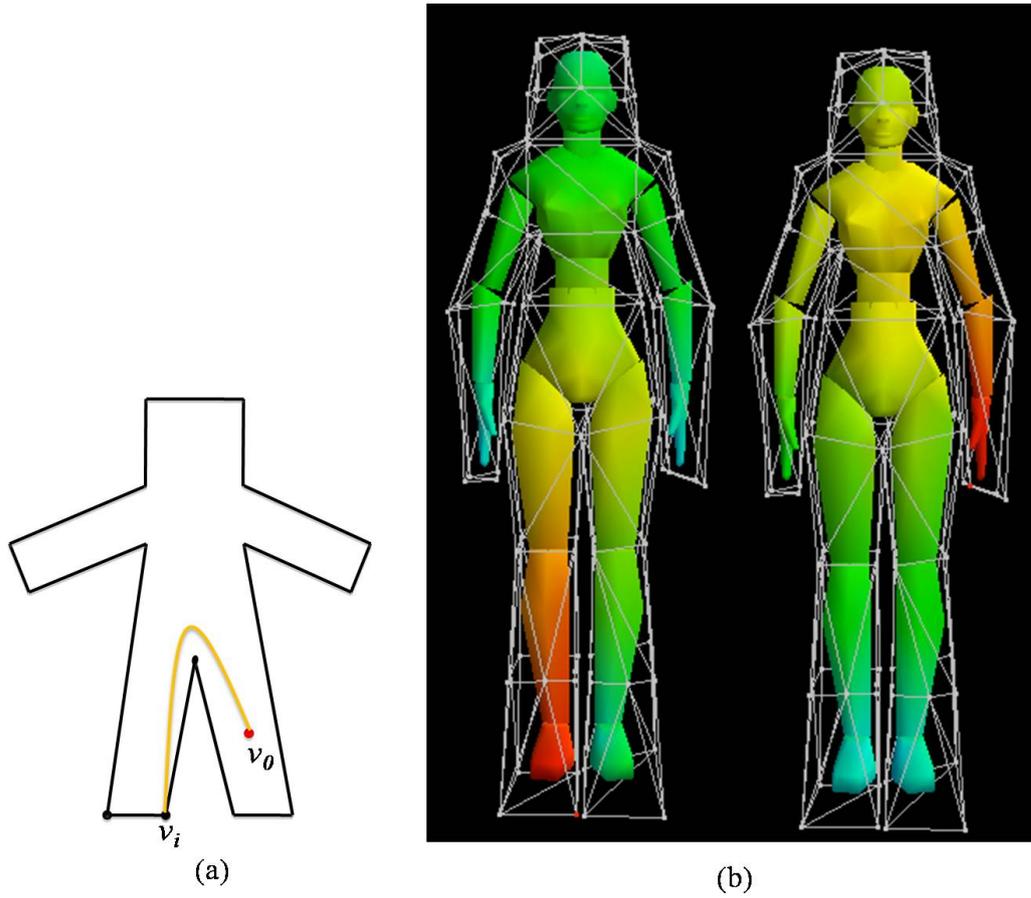


Figura 4.6: (a) Caminho tomado pela no distância no interior do polígono de controle (b) Propagação da distância interior dos vértices de controle, de cor laranja, sobre o modelo.

relação aos vértices da malha (onde  $n$  é o número de vértices da malha), temos  $p \mapsto p^* = \sum_i \lambda_i(p) v_i^*$ . A distância entre dois pontos  $p$  e  $q$  tomada no interior da malha é dada pela distância euclidiana entre suas imagens:

$$\hat{d}(p, q) = \|p^* - q^*\|_2 \quad (4-1)$$

Dessa forma, a distância interior é expressa em função das coordenadas baricêntricas dos pontos  $p$  e  $q$  e das imagens  $v_i^*$  dos vértices da malha. Tomando  $p^* = \sum_i \lambda_i(p) v_i^*$  e  $q^* = \sum_i \lambda_i(q) v_i^*$ , pela equação (4-1) temos :

$$\hat{d}^2(p, q) = \langle p^* - q^*, p^* - q^* \rangle \quad (4-2)$$

$$= \left\langle \sum_i (\lambda_i(p) - \lambda_i(q)) v_i^*, \sum_j (\lambda_j(p) - \lambda_j(q)) v_j^* \right\rangle \quad (4-3)$$

$$= \sum_{i,j} (\lambda_i(p) - \lambda_i(q)) (\lambda_j(p) - \lambda_j(q)) \langle v_i^*, v_j^* \rangle \quad (4-4)$$

$$= (\vec{\lambda}(p) - \vec{\lambda}(q))^T A (\vec{\lambda}(p) - \vec{\lambda}(q)), \quad (4-5)$$

onde  $\vec{\lambda}(p) = (\lambda_1(p), \lambda_2(p), \dots, \lambda_n(p))$  é o vetor coluna dos pesos dos vértices da malha em relação ao ponto  $p$  e a matriz  $A$  é a matrix de Gram dos vértices, sendo cada elemento  $a_{ij} = \langle v_i^*, v_j^* \rangle_{\mathbb{R}^m}$ . Dessa forma, a distância interior de um vértice  $v_i$  do poliedro de controle para um ponto  $p$  em seu interior é dada por  $\hat{d}(v_i, p)$ .

Em nossa implementação optamos por não usar o mergulho explicitamente. Optamos por obter diretamente a matriz  $A$  com o uso de *Multi-Dimensional Scaling (MDS)* (6).

Seja  $D$  a matriz do quadrado das distâncias mensuradas sobre o poliedro de controle,  $D_{ij} = d^2(v_i, v_j)$  e  $I$  a matriz identidade, temos:

$$J = I - \frac{1}{n} \vec{1} \vec{1}^T, \quad (4-6)$$

onde  $\vec{1}$  é um vetor coluna de 1's.

$$A = -\frac{1}{2} J D J. \quad (4-7)$$

Por sua simplicidade de implementação, optamos por definir a distância entre os vértices de controle como o menor caminho entre eles, tomado sobre as arestas, como distância a ser propagada para o interior do poliedro de controle. Observe que dessa forma, uma distância entre dois vértices é melhor aproximada de acordo com a malha do poliedro de controle. Como consequência, em alguns modelos a *precisão linear* pode não ser satisfeita (ver figura 4.7(b)). Também por sua simplicidade de implementação, optamos por usar as coordenadas do valor médio, uma das coordenadas baricêntricas sugeridas por Rustamov et al. (12), como as coordenadas baricêntricas utilizadas para a construção da distância interior.

#### 4.1.2

##### Propriedades

- **Interpolação:** A distância  $\hat{d}$  obtida no interior da malha interpola a distância  $d$  tomada sobre a malha.
- **Métrica:** Se a matriz de Gram  $A$  é uma matriz definida positiva, então a distância  $\hat{d}$  é uma métrica.
- **Mesma topologia que a distância euclidiana:** Se a matriz de Gram  $A$  é uma matriz definida positiva e as coordenadas baricêntricas são

contínuas, então a distância  $\hat{d}$  induz a mesma topologia das curvas isodistantes no interior da malha, que a distância euclidiana.

Dem: ver (12).

## 4.2

### Uso de Distância Interior na Construção das Coordenadas do Valor Médio

Para melhor entendermos as conseqüências da alteração da distância na construção das coordenadas do valor médio, vamos, primeiramente, relembrar o significado da equação (2-28) vista no capítulo 2

$$w_i = \frac{1}{r_i} \sum_{t \ni v_i} \mu_{i,t}. \quad (4-8)$$

Dado um ponto  $v_0$ , no interior do poliedro de controle, o peso  $w_i$  de um vértice de controle  $v_i$ , antes de ser normalizado, é dado pela soma das contribuições  $\mu_{i,t}$  do vértice  $v_i$ , dividido pela sua distância para o ponto  $v_0$ . Ao trocarmos a distância  $r_i$  para uma distância  $\hat{r}_i$  tomada no interior do poliedro de controle, fazemos com que  $\hat{r}_i$  seja o comprimento do caminho tomado, no interior do poliedro de controle, do vértice  $v_i$  até o ponto  $v_0$ .

Ou seja, com as novas coordenadas  $\hat{\lambda}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , na construção de um ponto, obtemos a aproximação:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i v_i = v_0 + \epsilon. \quad (4-9)$$

O erro  $\epsilon$  obtido na reconstrução do ponto é conseqüência da escolha de distância  $d$  mensurada sobre a malha do poliedro de controle. Para reduzir o erro  $\epsilon$ , uma alternativa seria definir sobre o poliedro de controle uma distância mais precisa.

Na tabela 4.1 temos os erros obtidos na reconstrução de alguns de nossos modelos. Em cada modelo, o erro absoluto é dado pela média das normas dos erros obtidos na reconstrução de seus pontos e o erro relativo corresponde à porcentagem da maior diagonal da caixa envolvendo o modelo representado pelo erro absoluto. Como podemos observar na tabela 4.1, os erros obtidos são relativamente pequenos nos exemplos que foram trabalhados. Por isso, por simplicidade de implementação, optamos por corrigir os erros obtidos de forma a diminuí-los. Para isso, com as coordenadas obtidas com a distância interior, expressamos o erro  $\epsilon$  em função dos vértices de controle.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \omega_i v_i, \quad (4-10)$$

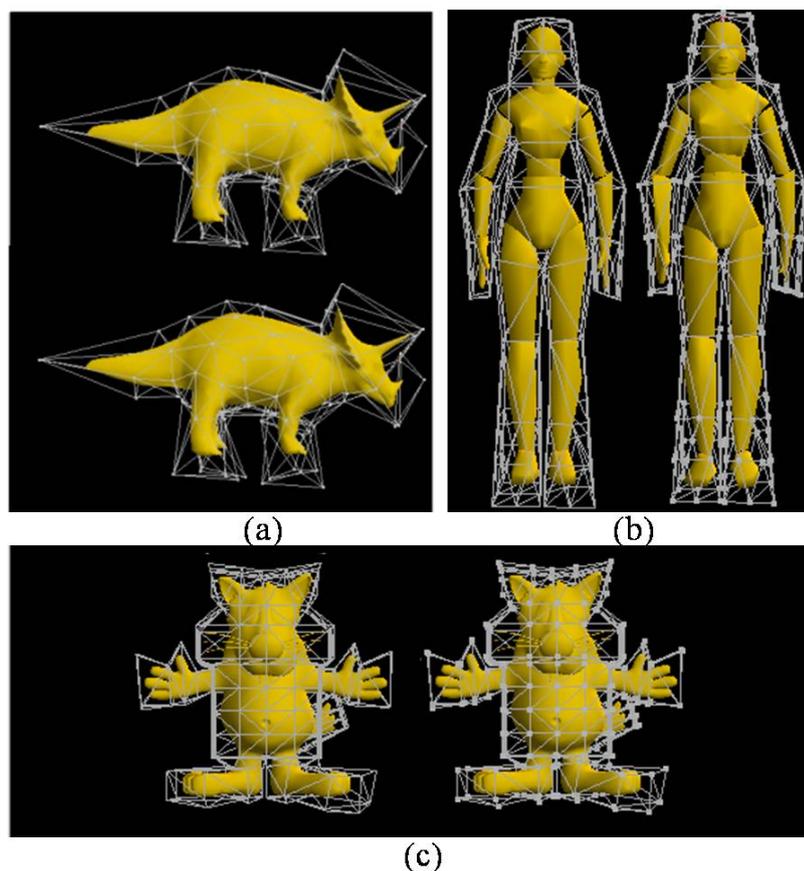


Figura 4.7: (a) Acima modelo e poliedro de controle originais. Abaixo, deformação obtida com as novas coordenadas. (b) e (c) No lado esquerdo, modelo e poliedro de controle originais. No lado, deformação obtida com as novas coordenadas.

onde  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são as coordenadas do valor médio, obtidas com a distância interior apresentada, do erro  $\epsilon$  em relação aos vértices de controle. E temos que:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i v_i = v_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i v_i - \sum_{i=1}^n \omega_i v_i = v_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_i - \omega_i) v_i = v_0. \quad (4-11)$$

Assim obtemos as coordenadas

$$W_i = \hat{\lambda}_i - \omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4-12)$$

A correção dos erros obtidos torna o método um tanto quanto trabalhoso. Calcular os pesos (com a distância tomada no interior do poliedro de controle) dos erros obtidos significa repetir todo o processo, só que dessa vez sobre os erros  $\epsilon$  e não sobre os pontos do modelo. Como dito anteriormente acreditamos que essa correção pode ser evitada ao considerarmos sobre o poliedro de

Modelo	Erro absoluto	Erro relativo
Triceratops	0.1073	0.0055
Mulher Robô	0.2225	0.0087
Gato	0.0987	0.0054

Tabela 4.1: Tabela de erros obtidos na reconstrução dos modelos com a novas coordenadas.

controle uma distância que represente melhor a distância sobre os vértices de controle. Porém, como podemos observar na figura 4.7, para os modelos *gato* e *triceratops*, mesmo com o uso da distância adotada (obtida pelo menor caminho entre os vértices, tomada sobre as arestas) o correção dos erros não é necessária.

### 4.3 Resultados

Com a alteração da distância, pontos de controle não diretamente relacionados a uma região do modelo tornam-se suficientemente distantes dessa região, diminuindo assim sua influência sobre essa região. Observe na figura 4.8, onde temos destacados pares de vértices de controle e pontos do modelo. Na tabela 4.2 podemos comparar os pesos com a alteração da distância.

Método	Figura (a)	Figura (b)
MVC	-0.26326	-0.12624
MVC modificadas	-0.07039	-0.02052
Redução	73.26 %	83.74 %

Tabela 4.2: Tabela das influências dos pontos selecionados na figura 4.8.

Como consequência, temos uma redução significativa dos problemas apresentados no método original (ver figura 4.9).

Os resultados obtidos indicam que a nossa proposta de modificação representa uma direção promissora na tentativa de se obter extensões de coordenadas baricêntricas derivados do teorema do valor médio sem os problemas apresentados pelas coordenadas originais, através de um processo de construção que não necessita da discretização do domínio e não compromete a suavidade das coordenadas. Porém, as restrições impostas precisam ser verificadas em futuros trabalhos para garantir a validade do método.



Figura 4.8: (a) Influência dos pesos com as novas coordenadas. (b) Influência dos pesos com as coordenadas do valor médio.

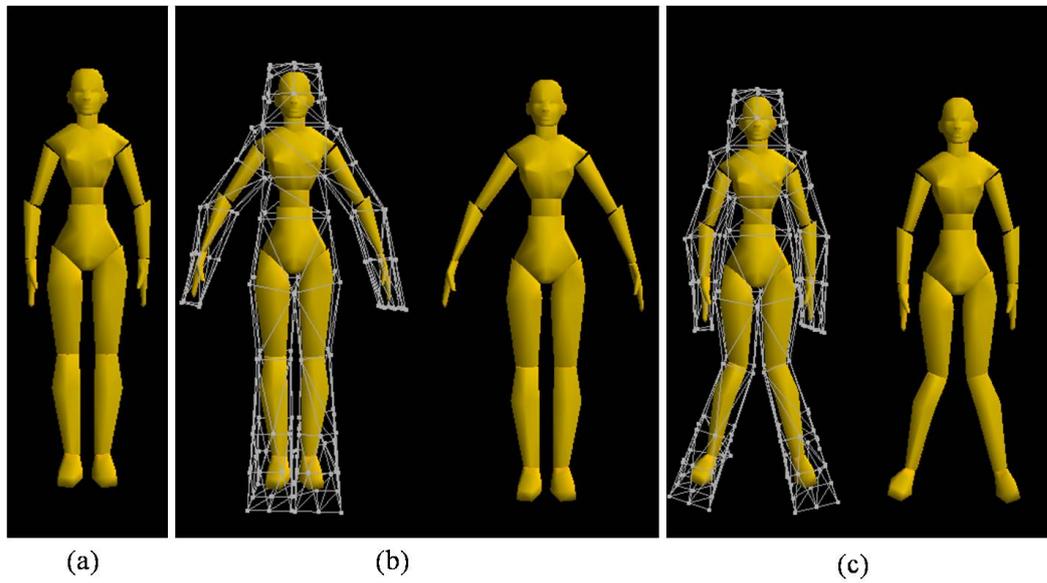


Figura 4.9: Deformações obtidas com as novas coordenadas.

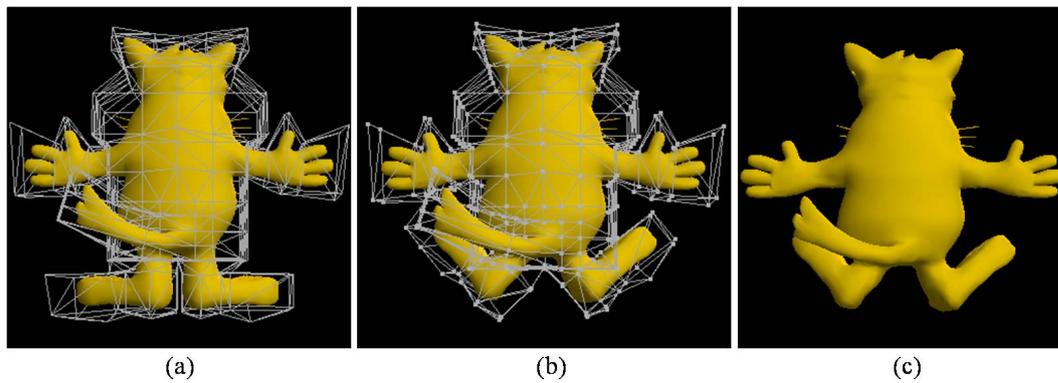


Figura 4.10: Deformações obtidas com as novas coordenadas.

## 5 Comparações e Resultados

### 5.1 Comparações

Métodos de deformação como os apresentados no capítulo 3 introduzem distorções sobre a malha do modelo. Dependendo da aplicação, certas distorções são desejáveis (mudança de volume) ou não (perda de feições). Neste capítulo comparamos as deformações obtidas por cada método segundo alguns critérios que nos permitirão avaliá-los numericamente. A variação de área e volume é usada para comparar o comportamento global das deformações obtidas, analisando seu comportamento em relação ao modelo e ao poliedro de controle, antes e depois da deformação. Através de histogramas analisaremos a variação do ângulo diedral e curvatura gaussiana, tendo assim uma idéia do comportamento local da malha do modelo.

#### 5.1.1 Área

A primeira comparação entre os métodos é realizada por uma análise da relação entre as áreas do modelo e do poliedro de controle, antes e após as deformações. A área da superfície de malha é obtida através da soma das áreas de suas faces. O critério da área pode auxiliar na identificação de distorções globais sobre o modelo, como alterações de escala.

Na figura 5.1 temos as deformações do modelo mulher robô obtidas por cada método, com os vértices do poliedro de controle na posição original. Ao centro o modelo original e em volta, as deformações obtidas com cada coordenada. Optamos por mostrar primeiramente o resultado das deformações com o poliedro de controle na posição original para chamar atenção para algo observado em nossos experimentos, durante a implementação das coordenadas harmônicas. Observe na tabela 5.1 que, mesmo sem alteração da posição dos vértices do poliedro de controle, a área do modelo resultante da deformação com as coordenada harmônicas é alterada. Isso ocorre por que, como visto no capítulo 2, a solução de equação de Laplace é calculada inicialmente sobre

as células de um gride, assim a precisão linear do método é garantida apenas sobre as células desse gride. Usamos interpolação trilinear para obter o valor da função sobre os pontos do modelo. Isso faz com que o resultado das deformações esteja diretamente relacionado com o número de células do gride utilizado.

Observamos também na tabela 5.1 que os resultados obtidos na figura 5.1 com as coordenadas do valor médio e as coordenadas de Green comprovam a precisão linear dos métodos. O resultado obtido na deformação com as nossas coordenadas apresenta uma pequena diminuição da área do modelo (0.2 %), consequência da distância mensurada sobre o poliedro de controle ao calcularmos o distância interior. Observe que o resultado da correção feita sobre os erros no capítulo anterior depende ainda da distância mensurada sobre o poliedro de controle.

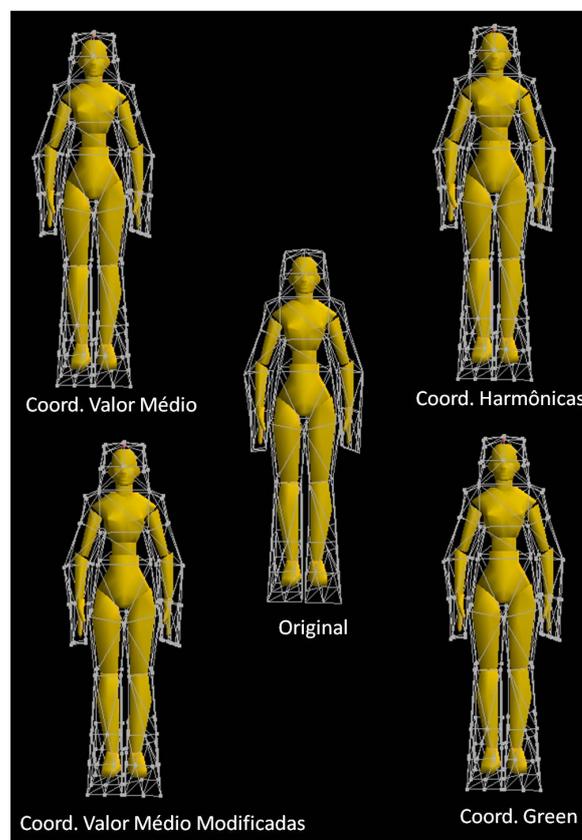


Figura 5.1: Deformações do modelo mulher robô obtidas com o poliedro de controle original.

### 5.1.2 Volume

O volume é usado como um segundo critério de comparação entre as deformações obtidas de forma global. Assim, como na seção anterior,

Método	Área
Modelo original	347.176
Coord. Valor Médio	347.176
Coord. Valor Médio Modificadas	346.448
Coord. Harmônicas	360.053
Coord. Green	347.170

Tabela 5.1: Área das deformações obtidas na figura 5.1.

analisamos o comportamento do volume do modelo antes e após as deformações e a sua relação com o volume do poliedro de controle antes e após também.

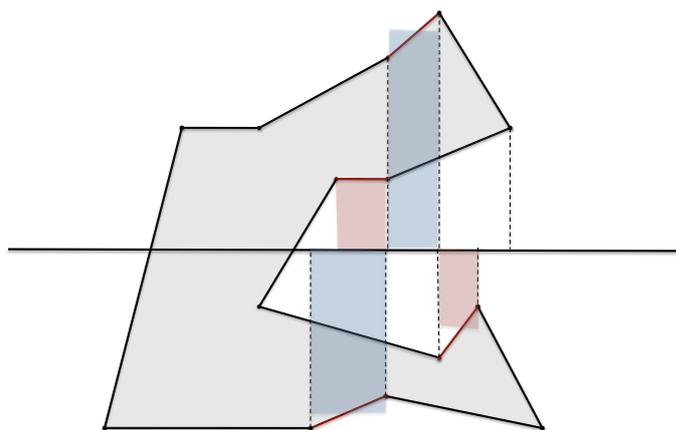


Figura 5.2: As regiões em azul e vermelho são exemplos das regiões que contribuirão, respectivamente, de forma positiva e de forma negativa.

O volume da malha é estimado pelo método dos trapézios, através da soma do volume de prismas triangulares retos. A base do prisma é determinada pela projeção de uma face da malha sobre o plano  $xy$ , possuindo uma de suas bases sobre o plano  $xy$  e a outra na altura média dos vértices da face projetada. O valor do volume do prisma receberá um sinal positivo ou negativo de acordo com a sua posição, a atribuição de sinais é ilustrada em duas dimensões na figura 5.2.

Na figura 5.3 temos as deformações do modelo triceratops obtidas por cada método. Deformamos o poliedro de controle através de uma rotação dos vértices de controle com maior influência sobre a região da cabeça do modelo e levantamos os vértices de controle com maior influência sobre as costas do modelo.

Ao observarmos a figura 5.3 percebemos que as deformações obtidas pelas coordenada do valor médio e as coordenadas harmônicas comprovam a flexibilidade e influência local dos pesos de controle dos métodos. A deformação realizada no poliedro de controle é tal que os pesos negativos existentes nas

coordenadas do valor médio não causam deformações indesejáveis. Um ponto importante é o comportamento da deformação obtida com as coordenadas do valor médio modificadas semelhante a deformação obtida com o método original, para deformações como está. Nas deformações obtidas por essas três coordenadas podemos observar a flexibilidade e influência local dos vértices de controle, a deformação no poliedro de controle é refletida para o modelo de forma bastante intuitiva.

Já na deformação obtida com as coordenadas de Green, observamos que o resultado reflete a principal característica do método. A tentativa de preservar a forma do modelo faz com que seu volume seja mesmo alterado do que nos outros métodos. Podemos observar também que a influência global dos vértices de controle faz com que regiões do modelo relativamente distantes às regiões do poliedro de controle deformadas também sofrem deformações.

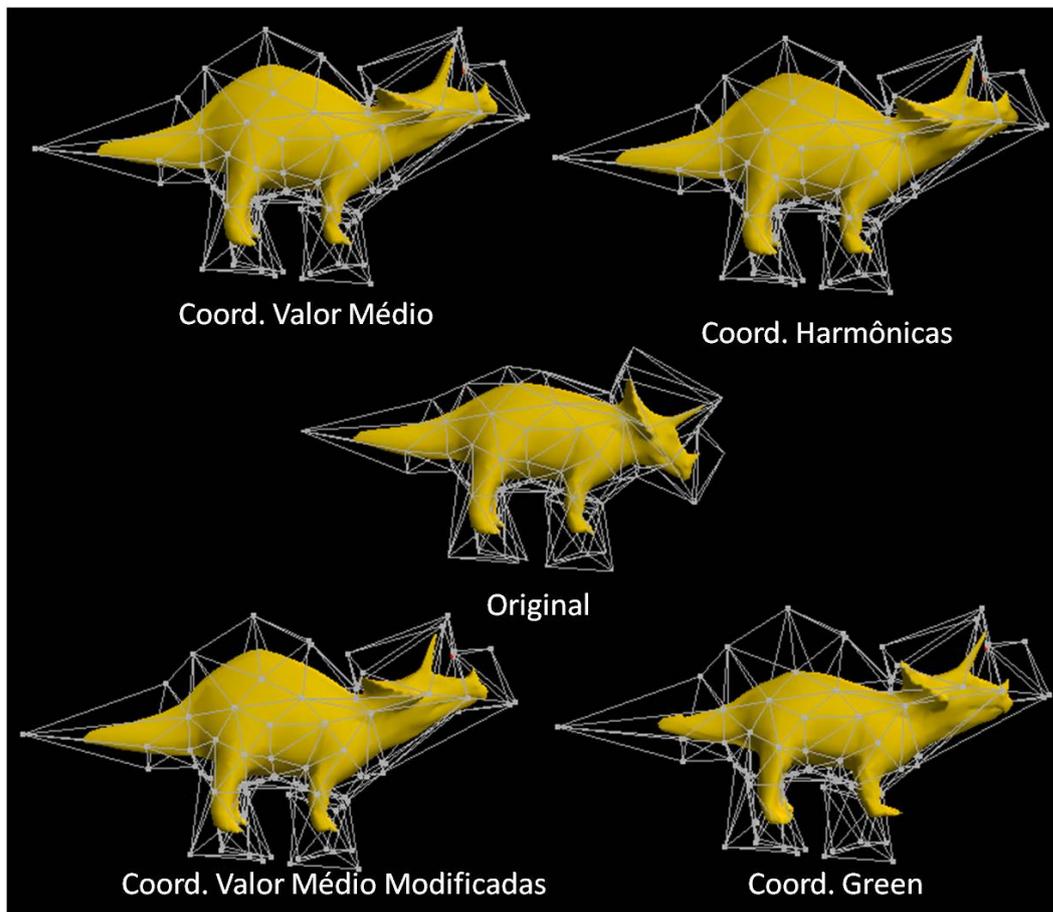


Figura 5.3: Deformações do modelo triceratops

Método	Volume	$V_f/V_i$
Modelo original	273.465	-
CVM	325.965	1.191
CVM Modificadas	328.341	1.200
CH	341.287	1.248
CG	311.292	1.138

Tabela 5.2: Volume das deformações obtidas na figura 5.3.

Poliedro	Volume	$V_f/V_i$
Posição inicial	751.780	-
Posição final	872.742	1.160

Tabela 5.3: Volume do poliedro de controle das deformações obtidas na figura 5.3.

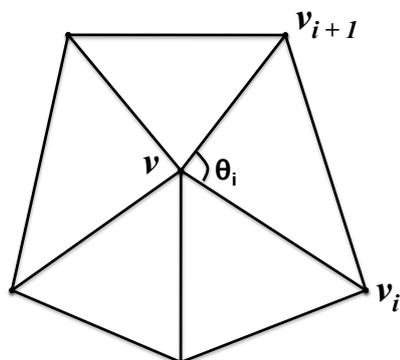
### 5.1.3

#### Curvatura Gaussiana

Uma forma de analisar localmente as deformações obtidas é através da curvatura nos vértices da malha do modelo. Vértices de maior curvatura acrescentam informações geométricas importantes à malha, enquanto vértices de menor curvatura contribuem menos com a geometria da malha. O comportamento da curvatura Gaussiana sobre os vértices da malha, antes e após a deformação, nos permite comparar os métodos quanto a preservação de detalhes do modelo. A curvatura Gaussiana é calculada na estrela de um vértice  $v$  em função do somatório dos ângulos de seus triângulos incidentes (ver figura 5.4).

$$C(v) = 2\pi - \sum_{i=1}^s \theta_i, \quad (5-1)$$

onde  $s$  é o numero de triângulos na estrela do vértice  $v$ .

Figura 5.4: Estrela do vértice  $v$ .

Na figura 5.5 temos deformações do modelo gato obtidas com cada

coordenada. Deformamos o poliedro de controle com rotações nos vértices de controle com maior influência sobre a região das patas do modelo. No histograma apresentado na figura 5.6 observamos que a alteração da curvatura Gaussiana sobre os vértices do modelo é relativamente pequena, comprovando o bom comportamento dos métodos na preservação de detalhes nas deformações obtidas.

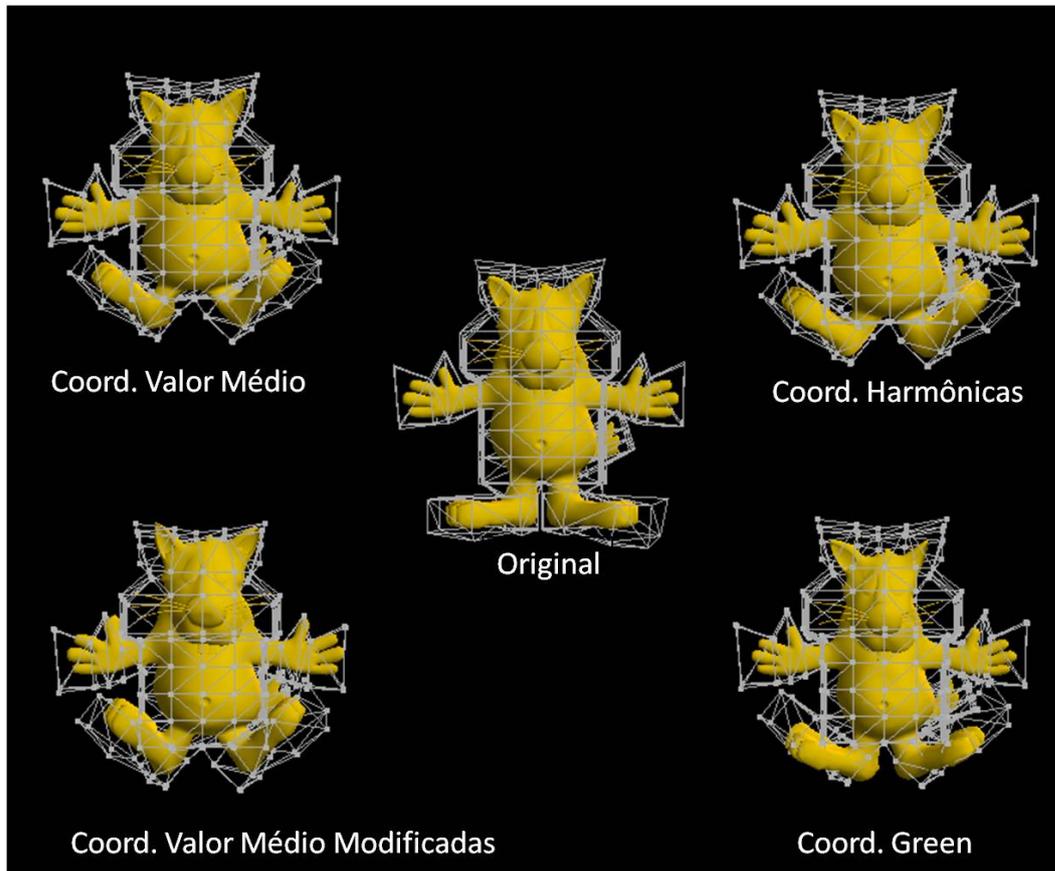


Figura 5.5: Deformações do modelo gato.

#### 5.1.4

##### Ângulo Diedral

Chamamos de ângulo diedral o ângulo formado por dois planos concorrentes. O ângulo diedral é relacionado a curvatura média da superfície. A análise do comportamento do ângulo diedral entre as faces do modelo, antes e após as deformações, nos permite, assim como a curvatura gaussiana, comparar os métodos quanto a preservação de detalhes do modelo. Para fins de avaliação da geometria local, estamos normalmente interessados no cosseno do ângulo diedral sobre as arestas, dado pelo produto interno entre normais unitárias das faces incidentes a cada aresta (ver figura 5.7).

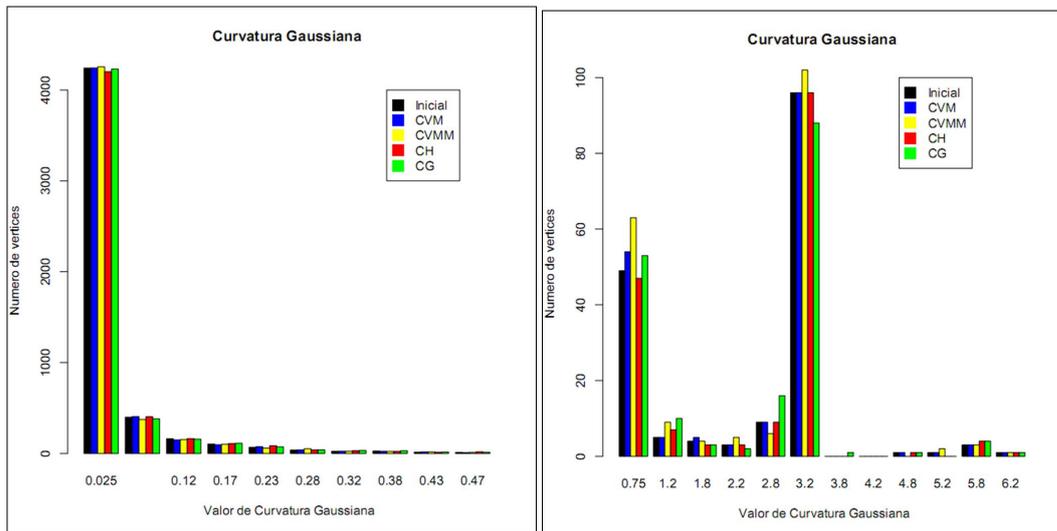


Figura 5.6: Curvatura Gaussiana das deformações da figura 5.5.

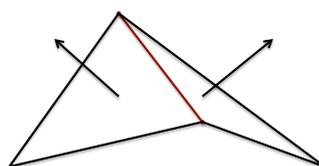


Figura 5.7: Faces incidentes a uma aresta.

O histograma apresentado na figura 5.8 se refere ao ângulo diedral das arestas do modelo da figura 5.5. Podemos observar que, assim como a curvatura Gaussiana dos vértices do modelo, o ângulo diedral também é preservado nas deformações obtidas pelos métodos analisados. Temos assim, mais uma ferramenta que nos permite comprovar a preservação dos detalhes do modelo.

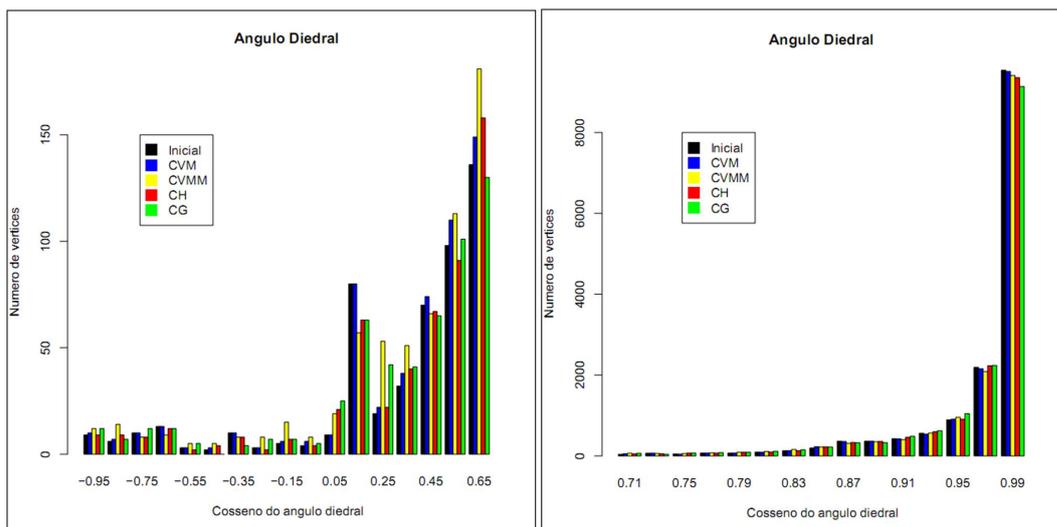


Figura 5.8: Ângulo diedral sobre as arestas do modelo nas deformações apresentadas na figura 5.5.

## 5.2

### Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos nas deformações dos modelos abordados.

#### 5.2.1

##### Modelo Triceratops - Poliedro de Controle Original

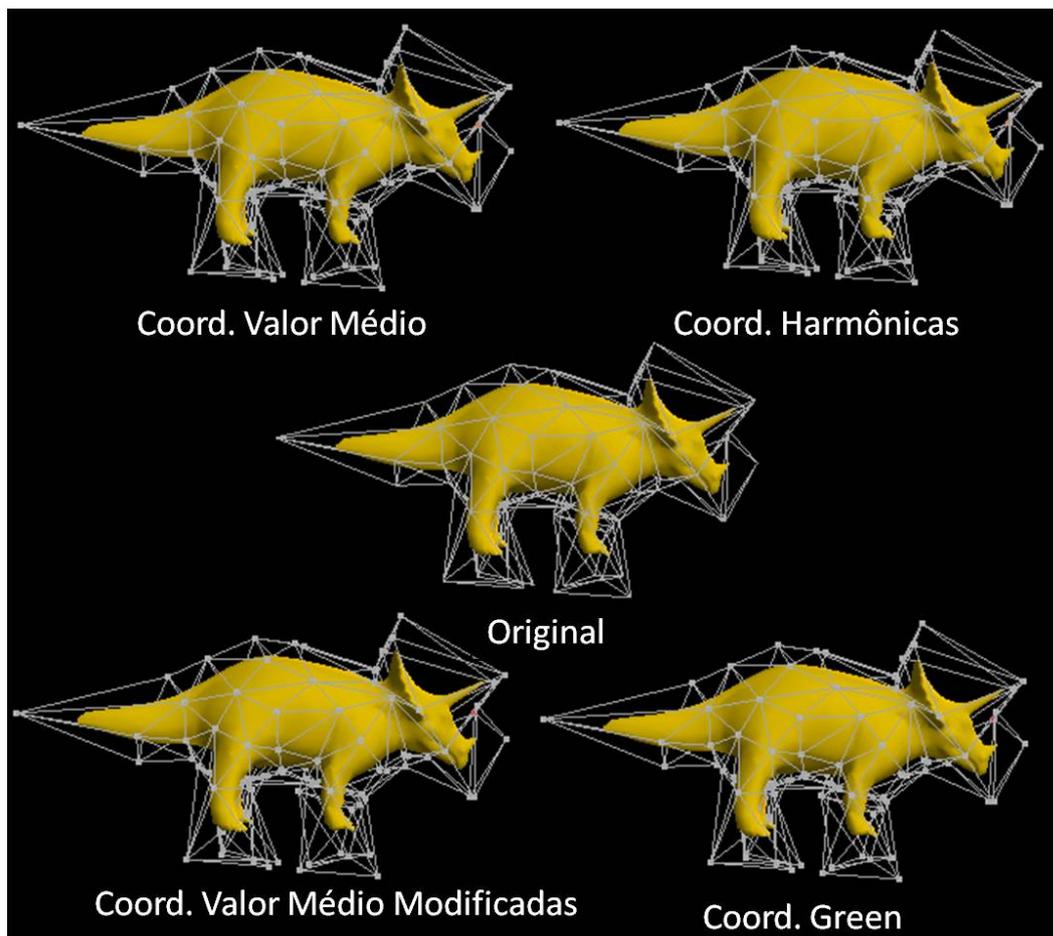


Figura 5.9: Deformações obtidas com o poliedro de controle original.

Método	Área	Volume
Modelo original	219.915	273.465
Coord. Valor Médio	219.915	273.465
Coord. Valor Médio Modificadas	219.275	272.198
Coord. Harmônicas	232.054	287.284
Coord. Green	219.915	273.464

Tabela 5.4: Área e volume das deformações obtidas na figura 5.9.

Na tabela 5.4, podemos observar, como mencionado anteriormente, a alteração de área e volume nas deformações obtidas com as coordenadas de harmônicas, consequência da não precisão linear sobre os pontos do modelo.

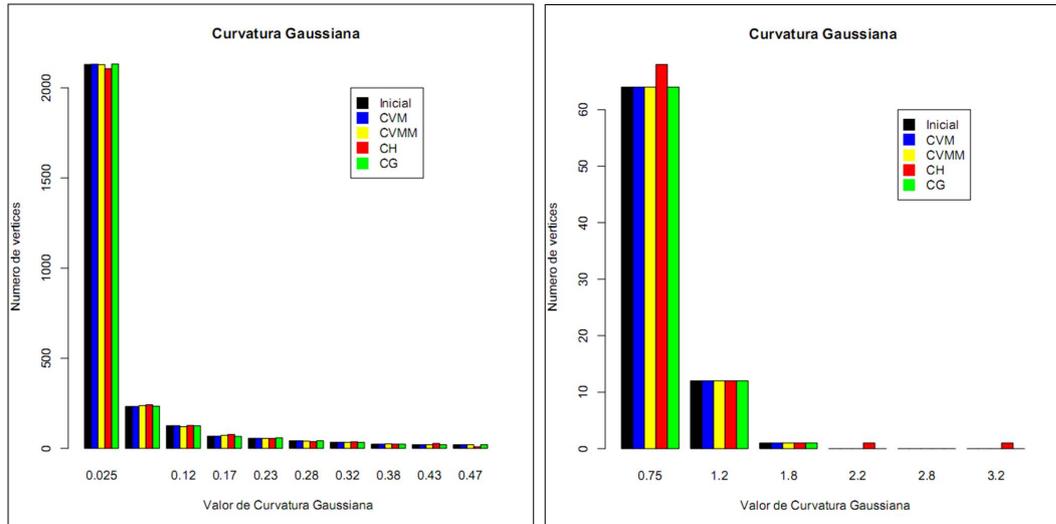


Figura 5.10: Curvatura Gaussiana nos pontos do modelo.

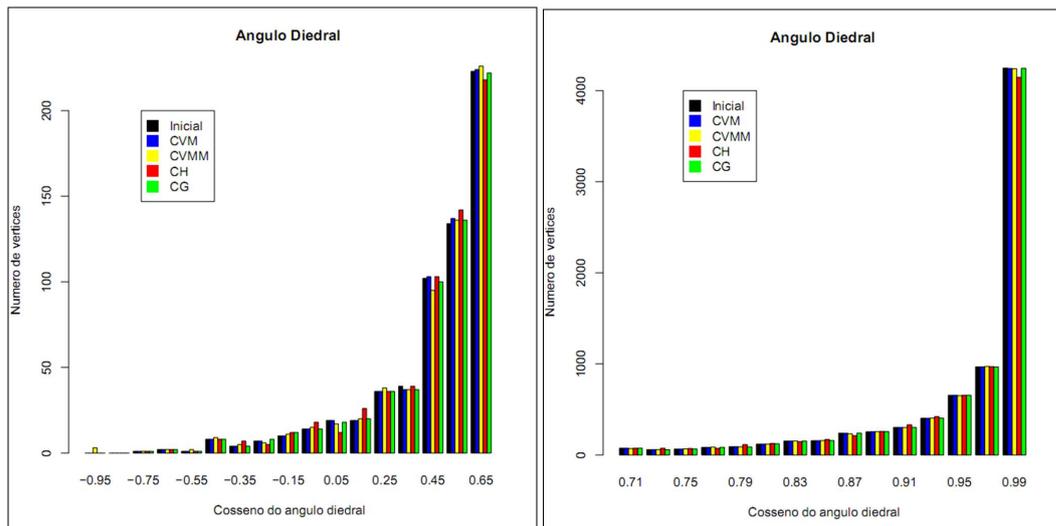


Figura 5.11: Ângulo diedral sobre as arestas do modelo.

O fato de a precisão linear não ser satisfeita pelas coordenadas harmônicas (devido ao cálculo da solução da equação de Laplace inicialmente sobre as células do gride) e coordenadas do valor médio modificadas (devido a relação de dependência com a distância mensurada sobre o poliedro de controle) pode ser observado pela alteração, mesmo que relativamente pequena, da estrutura local dos modelos obtidos. Nos histogramas apresentados nas figuras 5.10 e 5.11 podemos observar maiores alterações nos dados obtidos com as coordenadas do valor médio modificadas (em amarelo) e coordenadas harmônicas (em vermelho).

## 5.2.2

## Modelo Cubo - Deformação 2

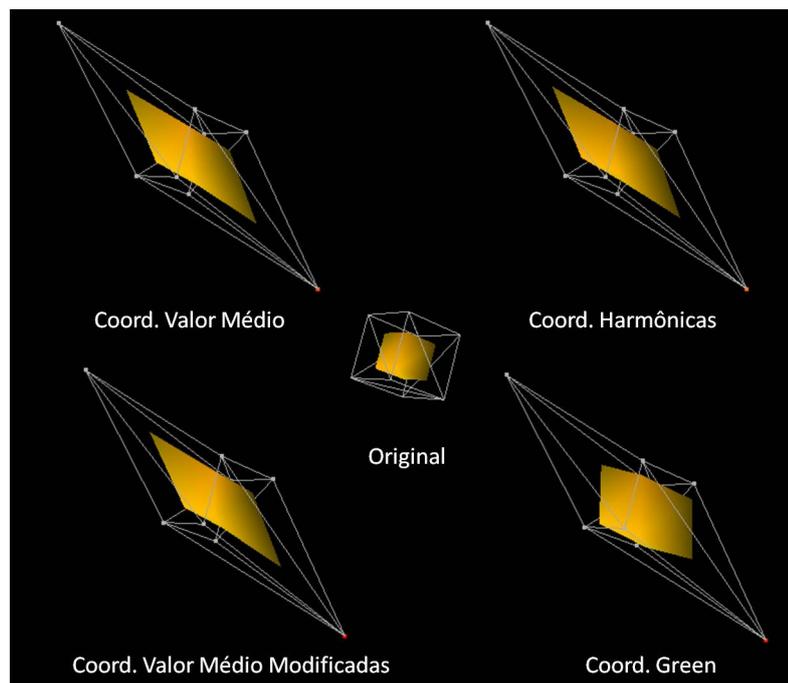


Figura 5.12: Deformações do modelo cubo

Método	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Modelo original	96.0	-	128.0	-
CVM	216.336	2.253	336.056	2.625
CVM Modificadas	209.435	2.181	317.096	2.477
CH	212.21	2.210	327.157	2.555
CG	241.384	2.514	490.937	3.835

Tabela 5.5: Área e volume das deformações obtidas na figura 5.12.

Poliedro	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Posição inicial	311.04	-	746.496	-
Posição final	719.422	2.312	1973.96	2.644

Tabela 5.6: Área e volume do poliedro de controle das deformações obtidas na figura 5.12.

Nas tabelas 5.5 e 5.6 podemos observar um melhor comportamento na deformação obtida com as coordenadas do valor médio em relação a razão das áreas e volume, do modelo e poliedro de controle, antes e após a deformação.

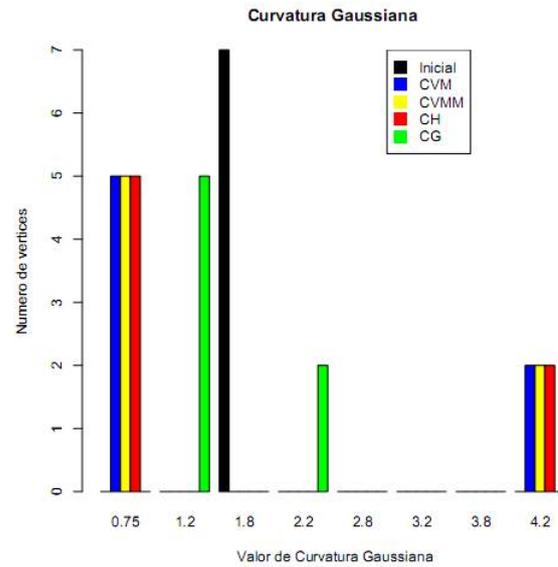


Figura 5.13: Curvatura Gaussiana nos pontos do modelo.

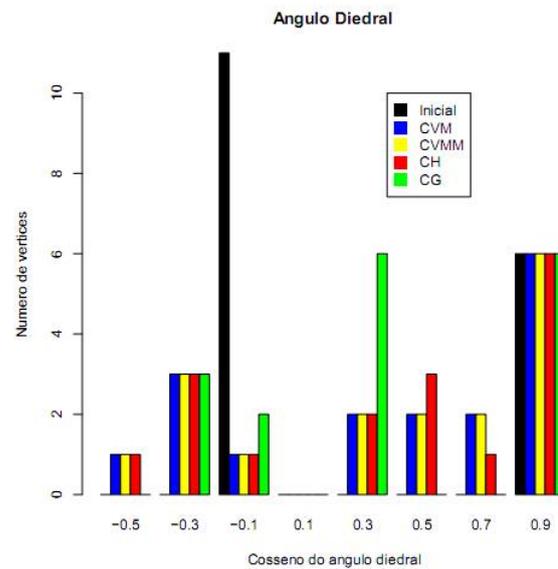


Figura 5.14: Ângulo diedral sobre as arestas do modelo.

Nos histogramas 5.13 e 5.14 podemos observar um comportamento similar das coordenadas do valor médio, coordenadas do valor médio modificadas e coordenadas harmônicas quanto a alteração da curvatura Gaussiana e ângulo diedral. Já com as coordenadas de Green, o método espalha menos a distribuição dos ângulos do modelo cubo.

### 5.2.3

#### Modelo Mulher Robô - Deformação 1

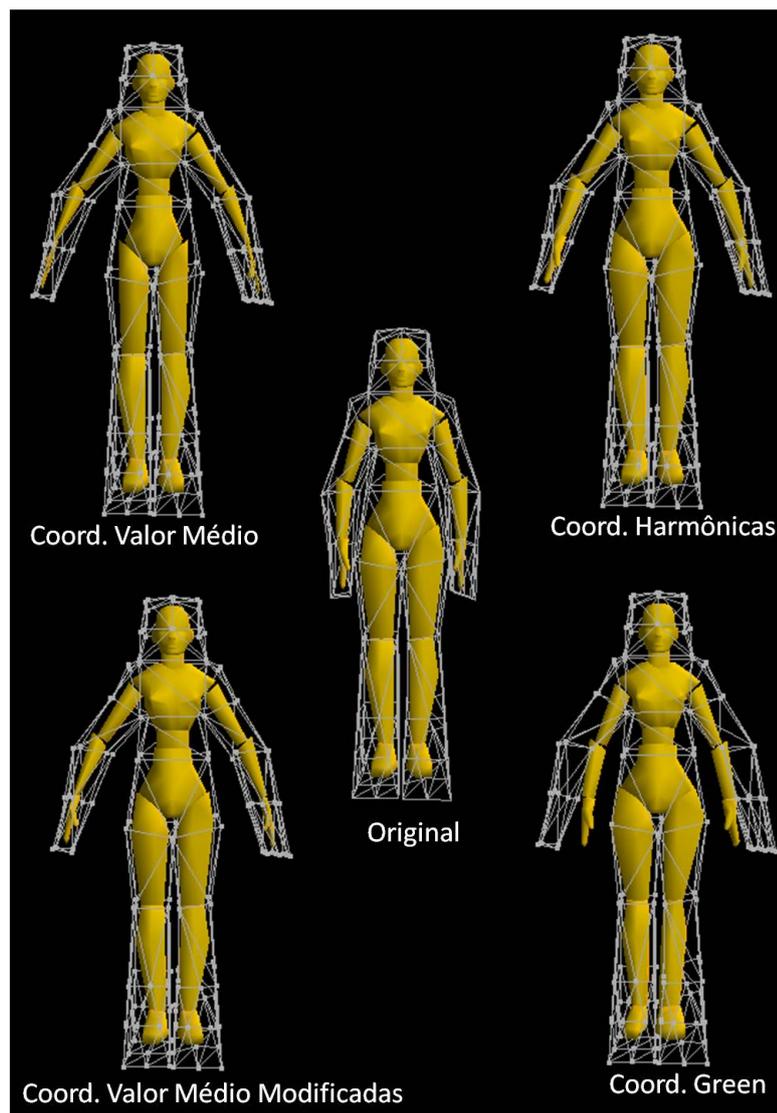


Figura 5.15: Deformações do modelo mulher robô.

Nas deformações acima, rotacionamos as regiões do poliedro de controle com maior influência sobre os braços do modelo robô mulher, com o objetivo de evidenciar as deformações indesejadas na deformação obtida com as coordenadas do valor médio e analisar os resultados obtidos nas deformações realizadas com as outras coordenadas.

Na tabela 5.7 destacamos a perda de área e volume na deformação obtida pelas coordenadas do valor médio (consequência das deformações não desejadas provocadas pelos pesos negativos). Podemos observar um melhor comportamento da deformação obtida pelas coordenadas do valor médio modificadas, com uma menor perda área e volume do modelo.

Método	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Modelo original	347.176	-	231.149	-
CVM	331.279	0.954	210.492	0.910
CVM Modificadas	342.702	0.9987	226.821	0.981
CH	360.355	1.037	246.923	1.068
CG	342.375	0.986	226.019	0.977

Tabela 5.7: Área e volume das deformações obtidas na figura 5.15.

Poliedro	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Posição inicial	636.706	-	852.491	-
Posição final	638.359	1.002	856.436	1.004

Tabela 5.8: Área e volume do poliedro de controle das deformações obtidas na figura 5.15.

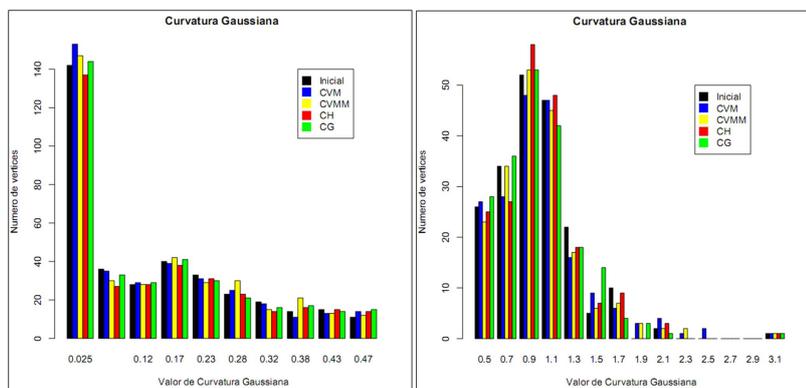


Figura 5.16: Curvatura Gaussiana nos pontos das deformações obtidas na figura 5.15.

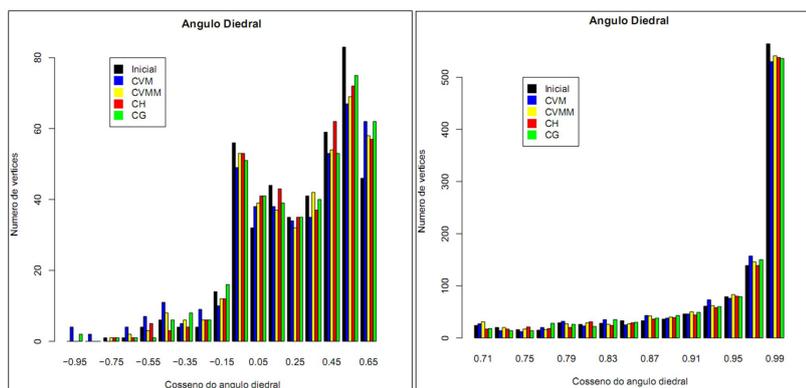


Figura 5.17: Ângulo diedral sobre as arestas nas deformações obtidas na figura 5.15.

### 5.2.4 Modelo Mulher Robô - Deformação 2

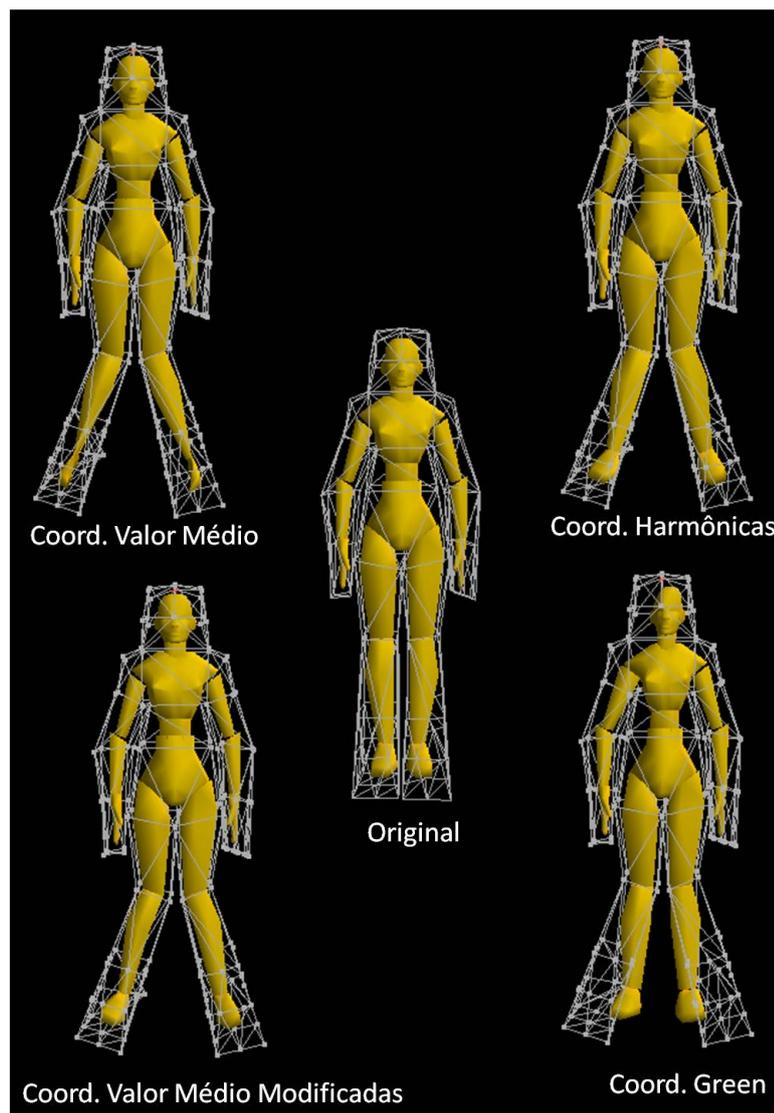


Figura 5.18: Deformações do modelo mulher robô.

Nas deformações acima rotacionamos as regiões do poliedro de controle com maior influência sobre as pernas do modelo mulher robô. A deformação realizada no poliedro de controle tem o mesmo objetivo da deformação realizada na figura 5.15, destacar a influência dos pesos negativos na deformação obtida com as coordenadas do valor médio. Outro ponto importante é o resultado obtido pelas coordenadas de Green, com deformações sobre o modelo em pontos relativamente distantes da região do poliedro de controle deformada, consequência da influencia global de seus pesos.

Método	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Modelo original	347.176	-	231.149	-
CVM	336.158	0.968	217.562	0.941
CVM Modificadas	340.207	0.979	223.813	0.968
CH	357.776	1.030	243.932	1.055
CG	335.531	0.966	215.747	0.933

Tabela 5.9: Área e volume das deformações obtidas na figura 5.18.

Podemos observar na tabela 5.9 o mesmo comportamento de variação de área e volume ocorrido nas deformações apresentados na figura 5.15.

Poliedro	Área ( $cm^2$ )	$A_f/A_i$	Volume ( $cm^3$ )	$V_f/V_i$
Posição inicial	636.706	-	852.491	-
Posição final	638.594	1.006	845.074	0.991

Tabela 5.10: Área e volume do poliedro de controle das deformações obtidas na figura 5.18.

Destacamos no histograma apresentado na figura 5.19 a melhoria das coordenadas do valor médio modificadas em relação às coordenadas harmônicas. Já no histograma da figura 5.20 podemos observar que as coordenadas do valor médio originais introduzem ângulos diedrais muito negativos, que podem ser observados também no encolhimento das mãos na figura 5.18. Já as coordenadas modificadas não introduzem esses ângulos diedrais extremos. Esse comportamento será ainda mais visível no próximo exemplo.

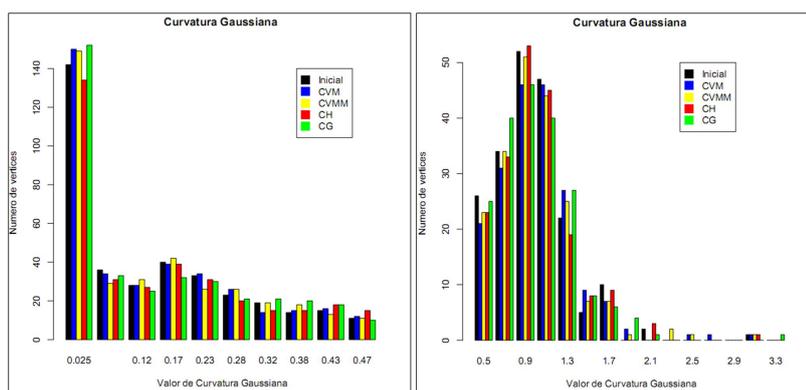


Figura 5.19: Curvatura Gaussiana nos pontos das deformações obtidas na figura 5.18.

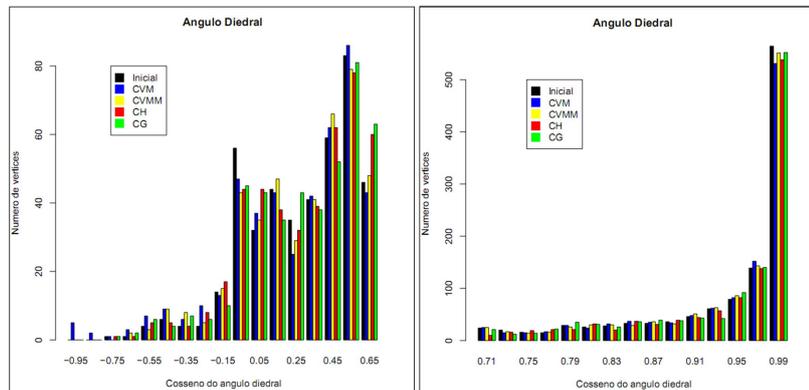


Figura 5.20: Ângulo diedral sobre as arestas nas deformações obtidas na figura 5.18.

### 5.2.5 Modelo Mulher Robô - Figura 5.1

Abaixo temos as informações quanto a área, volume, curvatura Gaussiana e ângulo diedral das deformações obtidas na figura 5.1, onde temos as deformações obtidas por cada coordenada sem a alteração da posição dos vértices do poliedro de controle. E como mencionado anteriormente, o comprometimento da precisão linear nas coordenadas harmônicas e coordenadas do valor médio modificadas provoca alterações nas deformações obtidas. O comportamento observado reforça as análises realizadas no exemplo anterior.

Método	Área	$A_f/A_i$	Volume	$V_f/V_i$
Modelo original	347.176	-	231.149	-
CVM	347.176	1.000	231.149	1.000
CVM Modificadas	346.448	0.997	230.375	0.996
CH	360.053	1.035	246.318	1.065
CG	347.170	0.999	231.142	0.999

Tabela 5.11: Área e volume das deformações obtidas na figura 5.1.

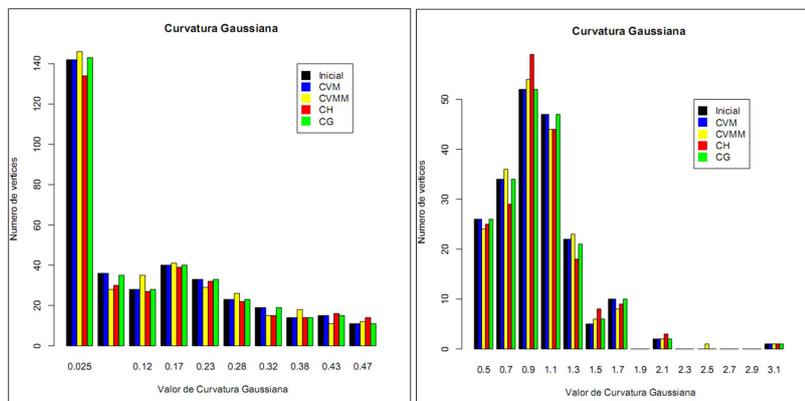


Figura 5.21: Curvatura Gaussiana nos pontos das deformações obtidas na figura 5.1.

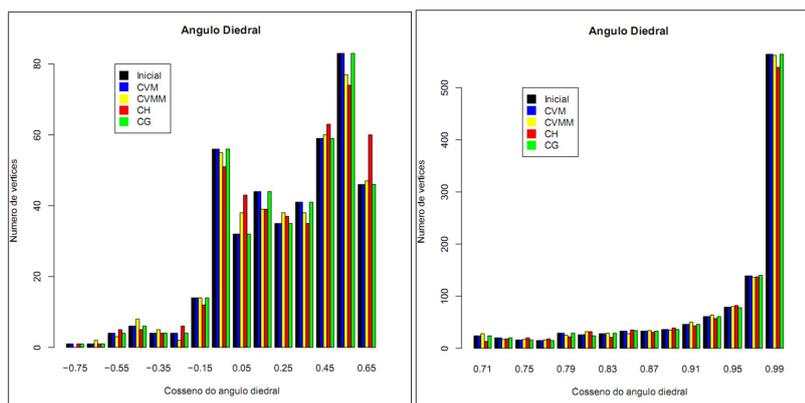


Figura 5.22: Ângulo diedral sobre as arestas das deformações obtidas na figura 5.1.

## 6

### Conclusão e Trabalhos Futuros

A principal contribuição desse trabalho é analisar detalhadamente o processo de construção de extensões de coordenadas baricêntricas de métodos apresentados nos últimos anos. O estudo do comportamento das deformações obtidas por cada método permitiu apontar suas principais características. A modificação na construção das coordenadas do valor médio que propomos, mostrou ser uma direção promissora para a obtenção de coordenadas derivados do teorema do valor médio com deformações livres dos problemas apresentados no método original. Os critérios de comparação adotados permitiram comparar numericamente as deformações obtidas pelos métodos abordados, dando importantes informações sobre o comportamento local e global das deformações.

Em trabalhos futuros, pretendemos analisar a relação de dependência entre a escolha da distância mensurada sobre o poliedro de controle e as deformações obtidas com o uso da distância interior, com relação ao custo de implementação da distância escolhida e o valor do erro obtido. Pois, como mencionado no capítulo 4, os resultados obtidos estão diretamente relacionados com a escolha da distância mensurada sobre o poliedro de controle.

Outro ponto importante observado durante o desenvolvimento da dissertação foi a possibilidade de construir um método de deformação que aproveitasse as melhores características dos métodos estudados. As coordenadas de Green, por exemplo, tem como principal característica a preservação da forma, por outro lado, não tem controle sobre todo modelo quando deformações locais são realizadas. As coordenadas do valor médio, embora apresentem o efeito *do-bra*, possuem um método de deformação relativamente local. Uma das direções a serem exploradas é observar o comportamento de um método de deformação cujos pesos seriam dados por alguma espécie de média entre os pesos obtidos com as coordenadas de Green e as coordenadas do valor médio. Outro modo de juntar as duas coordenadas que pretendemos implementar é delimitar regiões do modelo, indicando quais coordenadas atuariam sobre elas.

Também, visto que o cálculo das coordenadas é feito uma única vez e a reconstrução de um ponto é dado por uma combinação linear dos pesos obtidos e vértices de controle, pretendemos implementar em placa gráfica os

métodos abordados. Assim seria possível obter deformações em tempo real, com o arrastar de um vértice de controle por exemplo.

Outra direção é o uso das coordenadas obtidas através da nossa modificação para aplicação de textura volumétrica, seguindo a sugestão apresentada por Ju et al. (7). Pretendemos analisar os resultados obtidos nesse tipo de aplicação usando as nossas coordenadas, comparando-os com os resultados obtidos pelas coordenadas do valor médio originais.

## Referências Bibliográficas

- [1] Blender. [www.blender.com.br](http://www.blender.com.br).
- [2] AXLER, S.; BOURDON, P. ; RAMEY, W. **Harmonic Function Theory**. Springer, 2001.
- [3] FLOATER, M. S. **Mean value coordinates**. Computer Aided Geometric Design, 20(1):19–27, 2003.
- [4] FLOATER, M. S.; KOS, G. ; REIMERS, M. **Mean value coordinates in 3d**. Computer Aided Geometric Design, 22:623–631, 2005.
- [5] JOSHI, P.; MEYER, M.; DEROSE, T.; GREEN, B. ; SANOCKI, T. **Harmonic coordinates for character articulation**. ACM Transactions on Graphics, 26(3), 2007. Artigo 71.
- [6] JU, T.; LIEPA, P. ; WARREN, J. **A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope**. Computer Aided Geometric Design, 24(3):161–178, 2007.
- [7] JU, T.; SCHAEFER, S. ; WARREN, J. **Mean value coordinates for closed triangular meshes**. ACM Transactions on Graphics, 24(3):561–566, 2005.
- [8] LAGE, M. **Estruturas de dados topológicos escalonáveis para variedades de dimensão 2 e 3**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC-Rio, <http://www.matmidia.mat.puc-rio.br/mlage/>, 2006.
- [9] LIPMAN, Y.; KOPF, J.; COHEN-OR, D. ; LEVIN, D. **Gpu-assisted positive mean value coordinates for mesh deformation**. Symposium on Geometry Processing, p. 117–123, 2007.
- [10] LIPMAN, Y.; LEVIN, D. ; COHEN-OR, D. **Green coordinates**. ACM Transactions on Graphics, 27(3), 2008. 78.
- [11] PINKALL, U.; POLTHIER, K. **Computing discrete minimal surfaces and their conjugates**. Experimental Mathematics, 1993.

- [12] RUSTAMOV, R. M.; LIPMAN, Y. ; FUNKHOUSER, T. **Interior distance using barycentric coordinates**. Symposium on Geometry Processing, 28(5), 2009.