

# Catiúscia Albuquerque Benevente Borges

## Reconstrução de Geometria Baseado na Conectividade e em Amostras da Malha

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador : Prof. Sinésio Pesco Co-Orientador: Prof. Thomas Lewiner

> Rio de Janeiro Março de 2007



# Catiúscia Albuquerque Benevente Borges

## Reconstrução de Geometria Baseado na Conectividade e em Amostras da Malha

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sinésio Pesco** Orientador Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Thomas Lewiner** Co–Orientador Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Luiz Carlos Pacheco R. Velho

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Marcos Craizer** Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal** Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de Março de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## Catiúscia Albuquerque Benevente Borges

Graduou–se em Bacharelado em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ (Rio de Janeiro, Brasil).

Ficha Catalográfica

Borges, Catiúscia

Reconstrução de Geometria Baseado na Conectividade e em Amostras da Malha / Catiúscia Albuquerque Benevente Borges; orientador: Sinésio Pesco; co-orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 58 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

 Matemática – Tese. 2. Aproximação de forma. 3. Minimização Quadrática. 4. Malha Laplaciana. I. Pesco, Sinésio.
 II. Lewiner, Thomas. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

# Agradecimentos

Ao meu filho que mesmo com sua pouca idade já me ensinou tanto.

À minha família pelo apoio, incentivo e paciência, principalmente ao meu marido Leonardo J. L. da Silva, ao meu irmão Rudson A. B. Borges, sua esposa Viviane F. A. B. Borges e aos meus pais Suely de Albuquerque e Irun B. Borges.

Ao meu orientador Professor Sinésio Pesco e co-orientador Professor Thomas Lewiner, pela dedicação e incentivo, elementos fundamentais para a elaboração deste trabalho.

À Capes pelos auxílios concedidos.

Aos funcionários do departamento de Matemática, em especial a Creuza e a Kátia.

Aos meus amigos da PUC-Rio, em especial aos amigos Sueni de S. Arouca, Marcos Lage e Lhaylla Crissaff.

## Resumo

Borges, Catiúscia; Pesco, Sinésio; Lewiner, Thomas. **Reconstrução de Geometria Baseado na Conectividade e em Amostras da Malha**. Rio de Janeiro, 2007. 58p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho busca reconstruir a geometria de uma malha partindo de sua conectividade e de um conjunto esparso de pontos com geometria conhecida, denominados pontos de controle. O problema é formulado como a maximização da suavidade da superfície fixando a posição dos pontos de controle. Nessa formulação, o método consiste em resolver um sistema linear esparso aplicando-se mínimos quadrados. Diferentes propostas para a seleção de pontos de controle, o método de minimização e a construção do sistema linear são apresentadas e comparadas.

## Palavras-chave

Aproximação de forma. Minimização Quadrática. Malha Laplaciana.

## Abstract

Borges, Catiúscia; Pesco, Sinésio; Lewiner, Thomas. Reconstruction of Geometry Based in Connectivity and Mesh Samples. Rio de Janeiro, 2007. 58p. MsC Thesis — Departament of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims at reconstructing the geometry of a mesh from its connectivity and a small set of control points, whose geometry is known. The problem is formulated as a maximization of the surface smoothness restricting the position of the control points. With this formulation, the method reduces to solving a sparse linear system using least squares minimization. Several proposals for the selection of the control points, the minimization method and the linear system construction are presented and compared .

## Keywords

Shape Approximation. Least-Square Minimization. Laplacian Mesh.

# Sumário

1	Introdução	8
1.1	Motivação e Trabalhos Relacionados	8
1.2	Contribuição	8
1.3	Visão Geral	10
2	Preliminares	11
2.1	Objetos Gráficos Discretos	11
2.2	Minimização Quadrática	15
2.3	Operadores Laplacianos	19
2.4	Curvatura	21
2.5	Estrutura de Dados	24
3	Reconstrução de Malha por Minimização	26
3.1	Descrição do Problema	26
3.2	Formulação do Problema	27
4	Resultados	38
4.1	Estimativa de Erro	38
4.2	Resultados Preliminares	39
4.3	Comparação dos Métodos de Seleção dos Pontos de Controle	42
4.4	Comparação com Diferentes Percentuais de Pontos de Controle	47
4.5	Comparação entre Laplaciano e Laplaciano Simétrico	49
4.6	Valência dos Vértices	51
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	56
Refe	erências Bibliográficas	57

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação e Trabalhos Relacionados

A representação de objetos através de malhas triangulares é muito utilizada em computação gráfica, pois permite a visualização de objetos complexos de uma maneira estruturada. Tão importante quanto a representação de uma curva ou superfície são as compressões das mesmas, pois o tamanho e a riqueza de detalhes do modelo implicam diretamente em um número maior de informações, e um algoritmo de compressão eficiente permite que apenas parte destas informações sejam armazenadas.

Assim, a descompressão ou a reconstrução de curvas e superfícies é um tópico-chave em computação gráfica, e tem motivado muitos estudos com as mais diversas técnicas. Como Isenburg et al (8) que propõe a reconstrução de superfícies levando em consideração somente a conectividade da malha e supondo que todas as arestas são do mesmo comprimento, trabalhos como o de Blinn (2), Ohtake et al (13) e Turk e O'Brien (18) utilizam funções implícitas aproximadas a um conjunto de pontos e a partir destes define uma função que extraia a curva ou superfície. Outra técnica utilizada é a partir de um conjunto de curvas bidimensionais situadas em planos paralelos (3), ou através de uma parametrização global distribuindo os vértices de uma maneira razoável na malha, enquanto satisfazem a algumas condições (5).

## 1.2 Contribuição

Este trabalho propõe a reconstrução por mínimos quadrados de uma malha a partir da sua conectividade e de um conjunto de pontos de controle. Com estes dados resolve-se um sistema linear esparso através do método do gradiente conjugado. O sistema linear descreve a geometria de uma superfície que aproxima os pontos de controle dados e distribui os vértices sobre a superfície de uma maneira uniforme entre os pontos de controle. A malha de mínimos quadrados é uma aproximação suave e uniforme dos pontos dados mantendo a conectividade de entrada. O uso de matrizes esparsas para a construção de sistemas lineares é muito habitual (16)(9)(15), já que este tipo de matriz nos permite diversos tipos de algoritmos de maneira estruturada. Trabalhos como o de Lipman et al (12) faz uso de dois sistemas lineares esparsos para a reconstrução de uma superfície, onde o primeiro sistema define o relacionamento entre as estruturas locais da malha e o segundo codifica a posição dos vértices através das estruturas locais. Isto descreve um esquema de reconstrução linear de superfície que restaura a geometria das formas discretas e, além disso, é uma técnica de interpolação que minimiza a distorção elástica. A matriz esparsa deste trabalho assim como o trabalho de Sorkine e Cohen-Or em Least-squared Meshes (16) e de Sorkine em Laplacian Mesh Processing (15) armazena a conectividade da malha e apenas alguma informação geométrica, com o intuito de mostrar que a conectividade é um fator muito importante e é capaz de fornecer informações interessantes.

Os pontos selecionados como de controle (ou somente pontos de controle) são responsáveis pela informação geométrica da malha (Figura: 1.1), e contribuem significativamente para a reconstrução da mesma (Figura: 1.2). O critério de seleção destes pontos é muito importante, pois ao utilizar uma técnica adequada a malha de mínimos quadrados pode aproximar melhor a malha original e minimizar o erro geométrico.



Figura 1.1: Malha triangular de um dragão com 437645 vértices, dentre eles 35011 (em destaque) guardam informações geométricas do modelo.



Figura 1.2: Malha reconstruída com a conectividade e os 35011 vértices de controle, isto é, com 8%da geometria

## 1.3 Visão Geral

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: o capítulo 2 define os conceitos básicos: objetos gráficos discretos, a minimização quadrática, expõe algumas informações sobre Operadores Laplacianos, curvatura e faz uma apresentação da estrutura de dados usada. No capítulo 3 informações a respeito da implementação do programa serão expostas. No capítulo 4 serão estudados os resultados e uma breve discussão sobre as questões a serem consideradas. Por fim, no capítulo 5 será apresentada a conclusão e a proposta para trabalhos futuros.

# 2 Preliminares

Nesta seção vamos rever alguns conceitos preliminares que estarão presentes ao longo deste trabalho.

## 2.1 Objetos Gráficos Discretos

#### 2.1.1 Simplexos

**Definição 2.1** Politopo: Seja K um conjunto finito de pontos em  $\mathbb{R}^{K}$ , chamaremos de Politopo o fecho convexo de K.

Um k-politopo é um politopo de dimensão k.

**Definição 2.2** Simplexos: Um simplexo  $\sigma$  de dimensão k, é o fecho convexo de k+1 pontos  $\{v_0, ..., v_k\}$ , onde  $v_i \in \mathbb{R}^m$ , em posição geral, ou seja, os vetores formados  $v_j - v_0$ , com j = 1...k são linearmente independentes.

Um simplexo de dimensão k é chamado de k-simplexo, em particular, 0-simplexo é chamado de *ponto* ou *vértice*, 1-simplexo é chamado de *segmento* ou *aresta* e 2-simplexo é chamado de *triângulo*.

Também podemos definir k-simplexo como um k-politopo com k+1 vértices.

Dado um k-simplexo  $\sigma$ , sua dimensão será denotada por  $\dim(\sigma) = k$  e o conjuntos dos seus vértices por  $V_{\sigma}$ .

**Definição 2.3** *p*-Face: Um *p*-simplexo  $\gamma$  gerado a partir de um subconjunto  $V_{\gamma} \subseteq V_{\sigma}$ , dos vértices de um k-simplexo  $\sigma$ , com  $p \leq k$ , é chamado de *p*-face de  $\sigma$ ;

Quando não houver ambigüidade, a dimensão de  $\gamma$  será omitida e será dito somente que  $\gamma$  é uma face de  $\sigma$ . E sendo  $\gamma$  uma face de  $\sigma$  será dito que  $\sigma$ é incidente a  $\gamma$  e que  $\sigma$  é uma co-face de  $\gamma$ .

Um simplexo é uma face própria de um simplexo  $\sigma$  se  $\dim(\gamma) < \dim(\sigma)$ . O simplexo gerado a partir do subconjunto vazio  $V_{\gamma} = \emptyset$  é, por convenção, uma (-1)-face de todo k-simplexo, com  $k \ge 0$ . **Definição 2.4** Bordo de um simplexo: O bordo de um p-simplexo  $\sigma$ , denotado por  $\partial\sigma$ , é a coleção de todas as faces próprias de  $\sigma$ .

O interior de um simplexo  $\sigma$ , é definido como  $Int(\sigma) = \sigma - \partial \sigma$ 

## 2.1.2 Complexos Simpliciais

**Definição 2.5** Complexo Simplicial: um complexo simplicial  $\Sigma$  é um conjunto finito de simplexos tais que:

- 1. Se  $\sigma \in \Sigma$ , então todas as faces de  $\sigma$  pertencente a  $\Sigma$ .
- 2. Se  $\sigma, \gamma \in \Sigma$ , então  $\sigma \cap \gamma$  é uma face própria de  $\sigma \in \gamma$ .

Esta segunda condição faz com que dois 2-simplexos possuam apenas como interseção vértices ou arestas.

A dimensão de um complexo simplicial  $\Sigma$  é definida como um número inteiro  $d = \max \{ \dim(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma \}$ , e dizemos que  $\Sigma$  é um *complexo simplicial d*-dimensional ou *d*-complexo simplicial.

O poliedro de um *d*-complexo simplicial  $\Sigma$  imerso em  $\mathbb{R}^m$ , com  $0 \leq d \leq m$ , denotado por  $|\Sigma|$ , é o subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  definido pela união, como conjunto de pontos, de todos os simplexos  $\Sigma$ . Um *subcomplexo simplicial* de  $\Sigma$  é qualquer subconjunto  $\Sigma^*$  composto por simplexos  $\Sigma$  tal que  $\Sigma^*$  também é um complexo simplicial.

#### 2.1.3 Relações entre simplexos

A conectividade de um complexo se refere às relações entre os seus simplexos, caracterizados pelas duas definições seguintes:

**Definição 2.6** Estrela: A Estrela de um simplexo  $\sigma \in \Sigma$ , denotada por star  $(\sigma, \Sigma)$ , é a união de todos os simplexos  $\gamma \in \Sigma$  que são co-face de  $\sigma$ .

**Definição 2.7** Elo: O Elo de um simplexo  $\sigma \in \Sigma$ , denotado por link  $(\sigma, \Sigma)$ , é o subconjunto de simplexos  $\gamma \in \Sigma$  tais que:

- 1.  $\gamma$  é face de algum simplexo  $\psi \in star(\sigma, \Sigma)$
- 2.  $\gamma \notin star(\sigma, \Sigma)$

Um simplexo  $\sigma \in \Sigma$  é chamado de simplexo topo se star  $(\sigma, \Sigma) = \{\sigma\}$ . Se um d-complexo  $\Sigma$  é tal que todos os seus d-simplexos são de topo, então  $\Sigma$  é um complexo regular. **Definição 2.8** Simplexos h-Adjacentes: Dois simplexos  $\sigma \ e \ \gamma \ s$ ão p-adjacentes quando existe uma h-face comum a eles.

**Definição 2.9** h-Conectados: Dois simplexos  $\psi \in \gamma$  são h-conectados se e somente se existe uma seqüência de simplexos  $(\sigma_i), i \in 0 \cdots n$  tal que:

- 1. Dois simplexos consecutivos  $\sigma_{i-1}$ ,  $\sigma_i$  são *h*-adjacentes;
- 2.  $\psi \in \gamma$  são faces de  $\sigma_0 \in \sigma_n$  respectivamente.

## 2.1.4 Componentes Conexas

Um subcomplexo  $\Sigma^*$  de um complexo simplicial  $\Sigma$  é *h*-conexo se e somente se todos os seus vértices são *h*-conectados. Um subcomplexo maximal em  $\Sigma^*$ , *h*-conexo, é chamado de *h*-componente conexa de  $\Sigma$ .

**Definição 2.10** Componente conexa: Seja  $\Sigma^*$  um subcomplexo simplicial de  $\Sigma$ , então  $\Sigma^*$  é uma componente de  $\Sigma$  se e somente se  $\Sigma^*$  é uma 0-componente conexa de  $\Sigma$ .

#### 2.1.5

#### Variedade

**Definição 2.11** Simplexo Variedade: Um (d-1)-simplexo  $\sigma$  de um dcomplexo simplicial  $\Sigma$  é um (d-1)-simplexo variedade se e somente se existem no máximo dois d-simplexos em  $\Sigma$  incidentes a  $\sigma$ .

Caso  $\sigma$  não seja um simplexo variedade, então  $\sigma$  será chamado de simplexo não-variedade.

**Definição 2.12** Homeomorfismo: Dizemos que dois subconjuntos de um espaço topológico são homeomorfos se existe uma bijeção contínua de um subconjunto para o outro cuja inversa também é contínua.

**Definição 2.13** Pseudo-Variedade Combinatória: um d-complexo  $\Sigma$ ,  $|\Sigma| \subset \mathbb{R}^m$ , é uma pseudo-variedade combinatória de dimensão d, se e somente se:

- 1.  $\Sigma$  é um complexo regular (d-1)-conectado;
- 2. Todo (d-1)-simplexo  $\sigma \in \Sigma$  é um (d-1)-simplexo variedade.

Uma pseudo-variedade combinatória de dimensão p, será chamada de pseudo-p-variedade.

Um complexo simplicial  $\Sigma,$ imerso em  $\mathbb{R}^m$ possui as seguintes propriedades:

- 1.  $\Sigma$  é uma pseudo-*m*-variedade;
- 2. Os simplexos topo incidentes a um (d-2)-simplexo  $\sigma$  podem ser ordenados em torno de  $\sigma$ .

**Definição 2.14** Variedade Combinatória: Uma pseudo-k-variedade  $\Sigma$ ,  $|\Sigma| \subset \mathbb{R}^m$ , tal que, para todo vértice  $v \in \Sigma$ , star  $(v, \Sigma)$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^k$  ou  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{k-1}$  é chamada de variedade combinatória de dimensão k, ou simplesmente de k-variedade combinatória.

**Definição 2.15** Orientabilidade: Seja  $\Sigma$  uma k-variedade combinatória. A orientação de dois k-simplexos adjacentes  $\sigma$  e  $\gamma$  pertencentes a  $\Sigma$  é coerente se o (k-1)-simplexo  $\psi$  que compartilham tem orientações opostas em cada um dos simplexos.

A variedade  $\Sigma$  é orientável se podemos escolher uma orientação que é coerente para cada par de simplexos.

Para facilitar o entendimento e simplificar a notação, uma k-variedade combinatória orientada será chamada de k-variedade, o número de 0-simplexos, 1-simplexos e 2-simplexos existentes em  $\Sigma$  será denotado respectivamente por  $v, e \in f$  e o número de k-simplexos existentes em  $\Sigma$  será denotado por  $n_k$ .

**Definição 2.16** Simplexos de Bordo: Um (k-1)-simplexo de uma kvariedade incidente a somente um k-simplexo é chamado de simplexo de bordo.

Os simplexos que não são de bordos são chamados de *simplexos interiores*. Todas as faces de um simplexo de bordo também são simplexos de bordos.

**Definição 2.17** bordo de Variedades: O bordo de uma k-variedade  $\Sigma$ , é a união de todos os seus simplexos de bordo, e será denotado por  $\partial \Sigma$ .

#### 2.1.6

#### Triangulações e Malhas Triangulares

**Definição 2.18** Triangulação: Uma d-triangulação é definida como um dcomplexo simplicial.

Uma triangulação é dita planar se todos seus pontos pertencem a um mesmo plano.

**Definição 2.19** Malha Triangular: S = (V, E, F) é dita uma malha triangular, se  $V = \{1, ..., n\}$  representa o conjunto de índices dos vértices, E o conjunto das arestas e F o conjunto de faces triangulares.

A valência de um vértice i, denotada por  $d_i$ , é determinada pelo número de vértices j que formam uma aresta com i, podemos dizer que os vértices jsão vizinhos do vértice i, que estão na vizinhança de i, ou ainda que são os vértices j pertencentes ao elo do vértice i.

## 2.1.7 Propriedades Topológicas

Determinadas propriedades de uma malha S não dependem da triangulação, mas são determinadas pelas propriedades topológicas de |S|. Por exemplo, adotando v como o número de pontos, e como o número de arestas e f como o número de faces de S. Então a Característica de Euler  $\chi(S)$  é definida por:

$$\chi\left(S\right) = v - e + f$$

**Teorema 2.20** Seja  $\Sigma$  um poliedro sem bordo em  $\mathbb{R}^3$ , com genus g(S), então:

$$\chi\left(S\right) = 2 - 2 g\left(S\right)$$

**Corolário 2.21** Seja  $\Sigma$  um poliedro com genus g(S) sem bordo, onde v é o número de vértices, e é o número de arestas e f é o número de faces, então:

$$f \le 2v - 4 + 4 g(S)$$
$$e \le 3v - 6 + 6 g(S)$$

a igualdade vale se somente se  $\Sigma$  for poliedro simplicial.

Sendo S uma triangulação sem bordo então, leva-se em conta a multiplicidades, cada face contribui com 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, daí:

$$3f = 2e$$

Então, em uma malha triangular

$$\chi(S) = v - \frac{f}{2} = v - \frac{e}{3}$$

Desta forma tem-se duas vezes mais faces que vértices e três vezes mais arestas que vértices.

## 2.2 Minimização Quadrática

# 2.2.1

# Método dos Mínimos Quadrados

O problema linear de mínimos quadrados é um importante problema computacional, que originalmente surgiu da necessidade de adaptar um modelo linear matemático a observações dadas, reduzindo assim a influência de erros nessas observações. Em geral temos um número maior de observações do que o número de parâmetros desconhecidos no modelo. O problema resultante é modelado como um sistema de equações lineares com mais equações do que variáveis: em termos matriciais, dado um vetor  $b \in \mathbb{R}^m$  e uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ , encontrar um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que Ax é a melhor aproximação para b.

Existem alguns caminhos possíveis de definir a melhor solução. Uma escolha que freqüentemente motiva argumentos estatísticos e que também conduz a um problema computacional simples é definir x como a solução para a minimização do problema :

$$\min_{x} \left\| Ax - b \right\|_{2}, \quad A \in \mathbb{R}^{mxn}, \quad b \in \mathbb{R}^{m},$$

onde  $\|.\|_2$  denota a norma vetorial euclidiana. Este problema é chamado de problema linear de mínimos quadrados e x uma solução linear de mínimos quadrados de um sistema Ax = b. O vetor r = b - Ax é o vetor residual. Se o posto da matriz A é menor que n, então a solução x não é única. No entanto, dentre todas as soluções de mínimos quadrados existe uma única solução que minimiza  $\|x\|_2$ .

Uma caracterização do conjunto de todas as soluções do problema de mínimos quadrados descrito acima pode ser definida da seguinte maneira:

Seja  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||Ax - b||_2 = \min\}$  o conjunto de todas as soluções do problema. Então  $x \in S$  se e somente se a seguinte condição de ortogonalidade assegura : $A^T Ax = A^T b$ , a equação normal ou  $A^T (b - Ax) = 0$ , a equação normal fatorada.

## 2.2.2 Métodos Iterativos

Considerando o problema de mínimos quadrados:

$$\min_{x} \|Ax - b\|_2$$

A principio todo método iterativo para um sistema linear simétrico definido positivo pode ser aplicado ao sistema de equações normais  $A^T A x = A^T b$ . No entanto, a explicita formação da matriz  $A^T A$  pode ser evitada usando

a forma fatorada das equações normais:

$$A^T (b - Ax) = 0$$

A manipulação com  $A \in A^T$  separadamente possui duas vantagens importantes. Em primeiro lugar uma pequena perturbação em  $A^T A$  pode mudar muito mais a solução do problema do que a mesma perturbação na própria matriz A. Em segundo, a formação  $A^T A$  pode gerar uma matriz não esparsa, e mesmo que gere uma matriz esparsa, forçosamente a representação destas matrizes não será otimizada.

Para algumas classes de problemas esparsos fornecer a solução através de métodos diretos faz com que o armazenamento das informações e operações sejam caros. Por exemplo, quando  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz esparsa grande,  $A^T A$  é uma matriz quase densa. Note que se  $A^T A$  é densa e se A tem uma série de fortes propriedades, então o fator de Cholesky R também será denso, tirando de qualquer possibilidade os métodos baseados na decomposição QR. Isto contrasta com o caso denso onde os elementos na parte triangular superior de  $A^T A$  são sempre menores que mn  $(m \ge n)$  elementos de A diferentes de zero. Esta tese trabalha com uma matriz esparsa  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  grande, onde m > n.

Considerando também o método iterativo para computar uma solução que minimiza a norma de um consistente sistema indeterminado,

$$\min \|y\|_2, \qquad A^T y = c$$

Se  $A^T$  tiver posto máximo a solução única satisfaz as equações normais.

$$y = Az, \qquad A^T(Az) = c$$

Nos métodos iterativos uma solução aproximada inicial é trabalhada sucessivamente até que uma solução aceitável seja obtida. A matriz A não necessita ser armazenada, pois pode ser substituída por vetores que armazenam as suas informações essenciais. Isto faz com que os métodos iterativos sejam especialmente atrativos para solucionarem problemas com matrizes esparsas.

A principal desvantagem dos métodos iterativos é sua escala pobre de robustez que muitas vezes limitam sua gama de aplicabilidade. Uma solução iterativa particular pode ser encontrada eficientemente para uma específica classe de problemas, mas se usada para outros casos pode ser excessivamente lenta ou perder a validade. Métodos iterativos pré-condicionados, que são baseados em uma fatoração aproximada, podem ser considerados como uma solução conciliatória entre métodos diretos e iterativos.

A implementação eficiente de um método iterativo depende substancialmente do desempenho do produto entre a matriz esparsa e um vetor (Ave  $A^Tu$ ). Em algumas aplicações pode ser possível expressar os elementos do produto entre matriz-vetor através de uma simples fórmula, desta forma eliminando a necessidade de explicitar a matriz A. Quando este não é o caso, a escolha da estrutura de dados que armazena a matriz esparsa A é crucial para eficiência. Idealmente somente os elementos de A diferentes de zero devem ser armazenados e operados. Observamos desde já que este foi o caso deste trabalho onde a matriz esparsa é armazenada diretamente na estrutura da triangulação, como será apresentado na seção 3.2.

## 2.2.3 Gradiente Conjugado

O método de Gradiente Conjugado foi desenvolvido na década de cinqüenta por Hestenes e Stiefel (6). Como sua convergência é dada em até *n* passos foi primeiramente considerado como um método direto. Porém, não temos garantia da precisão alcançada, e o método entrou em pleno uso nos meados dos anos setenta quando foi considerado um método iterativo. Assim tornou-se uma ferramenta padrão para as soluções de sistemas lineares esparsos e problemas lineares de mínimos quadrados. No trabalho original de Hestenes e Stiefel, foi dada uma versão do método do gradiente conjugado para solução de equações normais. Läuchli (11) foi o primeiro a discutir o método de Gradiente Conjugado pré-condicionado e aplicá-lo para resolver problemas geodésicos por mínimos quadrados.

O método do Gradiente Conjugado é um caso especial do Método do Espaço de Krylov (1). Segue um resumo dessa teoria:

**Definição 2.22** Subespaço de Krylov: Dada a Matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um vetor  $c \in \mathbb{R}^n$  o Subespaço de Krylov  $K_k(B,c)$  é:

$$K_k(B,c) = span\left\{c, Bc, ..., B^{k-1}c\right\}$$

A k-ésima iteração no método do gradiente conjugado é unicamente determinada pela seguinte propriedade variacional. Seja  $\hat{x} = A^T b$  a solução pseudo-inversa e  $\hat{r} = b - A\hat{x}$  o resíduo correspondente. Então  $x^{(k)}$  minimiza o erro funcional

$$E_{\mu}(x^{(k)}) = (\hat{x} - x^{(k)})^{T} (A^{T}A)^{\mu} (\hat{x} - x^{(k)})$$

Sobre todo vetor  $x^{(k)}$  no subespaço finito.

$$x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k \left( A^T A, s^{(0)} \right), \qquad s^{(0)} = A^T \left( b - A x^{(0)} \right)$$

Somente os valores  $\mu = 0, 1, 2$  são usados na prática, e seus correspondentes para cada caso:  $\mu = 0$  minimiza  $\|\hat{x} - x^{(k)}\|_2$ ,  $\mu = 1$  minimiza  $\|\hat{r} - r^{(k)}\|_2^2 = \|r^{(k)}\|_2^2 - \|\hat{r}\|_2^2$ ,  $\mu = 2$  minimiza  $\|A^T(\hat{r} - r^{(k)})\|_2^2 = \|s^{(k)}\|_2^2$ 

Considerar  $\mu = 0$  é somente praticável quando o sistema Ax = b é consistente. Neste caso, denotando por  $s^{(k)} = A^T r^{(k)}$  o resíduo da equação normal, então:

$$(s^{(k)})^{T} (A^{T}A)^{-1} s^{(k)} = (b - Ax^{(k)}) A (A^{T}A)^{-1} A^{T} (b - Ax^{(k)}) = (r^{(k)})^{T} r^{(k)}$$

onde  $A(A^T A)^{-1} A^T$  é a projeção ortogonal de  $\Re(A)$ , sendo que  $\Re(A) = \{z = Ax \mid x \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$  denota o do espaço coluna da matriz A. A expressão para  $E_1(x^{(k)})$  segue do fato que  $\hat{r} \perp \hat{r} - r^{(k)}$ .

A propriedade variacional do gradiente conjugado implica que o erro funcional  $E_{\mu}(x^{(k)})$  diminui monotonamente. Para  $\mu = 1$ ,  $||r^{(k)}||$  também diminuirá monotonamente. A seguinte estimativa da taxa de convergência é conhecida por assegurar:

$$E_{\mu}(x^{(k)}) < 2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k} E_{\mu}(x^{(0)}),$$

onde  $k = k(A) = \sqrt{k(A^T A)}$ .

Para  $\mu = 1$  é assumido que tanto  $\|\hat{r} - r^{(k)}\|$  quanto  $\|\hat{x} - x^{(k)}\|$  diminuem monotonamente, mas  $\|A^T r^{(k)}\|$  frequentemente exibirá oscilações quando k(A)é grande. Este comportamento não é um resultado dos erros de arredondamentos. Para  $\mu = 2$ ,  $\|A^T r^{(k)}\|$  também diminui monotonamente, mas esta escolha  $\mu = 2$  atrasa a convergência e diminui a precisão final em  $\|\hat{r} - r^{(k)}\|$  e  $\|\hat{x} - x^{(k)}\|$ . Isto também requer mais operações e passos.

No capítulo 3 será exposto o algoritmo do método de gradiente conjugado.

#### 2.3 Operadores Laplacianos

O Operador Laplaciano apareceu primeiramente para formalizar a difusão térmica através da equação do calor, essa equação descreve a maneira como calor se difunde em um meio homogêneo, e serve também para a difusão de qualquer substância que obedeça a Lei de Difusão de Fick. Essa equação já gerou muitas aplicações em processamento de imagens (17).

A discretização do Operador Laplaciano (ou Operador de Laplace) de funções suaves para malhas simpliciais pode ser obtida de algumas maneiras diferentes. O operador laplaciano pode incluir mais informações combinatórias ou mais informações geométricas, dependendo da estrutura da malha ou de outras informações relacionadas a malha.

#### Laplaciano

O ponto de visão puramente combinatório ignora informações métricas como comprimentos de arestas ou ângulos da malha. Toda informação sobre uma malha combinatória é baseada na sua conectividade. A conectividade da malha pode ser expressa através de Matriz de Adjacência.

**Definição 2.23** Matriz Adjacência: Seja E o conjunto das arestas de uma malha M = (V, E, F), então a matriz de adjacência A de uma malha conexa é uma matriz  $n \times n$  dada por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & Se\left\{i,j\right\} \in E\\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

A matriz A é uma matriz esparsa, ou seja é uma matriz que possui relativamente poucas entradas diferentes de zero. E mais que isso o somatório das entradas da i-ésima linha é igual a valência  $d_i$  do vértice *i*. Na nossa implementação o armazenamento de uma matriz esparsa não é feito explicitamente.

**Definição 2.24** Matriz Laplaciana: Seja D uma matriz diagonal com entradas  $d_{ii} = \frac{1}{d_i}$  onde  $d_i$  é a valência do vértice  $v_i$ , com  $i \in V$ , então a matriz

$$L = I - DA$$

Isto é,

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & Sei = j \\ \frac{-1}{d_i} & Se\left\{i, j\right\} \in E \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

é o Laplaciano Combinatório da malha, Laplaciano da malha, ou Matriz Laplaciana da malha.

#### Laplaciano Simétrico

**Definição 2.25** Matriz Laplaciana Simétrica: Seja D uma matriz diagonal com entradas  $d_{ii} = \frac{1}{d_i}$  onde  $d_i$  é a valência do vértice  $v_i$ , com  $i \in E$ , então a matriz

$$LS = D^{-1} - A$$

Isto é,

$$LS_{ij} = \begin{cases} d_i & Sei = j \\ -1 & Se\left\{i, j\right\} \in E \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

é a Matriz Laplaciana Simétrica da Malha

#### 2.4 Curvatura

Seja S uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$ , descrita por uma parametrização arbitrária. Para cada ponto sobre a superfície, podemos aproximar localmente a superfície pelo seu plano tangente, ortogonal ao vetor normal n. Variações locais da superfície são medidas pelas curvaturas. Para toda direção  $e_{\theta}$  no plano tangente, a curvatura normal  $K^N(\theta)$  é definida como a curvatura da curva que percorre a própria superfície e o plano que contém n e  $e_{\theta}$ . As curvaturas principais  $K_1 e K_2$  da superfície S, com as suas direções ortogonais associadas  $e_1 e e_2$  são os valores extremos de todas as curvaturas normais. A curvatura média  $K_H$  é definida como a média da curvatura normal:

$$K_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K^N(\theta) \ d\theta.$$

Expressando a curvatura normal em termos das principais curvaturas,  $K^{N}(\theta) = K_{1} \cos^{2}(\theta) + K_{2} \sin^{2}(\theta)$ , assim a curvatura média pode ser descrita como:  $K_{H} = (K_{1} + K_{2}) / 2$ . A curvatura gaussiana  $K_{G}$  é definida como o produto das curvaturas principais:

$$K_G = K_1 K_2$$

As curvaturas gaussiana e média representam importantes propriedades locais de uma superfície. Lagrange observou que  $K_H = 0$  minimização a área da superfície. Isto deu atenção a um considerável corpo da literatura sobre superfícies mínimas e fornece a relação direta entre minimização da área de uma superfície e curvatura média:

$$2K_H \ n = \lim_{diam(A)\to 0} \frac{\nabla A}{A}$$

onde A é uma área infinitesimal em torno de um ponto v sobre a superfície, diam (A) é o seu diâmetro, e  $\nabla$  é o gradiente com respeito as coordenadas do ponto v. K é definido como o operador que faz aplicação de um ponto vsobre a superfície para o vetor  $K(v) = 2K_H(v) n(v)$ , onde  $K_H$  é a curvatura média e n é o vetor normal. Este operador é conhecido como Operador de Laplace-Beltrami para a superfície S.

#### 2.4.1 Curvatura Gaussiana Discreta

Sobre uma superfície triangulada, a curvatura gaussiana discreta é concentrada em seus vértices isoladamente, desde que todos os outros pontos sobre a superfície possuam uma vizinhança isométrica a um domínio Euclidiano planar com curvatura zero.

**Definição 2.26** Seja S uma superfície triangulada e  $v \in S$  um vértice. Seja  $\{f_1, ..., f_m\}$  o conjunto de faces da estrela de v, e seja  $\theta_i$  o ângulo da face  $f_i$  no vértice v. Então o ângulo total  $\theta(v)$  é dado por:

$$\theta(v) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(v)$$

Todos os pontos de uma superfície triangulada podem ser classificados de acordo com o sinal resultante do ângulo excedente  $2\pi - \theta(v)$ 

**Definição 2.27** Um vértice v de uma superfície triangulada S com ângulo total do vértice  $\theta(v)$  é definido como Euclidiano, Esférico ou Hiperbólico se seu ângulo excedente  $2\pi - \theta(v)$  é igual a zero, maior que zero e menor que zero.

Os ângulos dos vértices determinam diretamente a curvatura gaussiana discreta em termos métricos de uma superfície triangulada S.

**Definição 2.28** A curvatura gaussiana discreta K(v) de um vértice v de uma superfície triangulada S é definida como o ângulo excedente:  $K(v) = 2\pi - \theta(v)$  $= 2\pi - \sum_{i=1}^{m} \theta_i(v)$  A curvatura gaussiana total K(S) de uma superfície poliédrica S é o somatório da curvatura gaussiana de todos os vértices de S. Assim:

$$K(S) = \sum_{v \in S} K(v)$$

## 2.4.2 Curvatura Média Discreta

O vetor curvatura média sobre uma superfície determina uma medida de modo que a área da superfície possa ser comparada a uma superfície aproximada, que significa, se uma superfície é deslocada constantemente ao longo da superfície normal, então uma aproximação será usada para medir a variação de uma pequena região.

A área de uma superfície triangulada é definida como o somatório da área de todos os seus elementos, esta relação pode ser expressa em termos dos vértices e ângulos dos vértices. Seja T um triangulo com vértices  $v_i$  e os ângulos  $\alpha_i$ , então:

area 
$$T = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{3} \cot \alpha_j |v_{j-1} - v_{j+1}|^2$$

Para aplicações práticas a fórmula do gradiente da área em termos intrínsecos da malha poliédrica pode ser derivada.

#### Laplaciano, Curvatura Média e Superfície Mínima

O vetor curvatura média (H) pode ser definido como o vetor constituído dos Laplacianos das funções coordenadas ( $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ), ou seja:

$$H = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

o que nos leva a:

$$H(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in vizinhanca \ de \ i} (\cot \ \alpha_{ij} + \cot \ \beta_{ij}) \ (v_i - v_j)$$

onde  $\alpha_{ij} \in \beta_{ij}$  são os ângulos opostos a aresta cujos extremos são os vértices  $v_i$  e  $v_j$ .

Superfícies Mínimas são caracterizadas por terem uma área mínima quando comparada a superfícies com o mesmo bordo. Esta propriedade variacional originou o interesse em superfícies mínimas. Superfícies mínimas podem ser geometricamente caracterizadas por terem curvatura média nula, isto é:

$$H(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in vizinhanca \ de \ i} (\cot \ \alpha_{ij} + \cot \ \beta_{ij}) \ (v_i - v_j) = 0$$

Nesse trabalho, usamos Laplacianos discretos para completar superfícies, considerando que minimizar um laplaciano gera de alguma forma a superfície "mais simples".

A curvatura média discreta está diretamente ligada a variação da área de uma superfície (7)(14).

#### 2.5 Estrutura de Dados

A estrutura de dados usada neste trabalho é uma estrutura topologicamente escalonável chamada Compact Half-Edge (10). Tal estrutura é composta por 4 níveis que são diferenciados pela razão entre a quantidade de dados armazenados e a eficiência computacional. A medida que o nível da estrutura aumenta armazenamos mais informações, evitando recalcular informações já armazenadas e assim aumentando a eficiência computacional.

O Nível 0 é o primeiro nível e é comumente chamado de "sopa de triângulos", pois não há a intenção de armazenar diretamente e eficientemente relações de adjacências e incidências. Armazena apenas informações essenciais para a representação de uma malha triangular, como a geometria dos vértices e os triângulos que a compõe.

Os elementos referentes aos triângulos são acessados através do conceito de Half-Edge, que é uma aresta dotada de uma orientação por um dos seus triângulos incidentes. A manipulação destes é feita através de regras aritméticas, ou por algoritmos simples.

No Nível 1 a malha deixa de ser tratada como uma "sopa de triângulos" e relações de adjacência entre triângulos são armazenadas. Esta relação de adjacência permite que triângulos sejam percorridos de maneira eficiente e assim o acesso a Half-Edge oposta passa a ser em tempo constante.

Note que cada aresta é incidente a no máximo dois triângulos. O que permite classificá-las como de interior ou de bordo, considerando que uma aresta terá duas Half-Edge quando for de interior e uma quando for de bordo.

O Nível 2 representa explicitamente cada simplexo da variedade combinatória. Em particular fornece uma representação explícita para cada vértice da malha, o que será de grande interesse para este trabalho.

Tal representação consiste em identificar uma aresta por meio de uma das suas Half-Edges e em armazenar para cada vértice o índice de uma HalfEdge incidente. Esta ultima possibilita a classificação de forma simples de um vértice da malha como interior ou exterior.

No Nível 3 é adicionada a representação explícita para as curvas de bordos. Esta representação permite a obtenção da primeira Half-Edge incidente de cada curva de bordo da malha, e a partir desta, percorrer todas as Half-Edges de bordo do Modelo.

Este trabalho foi desenvolvido no Nível 2 desta estrutura de dados, pois fornece o melhor meio-termo entre espaço para armazenamento e tempo de computação para as aplicações implementadas.

# 3 Reconstrução de Malha por Minimização

Neste capítulo apresentaremos a formalização do problema de reconstrução da geometria de malhas seguindo a proposta de Sorkine (16) e o método computacional que usamos para resolvê-lo.

## 3.1 Descrição do Problema

Este trabalho propõe a reconstrução de uma malha a partir da sua conectividade e da geometria de alguns pontos. Dada uma malha com conectividade arbitrária e um subconjunto de pontos selecionados como de controle, construímos e resolvemos um sistema linear esparso representando a forma normal da minimização do Laplaciano. A solução do sistema linear corresponde a geometria dos vértices da malha, buscando uma distribuição suave e uniforme sobre a superfície.

A maioria dos métodos que representam uma superfície geométrica usa amplamente malhas poligonais baseada na geometria e na conectividade da malha. A primeira determina a localização de cada vértice no plano ou no espaço e a segunda determina como os vértices estão conectados formando os polígonos que descrevem a superfície. É natural imaginar que estas duas componentes da malha são independentes, isto é, muitas malhas distintas poderiam co-existir com uma geometria dada. Embora isso seja teoricamente verdade, várias aplicações para representação de curvas ou superfícies nos levam a acreditar que existe uma correlação entre as duas, principalmente se levarmos em consideração que boas triangulações fazem com que a geometria da malha seja suave e uniforme.

Uma questão interessante nesta tese é o fato de trabalharmos com uma malha, onde somente um subconjunto de vértices contém informações geométricas. Assim como Isenburg et al (8) e Sorkine et al (16), queremos mostrar que uma malha tem alguma forma natural, ou seja, mostramos que uma malha simples contém algumas informações geométricas não-triviais.

A solução usada neste trabalho é baseada na malha de mínimos quadrados (16). Propomos uma representação eficiente dos sistemas lineares envolvidos na minimização. Essa representação esta embutida na malha, como descrito na seção 3.2. A minimização propriamente dita é feita pelo método do gradiente conjugado e foi implementada nesta mesma representação.

## 3.2 Formulação do Problema

Sejam M = (V, E, F) uma malha triangular com conectividade arbitrária, L a Matriz Laplaciana e  $L_S$  a Matriz Laplaciana Simétrica de M, tal que L e  $L_S$  são matrizes de ordem  $n \times n$  e n é o número de vértices da malha. Sejam x, y, z vetores de dimensão n. A regularidade e suavidade de M pode ser descrita como:

 $L \cdot x = 0, L \cdot y = 0, L \cdot z = 0$ , para Matriz Laplaciana. Outra formulação é:  $L_S \cdot x = 0, L_S \cdot y = 0, L_S \cdot z = 0$ , para Matriz Laplaciana Simétrica.

Os vetores x, y, z são as soluções do sistemas, ou seja, armazenam as coordenadas dos n vértices da malha reconstruída.

A Figura 3.1 ilustra um exemplo de uma malha no plano. A Figura 3.2: ilustra as Matrizes: Laplaciana (a) e Laplaciana Simétrica (b).



Figura 3.1: Malha no plano com 4 vértices



Figura 3.2: Representação matricial da conetividade da malha ilustrada na Figura 3.1

Selecionando apenas m pontos como informação geométrica dada (pontos de controle) uma solução não-trivial pode ser encontrada.

Seja  $C = \{s_1, ..., s_m\}$  o conjunto dos índices dos vértices selecionados como de controle, as equações restringindo as coordenadas dos pontos de controle são adicionadas ao sistema linear:

$$F_{ij} = \begin{cases} 1 & Sej = s_i \in C\\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

O sistema linear se torna então retangular  $((n + m) \times n)$ :

$$A \ x = b, onde$$
$$A = (L) FouA = (L)_S F, e$$
$$b_k = \begin{cases} 0 & Sek \le n \\ x_{s_{k-n}} & Sen < k \le n + m \end{cases}$$

A Figura 3.3 mostra o mesmo exemplo de malha ilustrado anteriormente, mas agora o vértice 3 de coordenada (3,3) é selecionado como de controle implicando na modificação da construção do sistema linear ilustrado na Figura 3.4. A Figura 3.5 ilustra os vetores  $b_x \in b_y$ .



Figura 3.3: Malha no plano com 4 vértices. O vértice 3 de coordenada (3,3) foi selecionado como ponto de controle



Figura 3.4: Representação matricial da conetividade da malha ilustrada na Figura 3.3.

Observe que o exemplo de malha ilustrado não mostra necessariamente uma matriz esparsa, mas considerando que as malhas utilizadas neste trabalho possuem no mínimo cinqüenta vértices, e as valências destes são em média iguais a seis, faz sentido dizer que a matriz A é uma matriz esparsa.



Figura 3.5: Vetores  $b_x$  e  $b_y$ . Note que todos os pontos que não são de controle estão na origem

## 3.2.1 Representação das Matrizes

Como foi visto anteriormente a escolha da estrutura de dados que armazena a matriz esparsa é crucial para eficiência do trabalho. Assim, somente os elementos da matriz esparsa diferentes de zero serão armazenados.

A representação da Matriz Laplaciana e da Matriz Laplaciana Simétrica, é baseada em três listas de vetores de números inteiros (val,  $adj \in cp$ ). O vetor val armazena a valência de cada vértice, portanto sua dimensão é igual ao número de vértices existentes na malha. O vetor adj armazena a vizinhança de cada vértice. O vetor cp armazena os índices dos vértices selecionados como de controle. A Figura 3.6 exemplifica os vetores val,  $adj \in cp$ para a matriz na Figura 3.3.



Figura 3.6: Representação da Matriz A da Figura 3.3 através de três listas de vetores val,  $adj \in cp$ .

## 3.2.2 Solução do Sistema Linear Esparso

Queremos resolver um sistema linear esparso por mínimos quadrados, ou seja, minimizar ||Ax - b||, onde a matriz A é uma matriz retangular  $((n + m) \times n)$ , o que nos leva a uma aplicação de um método iterativo ao sistema de equações normais  $A^T A x = A^T b$ . Para evitar problemas quanto a formação da matriz  $A^T A$ , a forma fatorada das equações normais  $A^T (b - A x) = 0$  foi utilizada.

O método para solução do sistema linear utilizado foi o método do Gradiente Conjugado (ver seção 2.2.3), formulado para solucionar a forma fatorada das equações normais. Uma vez que os pontos de controle são definidos, três sistemas lineares são construídos, um para x, outro para y, e outro para z, e o algoritmo de solução do sistema pelo método do gradiente conjugado é então acionado três vezes. Optou-se por trabalhar com x, y e zseparadamente, pois não há garantias de que a solução do sistema convirja igualmente para cada coordenada.

Este método requer o armazenamento de dois vetores de tamanho n:  $x \in p$ ; e dois vetores de tamanho m:  $r \in q$ . Cada iteração requer cerca de 2nz(A) + 3n + 2m flops (floating points operations), onde nz(A) é o número de elementos diferentes de zero em A.

Por questões convenientes a aproximação inicial é sempre zero, ou seja,  $x^{(0)} = 0$ , e por conseqüência  $r^{(0)} = b$ . A tolerância adotada foi de 0,0000001.

Uma outra questão importante no nosso método de reconstrução é que os pontos de controle não são interpolados e sim aproximados, e com isso mantemos as condições de suavidade e de uniformidade da malha

Esta condição de suavidade pode ser alterada, fazendo com que os pontos de controle fiquem estáticos, sendo esta mais uma vantagem de representar A diretamente na estrutura de dados. A cada iteração os pontos de controle são ajustados para sua posição original, isto implica no aumento do número de passos e no tempo de processamento. A implementação eficiente de um método iterativo depende substancialmente do desempenho do produto entre a matriz esparsa e um vetor (Av e  $A^T u$ ). Neste trabalho em especial a diferença em termos de implementação da Matriz Laplaciana da Matriz Laplaciana Simétrica está estritamente ligada a este produto. Os algoritmos destas operações estão apresentados abaixo.

#### Matriz Laplaciana

O produto entre a matriz Laplaciana A e um vetor v (u = Av) é então representado pelo seguinte algoritmo:

Sejam n o número de vértices existentes na malha, j o número de pontos de controle, *val*, *adj*, *cp* os vetores que armazenam a valência de cada vértice, a vizinhança de cada vértice e os índices dos pontos de controle respectivamente e k = 0:

#### Algorithm 2 Produto da Matriz A (Laplaciana) por um vetor v:

```
 \begin{array}{l} {\rm para} \ i = 0 \ {\rm at\acute{e}} \ n \\ u[i] = v[i] \\ d = -1 \ / \ val[i]; \\ {\rm para} \ j = 0 \ {\rm at\acute{e}} \ val[i] \\ u[i] = u[i] + (d \ * \ v[ \ {\rm adj}[k] \ ] \ ); \\ k = k+1; \\ {\rm fim-para} \\ {\rm para} \ i = 0 \ {\rm at\acute{e}} \ j \\ u[ \ i + n \ ] = v[ \ {\rm crtl}[i] \ ] \ ; \\ {\rm fim-para} \\ \end{array}
```

O produto entre a matriz transposta de A e o vetor u ( $v = A^T u$ ) também possui um algoritmo muito simples e necessita dos mesmos elementos.

Algorithm 3 Produto da Matriz transposta de A (Laplaciana) por um vetor

```
 \begin{array}{l} \hline para \; i = 0 \; at\acute{e} \; n \\ v[i] = u[i]; \\ para \; j = 0 \; at\acute{e} \; val[i] \\ d = -1 \; / \; val[\; adj[k] \; ]; \\ v[i] = v[i] \; + \; (u[\; adj[k] \; ] \; * \; d \; ); \\ k = k + 1; \\ fim-para \\ fim-para \\ para \; i \; = \; 0 \; at\acute{e} \; j \\ v[cp[i] \; ] \; = \; v[cp[i]] \; + \; (u[i + n]) \; ; \\ fim-para \\ \end{array}
```

u:

Os cálculos são simples e as informações da matriz são acessadas de maneira ordenada através da correlação dos vetores que a representam. Note que o próprio vetor *val* indica quanto deve ser percorrido do vetor *adj*.

#### Matriz Laplaciana Simétrica

A simetria da matriz faz com que o produto da matriz por um vetor seja muito parecido com o produto da transposta da matriz, mudando somente no que se refere aos pontos de controle.

Algorithm 4 Produto da matriz A (Laplaciana Simétrica) por um vetor v:

```
para i = 0 até n

u[i] = val[i] * v[i];

para j = 0 até val[i]

u[i] = u[i] - (v[adj[k]]);

k = k+1;

fim-para

fim-para

para i = 0 até j

u[i + n] = v[crtl[i]];

fim-para
```

**Algorithm 5** Produto da matriz transposta de A (Laplaciana Simétrica) por un vetor u:

```
para i = 0 até n

u[i] = val[i] * v[i];

para j = 0 até val[i]

u[i] = u[i] - (v[adj[k]]);

k = k+1;

fim-para

para i = 0 até j

v[cp[i]] = v[cp[i]] + (u[i+n]);

fim-para
```

Embora as matrizes Laplaciana e Laplaciana Simétrica sejam muito parecidas em seus processos de formação, a grande diferença destes métodos é relacionada aos seus resultados e a velocidade de convergência, que serão expostos no capítulo destinado aos resultados.

## 3.2.3 Pontos de Controle

Para obtermos uma aproximação da superfície é necessário que os pontos de controle sejam determinados a partir de um critério com a finalidade de trazer a malha reconstruída o mais próximo possível da malha original e minimizar o erro geométrico. Intuitivamente, os pontos de controle devem ser lugares estratégicos na superfície, como pontos significativos, nas extremidades e em lugares onde o detalhe geométrico é maior. Em virtudes destas considerações três critérios de seleção foram testados: Seleção Aleatória; Seleção por Intervalos e Seleção por Curvatura. Pela falta de base teórica para descrever a relação malha / geometria, esses critérios são apenas heurísticas. Por outro lado, resultados empíricos poderão contribuir para o melhor entendimento dessa relação.

Inicialmente um percentual do número de vértices foi definido para determinar a dimensão do vetor cp, no entanto dependendo da necessidade este percentual pode ser alterado.

#### Seleção Aleatória

A seleção aleatória consiste em sortear números inteiros entre zero e o número de vértices da malha. Este é um método de escolha rápido. No entanto se a malha for extremamente irregular há chances de que regiões com grande significância fiquem sem informação geométrica. Neste caso, esse método pode se tornar ineficiente (Figura 3.7).



3.7(a): Modelo Original



3.7(b): Modelo reconstruído

Figura 3.7: Modelo Alien com 19198 vértices com 5% dos pontos selecionados como de controle (em destaque). Note que a região do olho esquerdo do Alien quase não possui pontos para representá-la, este fato nos leva a um erro geométrico local maior.

#### Seleção por Intervalos

A seleção por intervalos consiste em dividir o número de vértices da malha em intervalos e selecionar um percentual previamente determinado de pontos dentro de cada intervalo.

Para malhas com um número de vértices significativamente elevado a seleção por intervalos é mais rápida que a seleção aleatória. Caso a malha possua os vértices em ordem aleatória, o que é raro na prática devido aos métodos de geração e compressão, dificilmente serão encontradas regiões sem algum ponto de controle que as represente (Figura 3.8), caso contrário os pontos de controle formarão faixas sobre a malha o que significa que determinadas regiões estarão bem representadas e outras não (Figura 3.9). Levando em consideração que há situações onde uma determinada região necessita de um número expressivo de pontos de controle esta questão seria um fator positivo, todavia este método não é capaz de medir qual região possui esta necessidade, podendo ocasionar um erro maior que o da seleção aleatória. Portanto, é um método rápido que funciona bem para muitos pontos de controle.



Figura 3.8: Note que os pontos ficam bem distribuídos, porém regiões como a boca e os olhos precisam de uma maior amostragem, pois possuem detalhes geométricos mais relevantes.



Figura 3.9: A região da orelha esquerda do modelo não está representada, o que acarreta na má aproximação da malha.

#### Seleção por Curvatura

A seleção por curvatura também possui uma idéia muito simples, calculase primeiramente a curvatura gaussiana em cada vértice da malha, em seguida seleciona-se como pontos de controle aqueles que possuem maior curvatura em módulo. De maneira geral este método requer um tempo maior que os apresentados anteriormente já que primeiro é necessário computar a curvatura de cada vértice e em seguida ordená-los para enfim selecioná-los. Embora este método seja muito eficiente em encontrar pontos com informações geométricas significativas, dependendo da malha os pontos não ficam bem distribuídos (Figura 3.10). A curvatura média também foi estudada, no entando este método requer um tempo de processamento maior e seleciona na média a mesma região que o método da curvatura gaussiana (Figura 3.11).



Figura 3.10: Modelo Max com 8% dos pontos selecionados como de controle. Note que os pontos ficam concentrados nas regiões das orelhas, nariz e boca já que estes possuem maior significância geométrica, ou seja, nos pontos de maior curvatura.

Para evitar o problema da concentração dos pontos de controle dois casos foram estudados, que serão apresentado a seguir.

**Caso 1:** O primeiro caso faz uma seleção dos pontos de controle a partir dos pontos de maior curvatura. Respeitando as seguintes restrições: quando o número de pontos de controle está entre dez e vinte e cinco por cento do número de vértices um ponto de controle fica distante pelo menos uma vizinhanças de outro ponto de controle (Figura 3.12 (b)); quando o número de pontos de controle é menor que dez por cento do número de vértices um ponto de controle fica distante pelo menos duas vizinhanças de outro ponto de controle (Figura 3.12 (a)).



Figura 3.11: Modelo Gargoyle com 5% dos pontos selecionados como pontos de controle. No modelo da esquerda os pontos foram selecionados através do cálculo da curvatura gaussiana e no modelo da direita foram selecionados através do cálculo da curvatura média.



3.12(a): 8% dos pontos selecionados como de controle

3.12(b): 20% dos pontos selecionados como de controle

Figura 3.12: Modelo Max, onde (a) ilustra 8% dos pontos selecionados como de controle com a restrição de duas vizinhanças e (b) ilustra o modelo com 20% dos pontos selecionados como de controle com a restrição de uma vizinhança.

Quando o percentual de pontos de controle é realmente pequeno, 2% por exemplo, este método pode não ser tão bom, pois como a distribuição dos pontos de controle é feita a partir dos pontos de maior curvatura, regiões onde a curvatura é igual a zero ou próxima de zero ficam sem representantes (Figura 3.13).

**Caso 2:** O segundo caso consiste em selecionar os pontos de controle por amostragem em relação a uma distribuição de curvatura, de forma que grande parte do percentual dos pontos de controles seja de alta curvatura, e os demais pontos de controle possuam curvatura média e baixa. Este método de amostragem é conhecido como Importance Sampling (4).

Para realizarmos a amostragem foi necessária a construção de um vetor



Figura 3.13: Modelo Max com 2% dos pontos selecionados como de controle. Note que há uma região grande sem pontos de controle para representá-la.

u de dimensão n tal que:

$$u_j = \frac{\sum_{i=0}^{j} \text{curvatura de } v_i}{\sum_{i=0}^{n} \text{curvatura de } v_i}$$

onde os  $v_i$ 's os são vértices da malha e j = 1, .., n

Para selecionarmos m pontos de controle, basta sortearmos m números entre 0 e 1 e marcarmos no vetor u os primeiros elementos (não marcados) maiores que os números selecionados.

Esta forma de seleção faz com que as regiões com maior detalhe geométrico possuam um número grande de pontos de controle e regiões de curvatura média e baixa possuam alguns pontos para representá-las, isto é, faz com que haja uma distribuição proporcional dos pontos de controle em relação às regiões de maior significância geométrica. (Figura 3.14).



Figura 3.14: Modelo Max com 2% dos pontos selecionados como de controle. Note que há uma distribuição proporcional dos pontos de controle.

# 4 Resultados

Este capítulo é destinado a comparar os resultados obtidos neste trabalho, considerando reconstruções em função do número de pontos de controle, e dos diferentes métodos de seleção de pontos de controle propostos.

#### 4.1 Estimativa de Erro

A malha de mínimos quadrados é uma aproximação da malha original, e um fator importante para comparação das malhas é a medição do erro. Para medir o erro foi feito um programa que compara a distância euclidiana de cada vértice  $v_i$  da malha original com o vértice  $v'_i$ , onde  $v'_i$  é o vértice correspondente a  $v_i$  na malha reconstruída.

A distância entre  $v_i$  e a vizinhança de  $v'_i$  também é analisada para que a possibilidade de deslocamento do vértice também seja considerada (Figura 4.1). Assim o erro em cada vértice é adotado como o valor mínimo considerando a distância entre  $v_i$  e  $v'_i$ ,  $v_i$  e a primeira vizinhança de  $v'_i$  e  $v_i$  e a segunda vizinhança de  $v'_i$ .





Uma vez que estas distâncias foram medidas temos que o erro máximo é definido como a distância máxima encontrada. O erro médio é definido como o somatório de todos os erros dividindo pelo número de vértices. E por sua vez o erro mínimo é a menor de todas as distancias.

Os dados de saída do programa são: erro máximo, erro médio, erro mínimo e um histograma com a distribuição do erro. E através deste histograma calculamos o desvio padrão para termos uma noção da dispersão do erro na malha.

## 4.2 Resultados Preliminares

O sistema linear de mínimos quadrados da reconstrução aproxima a geometria do objeto original, posicionando cada vértice na média geométrica de seus vizinhos imediatos (Figura 4.2). O sistema de reconstrução não altera a conectividade dada e reproduz uma malha visualmente suave que se aproxima da inicial.



Figura 4.2: Exemplo de posicionamento na média geométrica.

As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram as condições de suavidade e de uniformidade da malha. Para que estas condições fossem melhor exemplificadas as malhas representam o mesmo modelo sendo que a Figura 4.3 ilustra uma malha com 25 vértices, a Figura 4.4 uma malha com 81 vértices e ambas possuem os mesmos pontos de controle (em vermelho). Note a presença do erro de aproximação que se deve ao fato de que não há solução que possa satisfazer inteiramente o sistema. Quando o número de elementos da malha aumenta, o erro é melhor distribuído. Nas Figuras 4.3(c) e 4.4(c) podemos observar que os pontos de controle não são interpolados.



Figura 4.3: Na Figura da esquerda temos uma malha no plano com 25 pontos, dentre ele 3 foram selecionados como de controle. Na Figura central temos a recosntrução da malha. Na Figura da direita temos a malha reconstruída sobreposta a malha original. O erro médio da reconstrução é de 0,18



Figura 4.4: Na Figura da esquerda temos uma malha no plano com 81 pontos, dentre ele 3 foram selecionados como de controle. Na Figura central temos a recosntrução da malha. Na Figura da direita temos a malha reconstruída sobreposta a malha original. O erro médio da reconstrução é de 0,13

#### Interpolação dos Pontos de Controle

Como mencionado na seção 3.2.2, os pontos de controle podem ser mantidos com as suas coordenadas originais durante a minimização por gradiente conjugado, ou podem ser alteradas pelo método. Mantendo os pontos de controle estáticos temos duas conseqüências: a primeira, se refere ao erro numérico, onde é claro que o erro mínimo é zero. No entanto o erro médio e máximo sofrem ínfimas alterações; A segunda, se refere ao erro visual, este sim é mais significativo já que de modo geral são gerados pontos com curvatura mais alta comparada a malha original. Isto fica claro em malhas que possuem um número de vértices menor e para um percentual pequeno de pontos de controle (Figura 4.5).

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram uma comparação entre o método de reajuste dos pontos de controle e o método habitual. Foram feitas pausas no gradiente conjugado. Visualizamos resultados parciais do sistema linear. Observe que nesses exemplos (assim como todos os exemplos dessa seção) iniciamos com todos os pontos na origem (que não são pontos de controle).



Figura 4.5: Modelo Bunny com 940 vértice e 10% dos pontos selecionados como de controle. Note que em (b) as extremidades das orelhas, das patas e do rabo não apresentam formas suaves, pois os pontos de controle ficaram estáticos, já em (c) estas mesmas regiões possuem uma suavidade maior.

Reajuste

Reajuste



Figura 4.7: Método com reajuste dos pontos de controle

## 4.3 Comparação dos Métodos de Seleção dos Pontos de Controle

Comparando as malhas reconstruídas quanto ao método de seleção de pontos de controle, a primeira questão a ser levantada é o percentual de pontos definidos como de controle, pois se este é elevado os métodos de seleção apresentam resultados similares. Quando o percentual de pontos de controle é menor que vinte por cento os métodos de seleção apresentam variações.

Fazendo comparações visuais e numéricas e selecionando um percentual pequeno de pontos de controle, o método que se aproxima melhor da malha original é o de seleção por curvatura onde os pontos são selecionados por amostragem, justamente por mapear os pontos com informações geométricas significativas de forma proporcional (Ver tabelas 4.1 - 4.5).

Quando a malha é significativamente grande o método de seleção por intervalo é o mais rápido para encontrar os pontos de controle. Porém se a malha possui muitos detalhes há grandes chances de que a maioria destes não seja reconstruída. O método de seleção aleatória também é rápido, mas não há garantia alguma quanto a escolha dos pontos, não é possível determinar se a distribuição será boa ou não.

Quando os pontos de controle são selecionados por curvatura temos três situações a serem analisadas. A primeira retrata simplesmente a seleção dos pontos de maior curvatura sem restrição ou amostragem alguma. Este método gera resultados ruins, já que os pontos de controle tendem a ficar concentrados em apenas algumas regiões, ignorando totalmente as regiões de média e baixa curvatura.

A segunda situação se refere a seleção dos pontos de controle de maior curvatura com as restrições de vizinhança. De modo geral este metódo obteve bons resultados, porém quando a figura possui muitos detalhes geométricos, os pontos de controle tendem a ficar bem distribuídos nestas regiões e as regiões com curvatura baixa acabam ficando com pouco, ou nenhum representante, aumentando assim o erro.

A última situação retrata a seleção por curvatura envolvendo amostragem, que de modo geral obteve os melhores resultados. Isto se deve principalmente ao fato de que todas as regiões possuem representantes, no entanto nas regiões com maior detalhe geométrico o número de pontos selecionados é maior do que nas outras regiões.

As tabelas abaixos exemplificam as informações citadas acima, onde três por cento dos pontos foram selecionados como de controle. Cada tabela exemplifica os resultados numéricos obtidos na análise de cada método de seleção de pontos de controle de um modelo e as figuras em seguida representam os resultados visuais respectivos.

A Tabela 4.1 expõe as informações do modelo Alien que possui 19198 vértices (Figura 4.8), dentre eles 575 foram selecionados como pontos de controle.

Método de	Iterações			Tempo	Erro	Erro	Desvio
Seleção:	x y z		Z	(s)	Máximo	Médio	Padrão
Aleatória	275	296	257	19,875	0,7292	0,01701	0,0280
Por Intervalos	280	316	285	21,515	0,7312	0,0110	0,0194
Curvatura	1105	1858	1100	84,015	0,2051	0,0549	0,0440
Curvatura com Restrições	497	601	516	39,078	0,0867	0,0159	0,0092
Curvatura por Amostragem	447	587	511	34,187	0,0795	0,0132	0,0078

Tabela 4.1: Modelo Alien com 19	98  pontos e  575	pontos de controle.
---------------------------------	-------------------	---------------------



Figura 4.8: Note que tanto visualmente quanto numericamente o pior método é o de curvatura sem restrição e sem amostragem. E o método que gera o menor erro numérico é o de seleção por curvatura por amostragem.

A Tabela 4.2 expõe as informações do modelo Gargoyle que possui 30059 vértices (Figura 4.9), dentre eles 901 foram selecionados como pontos de controle.

Método de	Iterações			Tempo	Erro	Erro	Desvio
Seleção:	x	x y z		(s)	Máximo	Médio	Padrão
Aleatória	276	298	277	30,735	0,0476	0,0078	0,0051
Por Intervalos	1135	1241	1143	85,328	0,1015	0,0167	0,0147
Curvatura	1532	1917	1475	121,313	0,2516	0,0337	0,0372
Curvatura com Restrições	821	1166	1079	76,031	0,1295	0,0116	0,0131
Curvatura por Amostragem	827	994	833	72,453	0,0134	0,0113	0,0116

Tabela 4.2: Modelo Gargoyle com 30059 pontos e 901 pontos de controle



Figura 4.9: Note que este é o único exemplo onde o erro numérico do método de seleção de curvatura por amostragem não é o melhor caso em termos de erro médio, sendo o melhor caso o de seleção aleatória. Porém visualmente podemos observar que a reconstrução por seleção aleatória (b) não recupera detalhes da asa como em (e) e (f).

A Tabela 4.3 expõe as informações do modelo Max que possui 50018 vértices (Figura 4.10), dentre eles 1500 foram selecionados como pontos de controle.

Método de	Iterações			Tempo	Erro	Erro	Desvio
Seleção:	x	x y z		(s)	Máximo	Médio	Padrão
Aleatória	1732	1216	986	196,750	0,3581	0,0109	0,0315
Por Intervalos	1927	1936	1398	349,860	0,1425	0,0142	0,0135
Curvatura	3140	3722	2863	627,750	0,3659	0,0878	0,0692
Curvatura com Restrições	897	1266	1286	229,859	0,0593	0,0063	0,0048
Curvatura por Amostragem	752	794	813	156,703	0,0833	0,0061	0,0048

Tabela 4.3: Modelo Max com 50018 pontos e 1500 pontos de controle



4.10(a): Modelo Original



4.10(d): Selecão por Curvatura



Seleção



4.10(e): Selecão por Curvatura com Restrição



4.10(c): Seleção por Intervalo



4.10(f): Seleção por Curvatura por Amostragem

Figura 4.10: Na seleção aleatória (a) e por intervalos (b) parte significativa da geometria não foi recuperada (orelha esquerda por exemplo). O modelo por curvatura não recupera a geometria das regiões de baixa curvatura. Os melhores resultados foram obtidos nos métodos de seleção por curvatura com restrição (e) e por amostragem (f).

A Tabela 4.4 expõe as informações do modelo Boneco que possui 82020 vértices (Figura 4.11), dentre eles 2460 foram selecionados como pontos de controle.

Método de	Iterações			Tempo	Erro	Erro	Desvio
Seleção:	x	x y		(s)	Máximo	Médio	Padrão
Aleatória	1882	3440	1910	667,641	0,4219	0,0894	0,0397
Por Intervalos	2270	3096	2689	662,265	0,3041	0,0965	0,0324
Curvatura	2536	3815	1875	677,500	0,8020	0,3329	0,1407
Curvatura com Restrições	1929	2594	1837	542,015	0,6444	0,0728	0,0925
Curvatura por Amostragem	2018	2892	2606	550,000	0,1603	0,0290	0,0256

Tabela 4.4: Modelo Boneco com 82020 pontos e 2460 pontos de controle

A Tabela 4.5 expõe as informações do modelo Bunny que possui 99999 vértices (Figura 4.12), dentre eles 3333 foram selecionados como pontos de controle.



Figura 4.11: Note que quando se trata de uma malha com um grande número de vértices o método de seleção por curvatura por amostragem apresenta os melhores resultados se comparados aos resultados anteriores.

Método de	Iterações			Tempo	Erro	Erro	Desvio
Seleção:	x y z		(s)	Máximo	Médio	Padrão	
Aleatória	3017	3043	1552	750,063	0,2060	0,0303	0,0282
Por Intervalos	3440	3292	2143	1329,27	1,0612	$0,\!1581$	0,1615
Curvatura	3116	2029	1870	781,516	0,2040	0,0219	0,0310
Curvatura com Restrições	1691	1138	1203	529,969	0,1084	0,0055	0,0092
Curvatura por Amostragem	1079	794	936	291,890	0,0486	0,0048	0,0034

Tabela 4.5: Modelo Bunny com 99999 pontos e 3333 pontos de controle

Todas as reconstruções são semelhantes a malha original, no entando o método de seleção por curvatura com amostragem apresenta, em geral, um erro numérico e visual menor. A seleção aleatória e por intervalos dos pontos de controle não garante recuperar a geometria em todas regiões significativas do objeto (por exemplo: a asa da Figuras 4.9(b,c)) ; a orelha esquerda da figura 4.10 (b,c); detalhes do rosto, orelhas da Figura 4.11(b,c)) Na seleção por curvatura, exibido em (d), regiões de baixa curvatura podem não ser recuperadas embora essas regiões sejam importantes na reconstrução da geometria do objeto (Figura 4.10(d), Figura 4.11(d)).

O método por curvatura com restrição evita a concentração dos pontos nas áreas de alta curvatura, buscando uma melhor distribuição ou uni-



Figura 4.12: Nesse exemplo, observa-se que o modelo por intervalos (c) perdeu parte significativa da geometria e a seleção aleatória (b) também obteve um resultado comparativamente inferior aos outros. Entre as seleções por curvatura, o modelo (f) foi o que melhor reconstruiu as costas.

formidade dos pontos de controle. A desvantagem deste método é que em regiões muito elaboradas do objeto, pode ser necessário amostrar vários pontos próximos para recuperar detalhes significativos. Assim a proposta de amostragem por curvatura se mostrou uma estratégia mais equilibrada desde que busca representante em todas as regiões, porém respeitando a proporcionalidade. Regiões de baixa curvatura terão poucos pontos de controle e regiões de alta curvatura terão mais pontos.

## 4.4

## Comparação com Diferentes Percentuais de Pontos de Controle

O número de pontos de controle influencia na reconstrução do objeto, pois quanto maior for o número de pontos de controle, maior será a informação geométrica passada para o sistema, e consequentemente o erro diminui (Figura 4.13 e 4.14).

Tomando por base o modelo Bunny, a tabela 4.6 exibe os resultados obtidos na reconstrução do modelos com percentuais diferentes. A Figura 4.13(a) exibe o modelo original com 940 vértices, as Figuras (b), (c), (d), (e) e (f) representam a reconstrução da malha utilizando o método de seleção por amostragem com percentual de pontos de controle igual a 30, 20, 10, 5 e 3, respectivamente.

Percentual de	Número de	Iterações		Tempo	Erro	Erro	Desvio	
Pontos de	Pontos de	x	У	Z	(s)	Máximo	Médio	Padrão
Controle	Controle							
30%	282	51	51	50	0,110	0,0715352	0,0274048	0,014
20%	188	93	62	60	0,157	0,101928	0,0317613	0,015
10%	94	94	91	93	0,204	0,161866	0,0468656	0,026
05%	47	142	130	134	0,391	0,179656	0,054971	0,031
01%	9	211	304	288	0,656	0,498572	0,219304	0,136

Tabela 4.6: Redução do Percentual de Pontos de Controle para o modelo Bunny com 940 pontos



Figura 4.13: Redução do percentual dos pontos de controle para o modelo Bunny com 940 pontos

A tabela 4.7 também exemplifica a influência no número de controle na reconstrução de uma malha. As informações expostas nesta tabela são do modelo Gargoyle com 30059 vértices. Os resultados visuais estão ilustrados na Figura 4.14.

Percentual de	Número de	1	Iterações		Tempo	Erro	Erro	Desvio
Pontos de	Pontos de	x	у	z	(s)	Máximo	Médio	Padrão
Controle	Controle							
30%	9017	547	586	552	44,000	0,038640	0,004445	0,004
20%	6011	602	663	627	46,250	0,042755	0,005734	0,005
10%	3005	642	720	670	48,016	0,057118	0,006823	0,007
05%	1502	784	872	788	55,141	0,071421	0,008526	0,008
01%	300	1009	1252	1010	74,891	0,112815	0,024249	0,019

Tabela 4.7: Redução do Percentual de Pontos de Controle para o modelo Gargoyle com 30059 pontos



Figura 4.14: Redução do percentual dos pontos de controle para o modelo Gargoyle com 30059 pontos

A medida que o percentual de pontos de controle é reduzido, o número de iterações aumenta. O mesmo acontece para o erro máximo, para o erro médio e o desvio padrão. Com um número reduzido de pontos de controle ainda é possível recuperar parte relevantes da forma do objeto (ver Figuras 4.13(f) e 4.14 (f)).

## 4.5 Comparação entre Laplaciano e Laplaciano Simétrico

Embora haja pouca diferença no processo de formação entre a Matriz Laplaciana e a Matriz Laplaciana Simétrica, a convergência do sistema da Matriz Laplaciana se mostra mais rápida e o erro médio e máximo são menores.

Um outro fato interessante é que a Matriz Laplaciana Simétrica suaviza consideravelmente a malha comparada a Matriz Laplaciana. Logo se a intenção é reconstruir uma malha tentando diminuir os detalhes geométricos e suavizar a superfície, a Matriz Laplaciana Simétrica é mais eficiente. No entanto se a intenção é reconstruir uma malha de maneira que o erro seja menor a matriz Laplaciana se mostrou mais eficiente nos exemplos testados.

As tabelas a seguir mostram estas comparações, onde dez por cento dos pontos foram selecionados usando o método de seleção por curvatura com restrição. Este método foi escolhido para garantir a seleção dos mesmos pontos de controle.

Modelo	Número de	It	Iterações			Erro	Erro	Desvio
	Vértices	x y z		(s)	Máximo	Médio	Padrão	
Ring	512	47	35	46	0,046	0,0421	0,0195	0,0093
Saddle	901	64	62	62	$0,\!125$	0,4393	$0,\!1056$	0,0538
Bunny2	940	50	49	46	0,094	0,1105	0,0354	0,0161
Mecanic	12593	78	73	81	2,938	0,0263	0,0006	0,0032
Alien	19198	91	96	81	6,766	0,0850	0,0082	0,0045
Gargoyle	30059	130	135	130	14,359	0,0219	0,0035	0,0017
Max	50018	84	85	88	18,016	0,0187	0,0031	0,0012
Bunny	99999	86	88	83	30,859	0,0235	0,0032	0,0008

A Tabela 4.8 se refere as malhas reconstruídas com a Matriz Laplaciana.

Tabela 4.8: Matriz Laplaciana

Tabela 4.9 se refere as malhas reconstruídas com a Matriz Laplaciana Simétrica.

Modelo	Número de	It	teraçõe	es	Tempo	Erro	Erro	Desvio
	Vértices	х	у	Z	(s)	Máximo	Médio	Padrão
Ring	512	142	103	141	0,125	0,0875	0,0437	0,0225
Saddle	901	194	195	192	0,328	0,5057	0,1224	0,0538
Bunny2	940	181	180	175	0,343	0,2024	0,0696	0,0371
Mecanic	12593	254	242	260	8,578	0,0447	0,0114	0,0057
Alien	19198	265	302	266	17,875	0,0605	0,0085	0,0047
Gargoyle	30059	302	312	303	30,578	0,0294	0,0064	0,0031
Max	50018	221	226	231	47,875	0,0238	0,0052	0,0018
Bunny	99999	259	258	250	93,188	0,0242	0,0029	0,0014

Tabela 4.9: Matriz Laplaciana Simétrica

As Figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 representam os exemplos visuais das tabelas acima, onde a Figura (a) é o modelo original, e as seguintes, (b) e (c), ilustram os modelos das tabelas 4.8 e 4.9 respectivamente.



Figura 4.15: Modelo Ring com 512 vértices.



4.16(a): Modelo Original

4.16(b): Matriz Laplaciana

4.16(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.16: Modelo Saddle com 901 vértices.



4.17(a): Modelo Original

4.17(b): Matriz Laplaciana 4.17(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.17: Modelo Bunny2 com 940 vértices.



4.18(a): Modelo Original 4.18(b): Matriz Laplaciana 4.18(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.18: Modelo Mecanic com 12593 vértices.

## 4.6 Valência dos Vértices

Nesta seção vamos discutir alguns experimentos sobre a influência da conectividade na recuperação da geometria.

No primeiro exemplo removemos as informações geométricas dos vértices da boca do modelo Alien (Figura 4.23) selecionando como pontos de controle os demais pontos, houve boa recuperação sem qualquer ponto de controle no próprio lábio (Figura 4.23(c)). No exemplo do modelo Max foi a orelha foi removida (Figura 4.24 (a)) e na reconstrução notamos uma geometria com traços da orelha (figura 4.24 (b)), mesmo sem nenhum ponto de controle no interior. Para um modelo como o Alien onde a região da boca foi retirada (Figura 4.23), a variação da valência é importante para a formação da cavidade







4.19(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.19: Modelo Alien com 19198 vértices.



4.20(a): Modelo Original

4.20(b): Matriz Laplaciana

4.20(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.20: Modelo Gargoyle com 30059 vértices.



4.21(a): Modelo Original

4.21(b): Matriz Laplaciana 4.21(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.21: Modelo Max com 50018 vértices.

entre os lábios. Para modelos que representam superfícies como a esfera e o cubo, o fato da malha ser regular, com valência 6 ou uma malha com valência 4-8, proporcionou melhores resultados nos exemplos testados (Figuras 4.25 e



4.22(a): Modelo Original

4.22(b): Matriz Laplaciana 4.22(c): Matriz Laplaciana Simétrica

Figura 4.22: Modelo Bunny com 99999 vértices.

4.26).



4.23(a): Modelo Original

4.23(b): Modelo sem a região 4.23(c): Modelo Reconsda boca truído

Figura 4.23: (a) ilustra o modelo original. Note que em (b) todos os vértices que representavam a geometria da boca foram retirados e em (c) a região foi reconstruída e é possível notar a presença dos lábios e a cavidade entre eles.



 $4.24(\mathrm{a}):$  Modelo sem a Orelha direita

4.24(b): Modelo Reconstruído

Figura 4.24: A orelha do modelo Max foi retirada por completo, ou seja, não há informação geométrica alguma naquela região, e mesmo assim podemos observar uma cavidade que lembra a presença de uma orelha na malha reconstruída

Tomando agora o modelo de uma esfera, com 162 vértices, onde 12 deste são selecionados como pontos de controle, ao reconstruirmos a malha com a conectividade original (Figura 4.25 (a)), temos um erro médio de 0,0164. Alterando a valência da malha de maneira aleatória, por operações de "flip" de arestas, e reconstruindo a malha (Figura 4.25 (b)) temos um erro médio muito maior de 0,0816.

Comparando visualmente as reconstruções, temos que a primeira faz uma melhor aproximação apresentando uma uniformidade e suavidade maior, e embora a segunda também mostre similaridade com a malha original, apresenta regiões com distorções maiores.



4.25(a): Conectividade Original



4.25(b): Conectividade Alterada

Figura 4.25: Modelo Sphere com 162, dentre eles 12 foram selecionados com ponto de controle. O erro médio em (a) é de 0,0164 e o erro médio em (b) é de 0,0816

Estas observações também são validas para o modelo cubo com 50 vértices, onde 8 destes são selecionados como de controle. A reconstrução baseada na conectividade original (Figura 4.26(a)) apresenta um erro médio de 0,0163 e a reconstrução alterando a valência dos vértices (Figura 4.26 (b)) apresenta erro médio de 0,2509.



Figura 4.26: Modelo Cubo com 50, dentre eles 8 foram selecionados com ponto de controle. O erro médio em (a) é de 0,0163 e o erro médio em (b) é de 0,2509

A relevância da conectividade da malha também pode ser notada ao reduzir os pontos de controle significativamente, já que desta maneira as informações geométricas também são significativamente reduzidas e a importância da conectividade fica em evidência (Figura 4.27).



Figura 4.27: Modelo Original Bunny com 940 vértices e apenas 6 destes foram selecionados como pontos de controle pelo método de curvatura por amostragem. Note que a figura reconstruída apresenta regiões que indicam a presença das orelhas e do rabo mesmo não havendo pontos de controles nelas.

# 5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, estudamos um método originalmente proposto por Sokine et al (16), para reconstruir superfícies através da sua conectividade e da geometria de alguns pontos de controle. O método maximiza a suavidade da superfície, formulada pelo Laplaciano Combinatório ou simétrico, mantendo os pontos de controle. Implementamos esta minimização de forma eficiente diretamente na estrutura da malha, usando o método do gradiente conjugado. Esta implementação própria nos permite comparar variações do método, e deduzir experimentalmente algumas propriedades do Laplaciano discreto.

O uso da Matriz Laplaciana ou Laplaciana Simétrica faz com que a superfície seja reconstruída de maneira uniforme e suave. No entanto, dependendo da aplicação, esta condição de suavidade pode ser alterada ao forçarmos que os pontos de controle fiquem estáticos.

A representação da Matriz Laplaciana através de vetores de números inteiros faz com que cada iteração do Gradiente Conjugado seja relativamente rápida.

A análise dos métodos de seleção de pontos de controle mostrou que usando uma técnica apropriada a malha pode ser reconstruída a partir de um percentual reduzido de pontos e mesmo assim o erro geométrico e visual é pequeno. Em particular neste trabalho introduzimos a seleção por amostragem de curvatura que apresentou os melhores resultados.

Outro fator interessante é que a conectividade da malha possui alguma informação geométrica não-trivial. A valência dos vértices influencia diretamente na suavidade da malha, onde malhas com valências regulares são de modo geral mais suaves que malhas com valências aleatórias.

Este último resultado abre possibilidade experimentais de entender melhor as relações entre malha e forma, combinatória e geometria, que serão aprofundadas em trabalhos futuros. Além disso, estudaremos melhorias do método original em casos mais gerais, tais como casos onde a superfície original não é suave.

## Referências Bibliográficas

- BJORCK, Å.. Numerical Methods for Least Squares Problems. SIAM, Philadelphia, 1996. 2.2.3
- [2] BLINN, J. F.. A generalization of algebraic surface drawing. SIGGRAPH Comput. Graph., 16(3):273, 1982. 1.1
- [3] BOISSONNAT, J. D.; TEILLAUD, M.. The hierarchical representation of objects: the delaunay tree. In: SCG '86: PROCEEDINGS OF THE SECOND ANNUAL SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 260–268, New York, NY, USA, 1986. ACM Press. 1.1
- [4] FERRARI, M.; BELLINI, S.: Importance sampling simulation of turbo product codes. IEEE International Conference on Communications, 9:2773 – 2777, 2001. 3.2.3
- [5] FLOATER, M. S.. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. Computer Aided Geometric Design, 14(4):231– 250, 1997. 1.1
- [6] HESTENES, M. R.; STIEFEL, E.. Methods of conjugate gradients for solving linear system. J. Res. Nat. Bur. Standards., B49:409-436, 1952.
   2.2.3
- [7] MEYER, M.; DESBRUN, M.; SCHRÖDER, P. ; BARR, A. H.. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: Hege, H.-C.; Polthier, K., editors, MATHEMATICAL VISUALIZATION III. Springer, Berlin, 2002. 2.4.2
- [8] ISENBURG, M.; GUMHOLD, S. ; GOTSMAN, C.. Connectivity shapes.
   In: VIS '01: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '01, p. 135–142, Washington, DC, USA, 2001. IEEE Computer Society. 1.1, 3.1
- [9] KARNI, Z.; GOTSMAN, C.. Spectral compression of mesh geometry. In: Akeley, K., editor, SIGGRAPH 2000, COMPUTER GRAPHICS PRO-CEEDINGS, p. 279–286. ACM Press / ACM SIGGRAPH / Addison Wesley Longman, 2000. 1.2

- [10] LAGE, M.; LEWINER, T.; LOPES, H. ; VELHO, L. CHE: a scalable topological data structure for triangular meshes. Technical report, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, 2005. 2.5
- [11] LAUCHLI, P.. Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichrechnung. ZAMP, 10:245–280, 1959. 2.2.3
- [12] LIPMAN, Y.; SORKINE, O.; LEVIN, D.; COHEN-OR, D.. Linear rotationinvariant coordinates for meshes. In: PROCEEDINGS OF ACM SIGGRAPH 2005, p. 479–487. ACM Press, 2005. 1.2
- [13] OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; ALEXA, M.; TURK, G.; SEIDEL, H.-P.. Multi-level partition of unity implicits. ACM Transactions on Graphics, 22(3):463–470, July 2003. (Proc. ACM SIGGRAPH ' 03). 1.1
- [14] POLTHIER, K.. Computational aspects of discrete minimal surfaces, 2002. 2.4.2
- [15] SORKINE, O.. Laplacian Mesh Processing. PhD thesis, School of Computer Science, Tel Aviv University, 2006. 1.2
- [16] SORKINE, O.; COHEN-OR, D.. Least-squares meshes. In: PROCEE-DINGS OF SHAPE MODELING INTERNATIONAL, p. 191–199. IEEE Computer Society Press, 2004. 1.2, 3, 3.1, 5
- [17] TEIXEIRA, R. C.. Introdução aos espaços de escala. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2001. 2.3
- [18] TURK, G.; O'BRIEN, J.. Modelling with implicit surfaces that interpolate, 2002. 1.1